

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Южно-Уральский государственный университет  
(национальный исследовательский университет)»  
Высшая школа электроники и компьютерных наук  
Кафедра «Системы автоматического управления»

РАБОТА ПРОВЕРЕНА

Рецензент

зав. каф. АиУ, д.т.н., профессор

\_\_\_\_\_/ Л.С. Казаринов

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2019 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой

д.т.н., профессор

\_\_\_\_\_/ В.И. Ширяев

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2019 г.

Алгоритмы минимаксной и калмановской фильтрации в задаче оценивания вектора состояния линейной динамической системы для единственной реализации измерений

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА  
К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ  
ЮУрГУ – 09.06.01.2019.157.00 ПЗ ВКР

Руководитель работы

зав. каф. САУ, д.т.н., проф.

\_\_\_\_\_/ В.И. Ширяев

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2019 г.

Автор работы

аспирант группы КЭ-4806

\_\_\_\_\_/ Д.В. Хаданович

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2019 г.

Нормоконтролер

зав. каф. САУ, д.т.н., проф.

\_\_\_\_\_/ В.И. Ширяев

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2019 г.

## АННОТАЦИЯ

Хаданович Д.В. Алгоритмы минимаксной и калмановской фильтрации в задаче оценивания вектора состояния линейной динамической системы для единственной реализации измерений. – Челябинск: ЮУрГУ, ВШ ЭКН; 2019, 56 с., 22 ил., библиогр. список – 111 наим., 32 листов слайдов презентации ф.А4.

Работа посвящена задаче адаптивного гарантированного оценивания состояния линейных динамических систем в условиях неопределенности.

В главе 1 дан обзор существующих методов оценивания, основные варианты описания неопределенных величин, используемые в теории гарантированной и вероятностно-гарантирующей фильтрации, адаптивных алгоритмов калмановской фильтрации.

В главе 2 определены условия, в которых возможна адаптация алгоритма гарантированного оценивания к ошибкам измерений. Предложены алгоритмы адаптивного гарантированного оценивания.

В главе 3 представлены результаты вычислительных экспериментов.

|                  |             |                       |                |             |                                |             |             |               |
|------------------|-------------|-----------------------|----------------|-------------|--------------------------------|-------------|-------------|---------------|
|                  |             |                       |                |             | <i>09.06.01.2019.157.00 ПЗ</i> |             |             |               |
| <i>Изм.</i>      | <i>Лист</i> | <i>№ докум.</i>       | <i>Подпись</i> | <i>Дата</i> |                                |             |             |               |
| <i>Разраб.</i>   |             | <i>Хаданович Д.В.</i> |                |             |                                |             |             |               |
| <i>Провер.</i>   |             | <i>Ширяев В.И.</i>    |                |             |                                |             |             |               |
| <i>Реценз.</i>   |             | <i>Казаринов Л.С.</i> |                |             |                                |             |             |               |
| <i>Н. Контр.</i> |             | <i>Ширяев В.И.</i>    |                |             |                                |             |             |               |
| <i>Утверд.</i>   |             | <i>Ширяев В.И.</i>    |                |             |                                |             |             |               |
|                  |             |                       |                |             |                                | <i>Лит.</i> | <i>Лист</i> | <i>Листов</i> |
|                  |             |                       |                |             | <i>Д</i>                       |             | <i>4</i>    | <i>56</i>     |
|                  |             |                       |                |             | <i>ЮУрГУ<br/>Кафедра САУ</i>   |             |             |               |

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|  |    |
|--|----|
| ВВЕДЕНИЕ.....  | 4  |
| 1 АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОЦЕНИВАНИЯ СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ |    |
| 1.1 Методы оценивания состояния динамических систем в условиях неопределенности .....          | 6  |
| 1.2 Основные варианты описания неопределенностей в теории гарантированного оценивания.....     | 11 |
| 1.3 Методы адаптивного оценивания .....  | 15 |
| 1.4 Постановка задачи и цели исследования.....   | 17 |
| 2 РАЗРАБОТКА АДАПТИВНЫХ АЛГОРИТМОВ ГАРАНТИРОВАННОГО ОЦЕНИВАНИЯ                                 |    |
| 2.1 Обновляемая последовательность в алгоритме гарантированного оценивания.....                | 21 |
| 2.2 Описание ошибок измерений с помощью формирующих фильтров....                               | 27 |
| 3 РЕАЛИЗАЦИЯ АДАПТИВНЫХ АЛГОРИТМОВ ГАРАНТИРОВАННОГО ОЦЕНИВАНИЯ                                 |    |
| 3.1 Построение формирующего фильтра в алгоритме минимаксной фильтрации .....                   | 35 |
| 3.2 Оценивание величины сопротивления постоянному току обмоток трансформаторов.....            | 39 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....   | 47 |
| БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....   | 48 |

## ВВЕДЕНИЕ

Традиционный подход к построению систем управления динамическими объектами заключается в последовательном решении двух задач – задачи оценивания и задачи синтеза управления, при этом точность решения задачи оценивания существенно зависит от адекватности математической модели динамики объекта и реальных измерительных процессов. Проблеме оценивания и управления в условиях неопределенности посвящены работы И.Я. Каца, А.Б. Куржанского, В.М. Кунцевича, Н.Н. Красовского, В.М. Кейна, Ф.Л. Черноусько, а также Б.И. Ананьева, С.И. Кумкова, М.Л. Лычака, А.И. Матасова, А.И. Овсеевича, Г.А. Тимофеевой, Н.Б. Филимонова, В.И. Ширяева, А.Ф. Шорикова, Т. Alamo, D.P. Bertsekas, F. Blanchini и др.

В зависимости от принятых допущений по отношению к априорной информации о возмущениях, действующих на объект, и ошибках измерений в информационно-измерительном канале задача оценивания решается либо в стохастической постановке [17, 24, 25, 67, 74, 75], либо в гарантированной [3, 5, 14, 28, 43, 50, 52, 85, 86, 95–98, 107, 108].

В настоящее время широко распространен ставший классическим стохастический подход, при котором известными считаются статистические характеристики случайных факторов – ошибки в задании априорной информации о начальном состоянии объекта, внешние возмущения, помехи в измерениях. Если возмущения и ошибки измерений предполагаются взаимно некоррелированными белыми гауссовскими шумами с известными ковариационными матрицами, то для решения задачи оценивания используют фильтр Калмана (ФК). ФК обеспечивает простой, с точки зрения требуемых вычислительных ресурсов, способ расчета оптимальной в среднестатистическом смысле оценки вектора состояния (по совокупности всех реализаций измерений). Однако эффективность применения ФК существенно зависит от точности заданных ковариационных матриц возмущений и ошибок измерений. Поэтому в условиях, когда доступно малое число наблюдений, информация об этих матрицах может отсутствовать или быть неточной, и применение ФК в этом случае может быть необоснованным [9, 27].

При гарантированном или минимаксном подходе [5, 8, 12, 13, 37, 38, 43, 47, 91, 95, 96, 98, 107, 108] к решению задачи оценивания в условиях неопределенности статистические характеристики, как правило, считаются неизвестными и задаются лишь множественные оценки возможных значений возмущений, ошибок измерений и ошибок в задании информации о начальном состоянии объекта. При этом решение задачи выбирается из условия оптимизации множественных оценок, соответствующих наихудшей реализации значений возмущений, ошибок измере-

|      |      |          |         |      |                         |      |
|------|------|----------|---------|------|-------------------------|------|
|      |      |          |         |      | 09.06.01.2019.157.00 ПЗ | Лист |
| Изм. | Лист | № докум. | Подпись | Дата |                         | 4    |

ний, используя «принцип гарантированного результата». В работах [28, 29, 76, 77] рассматривается задача минимаксной линейной фильтрации для стохастической разностной системы.

Несмотря на возрастающий с середины прошлого столетия интерес к задачам оценивания и управления в теоретико-множественной постановке [3, 11, 22, 23, 30, 37, 38, 52, 95, 96], к настоящему времени данный подход не получил широкого распространения [4, 48, 49, 63, 84, 94]. Наверное, потому, что, в частности, как отмечалось Богуславским И.А. [15], гарантированный подход, с одной стороны, может приводить к слишком пессимистичным оценкам, а с другой стороны, реализация алгоритмов гарантированного оценивания в реальном времени требует больших вычислительных ресурсов в связи с выполнением операций над множествами [83, 94, 98]. Следовательно, актуальной становится задача построения алгоритмов гарантированного оценивая вектора состояния динамических систем, обладающих свойством адаптивности для распознавания ситуаций, когда возмущения, действующие на объект, и ошибки измерений в канале наблюдения реализуются не наилучшим образом, т.е. среда, в которой функционирует объект, ведет себя не так агрессивно, как это заложено в априорных данных о допустимых множествах значений неконтролируемых факторов.

Вопрос о синтезе адаптивных фильтров, способных обеспечить достаточно точную оценку вектора состояния в отсутствии точной априорной информации о возмущениях и ошибках измерений, является одним из центральных в современной теории оценивания [9, 10, 31, 32, 35, 39, 56, 61, 84, 110, 111]. Повысить точность решения задачи фильтрации можно путем восстановления математической модели и оценки неизвестных параметров, определяющих свойства возмущений и помех в канале наблюдения [89].

**Целью** данной работы является разработка алгоритмов адаптивного гарантированного оценивания состояния линейных динамических систем.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

- 1) определить условия, при которых возможна адаптация алгоритма гарантированного оценивания;
- 2) разработать алгоритм гарантированного оценивания, обладающий свойством адаптивности к помехам в информационно-измерительной системе;
- 3) разработать алгоритм оценки неизвестных параметров, определяющих динамику помех в информационно-измерительной системе;
- 4) показать эффективность применения разработанных алгоритмов на примере математических моделей различных динамических систем.

# 1 АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОЦЕНИВАНИЯ СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

## 1.1 Методы оценивания состояния динамических систем в условиях неопределенности

В общем случае математическая модель движения объекта задается системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u, w), \quad t \in (0, T), \quad (1.1)$$

где  $x \in R^n$ ,  $u \in R^p$ ,  $w \in R^m$  – векторы состояния объекта, управления и возмущений соответственно,  $f$  – заданная вектор-функция.

Предполагается, что на интервале  $(0, T)$  за объектом (1.1) осуществляется наблюдение посредством  $l$ -мерного вектора измерений  $y$ , причем  $l < n$ . Модель измерений имеет вид

$$y = h(x, v), \quad (1.2)$$

где  $v \in R^l$  – вектор ошибок измерений,  $h$  – заданная вектор-функция.

В отсутствие эффективных алгоритмов оценивания и управления нелинейными системами, исходную систему (1.1), (1.2) преобразовывают к линейному виду на основе методов линеаризации, которые хорошо изучены в [36].

Линеаризованную модель, соответствующую модели движения объекта (1.1), можно представить в виде системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + Bu + \Gamma w, \quad t \in (0, T), \quad (1.3)$$

в которой матрицы  $A$ ,  $B$  и  $\Gamma$  считаются известными.

Линеаризованная модель, соответствующая модели измерений (1.2) примет вид

$$y = Gx + v, \quad (1.4)$$

где матрица измерений  $G$  также предполагается известной.

После того, как исходная нелинейная система (1.1), (1.2) преобразована к линейному виду (1.3), (1.4), от ее представления в виде системы дифференциальных уравнений переходят к дискретной многошаговой модели [36]

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k + \Gamma_k w_k, \\ y_{k+1} &= G_{k+1} x_{k+1} + v_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (1.5)$$

в которой  $x_k \in R^n$ ,  $u_k \in R^p$ ,  $w_k \in R^m$ ,  $y_k \in R^l$ ,  $v_k \in R^l$  – векторы состояния объекта, управления, возмущений, измерений и ошибок измерений в момент  $k$  дискретно-

го времени соответственно,  $\Delta x_0 \in R^n$  – вектор ошибок в задании априорной информации о начальном состоянии объекта.

В реальных условиях векторы  $\Delta x_0$ ,  $w_k$ ,  $v_k$  являются неизвестными (неконтролируемыми), при этом их природа может быть различной и, как следствие, иметь различную математическую интерпретацию.

Пусть  $\omega^T = (\Delta x_0^T, w^T, v^T) = (\Delta x_0^T, w_0^T, \dots, w_{N-1}^T, v_1^T, \dots, v_N^T)$  – расширенный вектор неизвестных величин размерности  $N' = n + Nm + Nl$ .

Традиционны следующие подходы к описанию вектора  $\omega$ :

- 1) Вектор  $\omega$  является случайным и задается плотностью распределения вероятностей  $p(\omega)$  с известными параметрами.
- 2) Вектор  $\omega$  является неопределенным, при этом  $\omega \in \Omega$ , где  $\Omega$  – заданное множество возможных значений вектора  $\omega$ .
- 3) Компоненты вектора  $\omega$  включают в себя как случайные, так и неопределенные составляющие

$$\omega = \omega^c + \omega^h,$$

где  $\omega^c$  – случайный вектор с плотностью распределения вероятностей  $p(\omega^c)$ ,  $\omega^h$  – неопределенный вектор, удовлетворяющий условию  $\omega^h \in \Omega$  [54].

В зависимости от принятого подхода к описанию вектора  $\omega$  задача оценивания решается либо в стохастической, либо в гарантированной (минимаксной) постановке.

Соответствующим стохастической постановке математическим аппаратом служит теория случайных процессов. При этом предполагается знание точных статистических характеристик вектора  $\omega$ .

Основы теории оптимальной фильтрации стационарных случайных процессов заложили работы А.Н. Колмогорова [33] и Н. Винера [18]. В 1960-х гг. в связи с необходимостью оптимального оценивания вектора состояния линейных и нелинейных нестационарных систем появились работы Р.Э. Калмана [25] и Р. Бьюси [25, 26] по рекуррентному оцениванию.

В задачах калмановской фильтрации предполагается, что возмущения  $w_k$ , ошибки измерений  $v_k$  и ошибки в задании априорной информации о начальном состоянии  $\Delta x_0$  системы (1.5) являются взаимно некоррелированными случайными величинами и описываются гауссовским законом распределения с известными характеристиками

$$\Delta x_0 \in N\{0, P_0\}, \quad w_k \in N\{0, Q\}, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad v_k \in N\{0, R\}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (1.6)$$

Задача оценивания состоит в нахождении оценки  $\hat{x}_N$  вектора состояния  $x_N$  по совокупности измерений  $y(\cdot) = \{y_k, k = 1, 2, \dots, N\}$ :

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1/k} &= A_k \hat{x}_k, \quad P_{k+1/k} = A_k P_k A_k^T + \Gamma_k Q \Gamma_k^T, \\ K_{k+1} &= P_{k+1/k} G_{k+1}^T (G_{k+1} P_{k+1/k} G_{k+1}^T + R)^{-1}, \\ P_{k+1} &= (I - K_{k+1} G_{k+1}) P_{k+1/k}, \\ \hat{x}_{k+1} &= \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1} (y_{k+1} - G_{k+1} \hat{x}_{k+1/k}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1,\end{aligned}\tag{1.7}$$

где  $P_k$  – ковариационная матрица ошибок оценивания,  $K_k$  – коэффициент усиления фильтра,  $I$  – единичная матрица размера  $n \times n$ .

Оценка  $\hat{x}_k$ , найденная по уравнениям фильтра Калмана (1.7), является несмещенной оптимальной в среднеквадратическом смысле (по совокупности реализаций  $\{\Delta x_0\}, \{w_k\}, \{v_k\}$ ).

Таким образом, в задачах оценивания с гауссовскими процессами  $\{\Delta x_0\}, \{w_k\}, \{v_k\}$  информация о векторе состояния  $x_k$  в каждый дискретный момент времени  $k$  представляется в виде

$$x_k \in N\{\hat{x}_k, P_k\}, \quad \hat{x}_k \in S_k, \quad k = 1, 2, \dots, N,\tag{1.8}$$

т.е. вектор  $x_k$  – это гауссовский вектор с математическим ожиданием  $\hat{x}_k = M\{x_k\}$  и ковариационной матрицей  $P_k = M\{(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T\}$ , а  $S_k \subset R^n$  – эллипсоид

$$S_k = \left\{x : (x_k - \hat{x}_k)^T P_k^{-1} (x_k - \hat{x}_k) \leq \gamma^2\right\}, \quad k = 1, 2, \dots, N.\tag{1.9}$$

Здесь параметр  $\gamma^2 = \gamma^2(\alpha)$  зависит от  $\alpha$ -вероятностной меры эллипсоида [17, 54].

Несмотря на то, что фильтр Калмана имеет удобную для реализации на ЦВМ структуру, эффективность его применения существенно зависит от точности задания математических моделей движения объекта и измерений, априорной информации о статистических характеристиках входных  $Q$  и измерительных  $R$  шумов. В общем случае для получения достаточно хороших оценок статистических характеристик процесса (математического ожидания, дисперсии, корреляционной функции и пр.), как правило, требуется проведение большого количества испытаний. Например, при решении задач высокоточного управления летательными аппаратами, необходимое количество испытаний может достигать величин  $10^6 - 10^9$  [53]. На практике проведение большого количества испытаний может оказаться невозможным. Более того, допущение о вероятностной природе возмущений и ошибок измерений является не всегда оправданным [54].

Неточность в задании моделей и информации об априорных данных могут привести к расходимости процесса фильтрации, когда действительные ошибки



оценивания  $\delta_i = x_i - \hat{x}_i$  существенно отличаются от их среднеквадратических значений  $\sigma_i = \sqrt{P_{ii}}$ , вычисленных по уравнениям фильтра. Здесь  $x_i, \hat{x}_i$  –  $i$ -й элемент вектора состояния  $x_k^T = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk})$  и его оценка соответственно. Действительные ошибки оценивания известны только на этапе имитационного моделирования. Кроме того, вычисление обратных матриц для задач высокой размерности может вызвать ошибки счета такие, что фильтр может оказаться неустойчивым [21, 68, 69, 87].

В связи с этим, наряду со стохастическим подходом к решению задачи оценивания развивается теоретико-множественный (гарантированный) подход, оперирующий с множествами, которым принадлежат неопределенные векторы  $\Delta x_0, w_k, v_k$

$$\Delta x_0 \in X_0, \quad w_k \in W, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad v_k \in V, \quad k = \overline{1, N}. \quad (1.10)$$

В рамках теоретико-множественного подхода задача оценивания состоит в построении информационных множеств  $\bar{X}_k$ , гарантированно содержащих вектор состояния  $x_k$

$$x_k \in \bar{X}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (1.11)$$

Если на шаге  $k$  известно множество  $\bar{X}_k$  (1.11), то используя модель движения объекта в (1.5) можно получить множество прогнозов вектора состояния на  $(k+1)$ -й шаг

$$x_{k+1} \in X_{k+1/k} = A_k \bar{X}_k + B_k u_k + \Gamma_k W, \quad X_0 = \bar{X}_0. \quad (1.12)$$

Из модели измерений в (1.5) следует, что

$$x_{k+1} \in X[y_{k+1}] = \{x \in R^n \mid G_{k+1}x = y_{k+1} - v, v \in V\}, \quad (1.13)$$

$X[y_{k+1}]$  – множество состояний объекта, совместимых с измерением  $y_{k+1}$ .

Тогда информационное множество  $\bar{X}_{k+1}$

$$x_{k+1} \in \bar{X}_{k+1} = X_{k+1/k} \cap X[y_{k+1}], \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1.14)$$

Оценка  $x_k^*$  вектора состояния  $x_k$  выбирается из расчета наихудшей реализации векторов  $\{\Delta x_0\}, \{w_k\}, \{v_k\}$

$$x_{k+1}^* = \arg \min_{c \in R^n} \max_{x \in \bar{X}_{k+1}} \|x - c\|, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.15)$$

т.е. минимизируется максимально возможная ошибка оценивания – ошибка в наихудшем случае [43],  $x_k^*$  – чебышевский центр информационного множества  $\bar{X}_k$ .

Реализация рекуррентной процедуры (1.12)–(1.14) приводит к необходимости реализации операций над множествами: сумма Минковского, линейное преобразование и пересечение множеств. При увеличении размерности задачи реализация алгоритма гарантированного оценивания на ЭВМ требует больших вычислительных мощностей для выполнения операций над множествами в реальном времени [83, 98].

Один из подходов для преодоления этих трудностей заключается в использовании оптимальных в определенном смысле внешних аппроксимаций информационных множеств с использованием эллипсоидов [7, 19, 44, 48, 71, 72, 91], параллелепипедов [1, 34, 86, 99], многогранников [1, 2, 14, 85, 86, 95, 99] и др.

При решении задачи оценивания в гарантированной постановке не требуется знание статистической информации о возмущениях и ошибках измерений. Следовательно, реализация алгоритма становится обоснованной и целесообразной, когда объект мало изучен и параметры, определяющие свойства входных  $w_k$  и измерительных  $v_k$  шумов неизвестны. Однако недостаток гарантированного подхода заключается в том, что величина соответствующей ему оценки может оказаться сильно завышенной, так как решение выбирается из расчета наихудшего сочетания неопределенных факторов, (а это событие является маловероятным) [53].

В конкретных прикладных задачах могут возникать ситуации, когда априорная информация о возмущениях  $w_k$  и ошибках измерений  $v_k$  почти неизвестна и сводится либо к заданию множеств их возможных значений, либо к заданию допустимых функций распределения, которые определяют реализации случайных процессов  $\{w_k\}$  и  $\{v_k\}$ . Указанные ситуации приводят к задачам оценивания в минимаксно-стохастической (вероятностно-гарантирующей) постановке, которая предполагает присутствие в моделях движения объекта и измерений возмущений и помех как вероятностного, так и неопределенного характера [28, 29, 45, 64].

Динамика объекта наблюдения и измерения могут быть описаны следующим образом [28, 29]

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k + \Gamma w_k + \xi_k, \\ y_{k+1} &= G_{k+1} x_{k+1} + v_{k+1} + \eta_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где  $\xi_k$  и  $\eta_k$  – независимые гауссовские последовательности, причем

$$\xi_k \in N\{0, Q\}, k = \overline{0, N-1}, \quad \eta_k \in N\{0, R\}, k = \overline{1, N}.$$

Информация о неопределенных векторах  $w_k$  и  $v_k$  ограничивается заданием множеств возможных значений соответствующих величин

$$w_k \in W, k = \overline{0, N-1}, \quad v_k \in V, k = \overline{1, N}.$$

Начальное состояние  $x_0$  системы (1.16) предполагается гауссовским  $n$ -мерным вектором, не зависящим от  $\xi_k$  и  $\eta_k$ , с известной ковариационной матрицей

$$P_0 = M \left\{ (x_0 - M \{x_0\})(x_0 - M \{x_0\})^T \right\},$$

но с неизвестным заранее средним значением  $M \{x_0\}$ , удовлетворяющим включению

$$M \{x_0\} \in \bar{X}_0.$$

Информационное множество  $\bar{X}_k$  определяется по рекуррентным уравнениям [37]

$$\bar{X}_{k+1} = (I - K_{k+1}G_{k+1})(A_k\bar{X}_k + B_k u_k + \Gamma_k W) + K_{k+1}(y_{k+1} - G_{k+1}V), \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

где  $K_k$  определяется по тем же уравнениям, что и в фильтре Калмана.

В общем модель системы (1.16) является компромиссной и позволяет учесть различную степень информированности о характере поведения возмущений и ошибок измерений, что делает изучение задачи оценивания в минимаксно-стохастической постановке актуальным с теоретической точки зрения. Однако из-за вычислительной сложности алгоритмов данный подход не получил широкого распространения [54].

## 1.2 Основные варианты описания неопределенностей в теории гарантированного оценивания

Пусть движение динамического объекта описывается конечно-разностным уравнением

$$x_{k+1} = A_k x_k + \Gamma_k w_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.17)$$

где  $x_k \in R^n$ ,  $w_k \in R^m$  – векторы состояния и возмущений;  $A_k$  и  $\Gamma_k$  – известные матрицы размером  $(n \times n)$  и  $(n \times m)$  соответственно.

Модель измерений имеет вид

$$y_{k+1} = G_{k+1} x_{k+1} + v_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.18)$$

где  $y_k \in R^l$ ,  $v_k \in R^l$  – векторы измерений и ошибок измерений, причем  $l < n$ ,  $G_k$  – известная матрица размером  $(l \times n)$ .

Соотношения (1.17), (1.18), формализующие процесс наблюдения, введены безотносительно характера  $w_k$  возмущений в модели движения объекта, ошибок измерений  $v_k$  в канале наблюдения и ошибок в задании априорной информации о

начальном состоянии объекта  $\Delta x_0$ . Рассмотрим основные варианты описания неопределенных и неопределенно-случайных векторов  $w_k, v_k, \Delta x_0$ , используемые в теории гарантированной и вероятностно-гарантирующей фильтрации [54].

*Вариант 1.*  $\omega \in \Omega_N$ , где  $\omega^T = (\Delta x_0^T, w^T, v^T) = (\Delta x_0^T, w_0^T, \dots, w_{N-1}^T, v_1^T, \dots, v_N^T)$  – расширенный вектор неизвестных векторов размерности  $N' = n + Nm + Nl$ ,  $\Omega_N \subset R^n$  – эллипсоид:

$$\Omega_N = \left\{ \omega : \Delta x_0^T P_0^{-1} \Delta x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} w_k^T Q^{-1} w_k + \sum_{k=1}^N v_k^T R^{-1} v_k \leq r_N^2 \right\}. \quad (1.19)$$

Здесь  $P_0, Q, R$  – невырожденные матрицы размером  $(n \times n), (m \times m), (l \times l)$  соответственно,  $r_N^2$  – параметр эллипсоида (его размер).

Вариант 1 соответствует работе Куржанского А.Б. [45, 46, 54], где ограничение (1.19) является интегральным.

*Вариант 2.*  $\omega \in \Omega$ , где  $\Omega \subset R^n$  – множество, представляющее собой результат прямого произведения

$$\Omega = \Omega_{x_0} \times \Omega_w \times \Omega_v, \quad \Omega_w = \Omega_{w_0} \times \dots \times \Omega_{w_{N-1}}, \quad \Omega_v = \Omega_{v_1} \times \dots \times \Omega_{v_N} \quad (1.20)$$

несвязанных эллипсоидов

$$\begin{aligned} \Omega_{x_0} &= \left\{ \Delta x_0 : \Delta x_0^T P_0^{-1} \Delta x_0 \leq r_0^2 \right\}, \\ \Omega_{w_k} &= \left\{ w_k : w_k^T Q^{-1} w_k \leq r_{w_k}^2 \right\}, \\ \Omega_{v_k} &= \left\{ v_k : v_k^T R^{-1} v_k \leq r_{v_k}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Вариант 2 соответствует работам [45, 46, 53, 54, 91, 109], где ограничения (1.20), (1.21) являются геометрическими и могут быть обусловлены наличием погрешностей исходных нелинейных моделей, ошибок их последующей линеаризации, ошибок вычислений и пр.

*Вариант 3.* Компоненты вектора  $\omega$  включают в себя как неопределенные, так и случайные составляющие

$$\begin{aligned} \Delta x_0 &= \Delta x_0^h + \Delta x_0^c, \\ w_k &= w_k^h + w_k^c, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \\ v_k &= v_k^h + v_k^c, \quad k = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где  $\Delta x_0^h \in \Omega_{x_0}$ ,  $w_k^h \in \Omega_{w_k}$ ,  $v_k^h \in \Omega_{v_k}$  – множества, определяемые соотношениями (1.21);  $\Delta x_0^c \in N\{0, \hat{P}_0\}$ ,  $w_k^c \in N\{0, \hat{Q}\}$ ,  $v_k^c \in N\{0, \hat{R}\}$  – последовательности некоррелированных гауссовских величин.

Предполагается, что матрицы  $P_0, Q, R$ , определяющие эллипсоиды (1.21), подобны ковариационным матрицам  $\hat{P}_0, \hat{Q}, \hat{R}$ , т.е.

$$P_0 = e\hat{P}_0, \quad Q = e\hat{Q}, \quad R = e\hat{R}, \quad (1.23)$$

где  $e$  – коэффициент подобия [54].

Вариант 3 соответствует работам [6, 11, 54], где ограничения (1.22), (1.23) являются ограничениями с частично неопределенной корреляцией  $\kappa$ ,  $|\kappa| < 1$ . При этом ограничение на модуль корреляции  $\kappa$  считается одним и тем же для всех векторов  $w_k, v_k, \Delta x_0$ .

*Вариант 4.*  $\omega \in N\{m_\omega, D_\omega\}$ , где на вектор математического ожидания  $m_\omega$  и ковариационную матрицу  $D_\omega$  наложены достаточно общие ограничения, предполагающие зависимость неопределенности статистической информации от моментов времени  $k$  и  $k'$ . Такие ограничения соответствуют случаю, когда закон распределения вероятностей вектора  $\omega$  не является гауссовским и информация о его конкретном виде содержится в задании некоторого класса плотностей  $p(\omega) \in \Psi$ .

Вариант 4 соответствует работам [6, 11, 54].

Если обозначить соответствующие блоки вектора  $m_\omega$  и матрицы  $D_\omega$  как  $m_{x_0}, m_w, m_v, D_0, D_w, D_v, D_{wv}$ , ограничения для них можно представить в виде

$$\begin{aligned} |m_{x_0}^i| &\leq \bar{m}_{x_0}^i \quad (i = 1, \dots, n), \\ |m_{w_k}^i| &\leq \bar{m}_{w_k}^i \quad (k = 0, 1, \dots, N-1; i = 1, \dots, m), \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$|m_{v_k}^i| \leq \bar{m}_{v_k}^i \quad (k = 1, 2, \dots, N; i = 1, \dots, l),$$

$$\underline{D}_0 \leq D_0 \leq \bar{D}_0,$$

$$\underline{D}_w^{kk'} \leq D_w^{kk'} \leq \bar{D}_w^{kk'} \quad (k, k' = 0, 1, \dots, N-1), \quad (1.25)$$

$$\underline{D}_v^{kk'} \leq D_v^{kk'} \leq \bar{D}_v^{kk'} \quad (k, k' = 1, 2, \dots, N),$$

$$\underline{D}_{wv}^{kk'} \leq D_{wv}^{kk'} \leq \bar{D}_{wv}^{kk'} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1, \quad k' = 1, 2, \dots, N).$$

Соотношения (1.24) представлены для каждого дискретного момента времени  $k$  покомпонентно. Соотношения (1.25) записаны в матричной форме для соответствующих подблоков матриц  $D_w$  и  $D_v$ .

Решение задачи оценивания в таких общих предположениях о характере вектора  $\omega$  представляется сложным [54]. Поэтому в работах [6, 11, 54] рассмотрен способ решения, основанный на мажорировании ограничений (1.24), (1.25) с помощью стохастических формирующих фильтров. Предполагается, что возмущения  $\{w_k\}$  и ошибки измерений  $\{v_k\}$  формируются на выходе дискретной динами-

ческой системы, параметры которой выбираются из условия наиболее адекватного описания информации (1.24), (1.25).

Построение формирующего фильтра для процесса с частично неопределенной статистикой рассмотрим на примере скалярного случайного процесса  $\{v_k, k=1, 2, \dots, N\}$ . Пусть его статистические характеристики таковы, что  $M\{v_k\} = m_k = 0$ ,  $M\{v_k v_{k'}\} = D_{kk'}$ , ( $k, k'=1, 2, \dots, N$ ) – частично неопределены в силу того, что на значения дискретной корреляционной  $D_{kk'}$  накладываются ограничения

$$\left[ \sigma^2 e^{-a|k'-k|} - \Delta D_{kk'} \right] \leq D_{kk'} \leq \left[ \sigma^2 e^{-a|k'-k|} + \Delta D_{kk'} \right] \quad (k, k'=1, 2, \dots, N), \quad (1.26)$$

где  $\Delta D_{kk'} = -\kappa_1 \sigma^2 e^{-a|k'-k|} + \kappa_2 \sigma^2 > 0$ ,  $0 \leq \kappa_1 \leq 1$ ,  $0 \leq \kappa_2 \leq 1$ .

Физический смысл ограничения (1.26) состоит в следующем: нам примерно известно, что корреляция между значениями  $v_k$  и  $v_{k'}$  убывает по экспоненциальному закону  $\sigma^2 e^{-a|k'-k|}$ , где  $\sigma^2$  – предполагаемая дисперсия,  $a > 0$  – константа, характеризующая быстроту исчезновения корреляционной зависимости; но при этом степень нашей неуверенности в таком описании статистических характеристик процесса  $\{v_k\}$  математически формализуется заданием полосы (1.26), которая расширяется с ростом аргумента  $a|k'-k|$ . При  $a|k'-k| \rightarrow \infty$  «остаточная» корреляция, которая характеризуется величиной  $D_{kk'} \in (-\kappa_2 \sigma^2, \kappa_2 \sigma^2)$ , сохраняется и может быть как положительной, так и отрицательной. Поэтому введенная статистическая модель может вполне адекватно описывать вероятностное поведение реальных ошибок измерений [54].

Теперь процесс  $\{v_k\}$  может быть задан стационарным формирующим фильтром 1-го порядка

$$v_{k+1} = cv_k + b\xi_{k+1}, \quad (0 < c < 1), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.27)$$

где  $c, b$  – константы;  $\{\xi_k\}$  – последовательность случайных величин с частично неопределенной статистикой:  $M\{\xi_k\} = 0$ ,  $M\{\xi_k^2\} = 1$ ,  $M\{\xi_k \xi_{k'}\} = \kappa_{\xi, k, k'}$ ,  $|\kappa_{\xi, k, k'}| \leq \bar{\kappa}_{\xi}$ . Начальное условие и параметры формирующего фильтра (1.27)  $c, b, \bar{\kappa}_{\xi}$  выражаются через значения  $\sigma^2, a, \kappa_1, \kappa_2$  из ограничения (1.26).

Следует отметить, что в ряде прикладных задач описание возмущений  $w_k$  в модели движения объекта (1.17) и/или ошибок измерений  $v_k$  в модели измерений (1.18) с помощью формирующих фильтров (1.27) 1) является точным; 2) приводит к удовлетворительным с практической точки зрения результатам, в силу того, что корреляция между возмущениями и/или ошибками измерений изменяется при

$k \rightarrow \infty$  достаточно «гладко». Эффективность использования формирующих фильтров обусловлена тем, что реальные возмущения и ошибки измерений представляют собой выходы неизвестных динамических систем, возбуждаемых на входе случайными и неопределенными воздействиями [54].

### 1.3 Методы адаптивной фильтрации

Вопрос о синтезе адаптивных фильтров, которые могут обеспечить достаточно точную оценку вектора состояния в отсутствие точной априорной информации о возмущениях и ошибках измерений, является одним из центральных в современной теории оценивания [9, 10, 20, 21, 31, 32, 35, 39, 56, 61, 84, 87, 110, 111].

Для реализации алгоритмов оценивания требуется знание моделей объекта и наблюдения, а также априорные данные о процессах, протекающих в системе. В частности, для реализации фильтра Калмана должны быть известны ковариационные матрицы возмущений и ошибок измерений. При несоответствии априорной информации реально протекающим процессам в системе, фактическая ошибка оценивания может оказаться значительно больше расчетной. Несмотря на поступление новых данных наблюдения, разность между фактической и расчетной ошибками может возрастать, что приводит к расходимости процесса фильтрации [20, 21, 68, 69, 73].

Одним из подходов, обеспечивающих устойчивость процесса фильтрации является применение адаптивных фильтров [87]. Адаптация заключается в подстройке параметров фильтра на основе обработки результатов измерений и текущих результатов оценивания [39, 87]. Таким образом формируются оценки априорной информации о возмущениях и ошибках измерений, которые используются для изменения параметров фильтра.

Обзор известных подходов к построению адаптивных фильтров Калмана и разработанные на их основе алгоритмы адаптивного оценивания в рамках стохастического подхода приведен в [39, 56, 87, 110, 111]. Наиболее часто встречаемый подход к построению адаптивных фильтров использует корреляционные свойства обновляемой последовательности

$$v_{k+1} = y_{k+1} - G_{k+1} \hat{x}_{k+1/k}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1.28)$$

Адаптивные алгоритмы оценивания [20, 39, 56, 78, 110, 111], использующие корреляционные функции или дисперсии остаточных членов (обновляемой последовательности), строятся на основе их статистического анализа. Оценка априорной информации о возмущениях и шумах в системе строится уже после обработки набранной статистики.

Классическим примером таких фильтров является адаптивный фильтр, предложенный Мехра [56]. Однако реализация этого фильтра оправдана только в случае стационарного режима фильтрации и стационарных входных и измерительных шумов [39, 56, 110].

Если модель системы и априорная информация о входных и измерительных шумах известна, то перед использованием алгоритма адаптивной фильтрации осуществляется проверка оптимальных свойств фильтра при заданных априорных предположениях о процессах в системе. Проверка оптимальности фильтра строится на основе статистического анализа обновляемой последовательности (1.28).

Теоретически обновляемая последовательность  $v_k$  (1.28) представляет собой белый шум с математическим ожиданием  $M\{v_k\} = 0$  и ковариационной матрицей

$$M\{v_{k+1}v_{k+1}^T\} = G_{k+1}P_{k+1/k}G_{k+1}^T + R. \quad (1.29)$$

Если в обновляемой последовательности появляется смещение  $M\{v_k\} \neq 0$  или появляется существенное расхождение значений фактической и расчетной ковариационных матриц, то фильтр работает в неустойчивом режиме [39].

В подходе, предложенном Язвинским [110, 111], оценка ковариации возмущений осуществляется непосредственно после получения случайного значения обновляемой последовательности. Таким образом, подстройка статистических характеристик входного шума к появившемуся значению обновляемой последовательности проводится на каждом этапе измерений. Для оценки ковариационной матрицы  $Q$  в [110] используется условие состоятельности

$$M\{v_{k+1}v_{k+1}^T\} = v_{k+1}v_{k+1}^T, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.30)$$

максимизирующее плотность вероятности значения обновляемой последовательности.

Выражение  $G_{k+1}A_kP_kA_k^TG_{k+1}^T + R$  представляет собой ковариационную функцию обновляемой последовательности  $v_k$  при отсутствии возмущений в системе  $Q = 0$ . Ковариационная функция обновляемой последовательности при наличии входного шума  $Q > 0$  определяется выражением

$$M\{v_{k+1}v_{k+1}^T\} = G_{k+1}P_{k+1/k}G_{k+1}^T + R = G_{k+1}A_kP_kA_k^TG_{k+1}^T + G_{k+1}\Gamma_kQ\Gamma_k^TG_{k+1}^T + R. \quad (1.31)$$

Случай

$$v_{k+1}v_{k+1}^T \leq G_{k+1}P_{k+1/k}G_{k+1}^T + R = G_{k+1}A_kP_kA_k^TG_{k+1}^T + G_{k+1}\Gamma_kQ\Gamma_k^TG_{k+1}^T + R, \quad (1.32)$$

соответствует тому, что при  $Q > 0$  существует состоятельность между обновляемой последовательностью и ее статистикой.

Для случая



$$v_{k+1} v_{k+1}^T > G_{k+1} P_{k+1/k} G_{k+1}^T + R = G_{k+1} A_k P_k A_k^T G_{k+1}^T + G_{k+1} \Gamma_k Q \Gamma_k^T G_{k+1}^T + R, \quad (1.33)$$

значение обновляемой  $v_k$  не является состоятельным по отношению к своей статистике. Достоинства и недостатки алгоритма адаптивной фильтрации обсуждаются в [39].

#### 1.4 Постановка задачи и цели исследования

Современные алгоритмы адаптивной фильтрации основаны на синтезе процедур обработки результатов измерений, требующих меньшего объема априорных данных и способных «подстраиваться» к конкретным эмпирическим данным. Адаптивные свойства алгоритмов могут достигаться за счет настройки фильтров как по текущим измерениям, так и по обучающим реализациям.

Целью данной работы является разработка адаптивных алгоритмов гарантированного оценивания непосредственно по данным текущих измерений. При этом использование других эмпирических данных не предполагается. Тем самым заданная последовательность измерений одновременно будет являться и обучающей.

Идея адаптации заключается в уточнении множественных оценок  $v_k \in \hat{V}_k \subset V$ . Основной особенностью задачи, исследуемой в работе, является малое число доступных измерений, по результатам которых осуществляется поиск наилучшей оценки вектора состояния.

Для достижения поставленной цели требуется решить следующие задачи:

- 1) определить условия, при которых возможна адаптация алгоритма гарантированного оценивания;
- 2) разработать алгоритм гарантированного оценивания, обладающий свойством адаптивности к помехам в информационно-измерительной системе;
- 3) разработать алгоритм оценки неизвестных параметров, определяющих динамику помех в информационно-измерительной системе;
- 4) показать эффективность применения разработанных алгоритмов на примере математических моделей различных динамических систем.

## 2 РАЗРАБОТКА АДАПТИВНЫХ АЛГОРИТМОВ ГАРАНТИРОВАННОГО ОЦЕНИВАНИЯ

Пусть движение динамического объекта описывается уравнением

$$x_{k+1} = A_k x_k + \Gamma_k w_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.1)$$

где  $x_k \in R^n$ ,  $w_k \in R^m$  – векторы состояния и возмущения;  $A_k$  и  $\Gamma_k$  – известные матрицы размером  $(n \times n)$  и  $(n \times m)$  соответственно.

Модель измерений имеет вид

$$y_{k+1} = G_{k+1} x_{k+1} + v_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.2)$$

где  $y_k \in R^l$ ,  $v_k \in R^l$  – векторы измерений и ошибок измерений соответственно, причем  $l < n$ ;  $G_k$  – известная матрица размером  $(l \times n)$ .

Задача оценивания рассматривается в гарантированной постановке, когда ограничения на векторы начального состояния  $x_0$ , возмущений  $w_k$  и ошибок измерений  $v_k$  заданы в виде множеств их возможных значений

$$x_0 \in X_0, \quad w_k \in W, \quad v_k \in V, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.3)$$

Как было отмечено в п. 1.1 основной недостаток гарантированного подхода заключается в том, что величина получаемой оценки может быть сильно завышенной, если допустимые множества возмущений  $W$  и ошибок измерений  $V$  являются лишь грубыми оценками сверху. В частности, при единственной реализации измерений  $y_N(\cdot) = \{y_1, \dots, y_N\}$ , возмущения и ошибки измерений могут реализоваться лишь из некоторых подмножеств  $w_k \in \tilde{W} \subset W$  и  $v_k \in \tilde{V} \subset V$ . На рис. 2.1 приведены результаты построения информационных множеств  $\bar{X}_k$  при различных множественных оценках ошибок измерений  $v_k \in V$ . Размеры информационных множеств  $\bar{X}_k$  зависят как от размеров априорно заданных множеств  $W$  и  $V$ , так и от реализаций возмущений  $w_k$  и ошибок измерений  $v_k$  (рис. 2.2). Когда значение реализовавшейся ошибки измерения на  $k$ -ом шаге оказывается близким к граничному, точность решения задачи минимаксной фильтрации возрастает, т.е. информационное множество  $\bar{X}_k$  на  $k$ -ом шаге становится меньше (размеры информационного множества  $\bar{X}_k$  минимальны при «наихудших» значениях  $v_k$  [43, 54]).

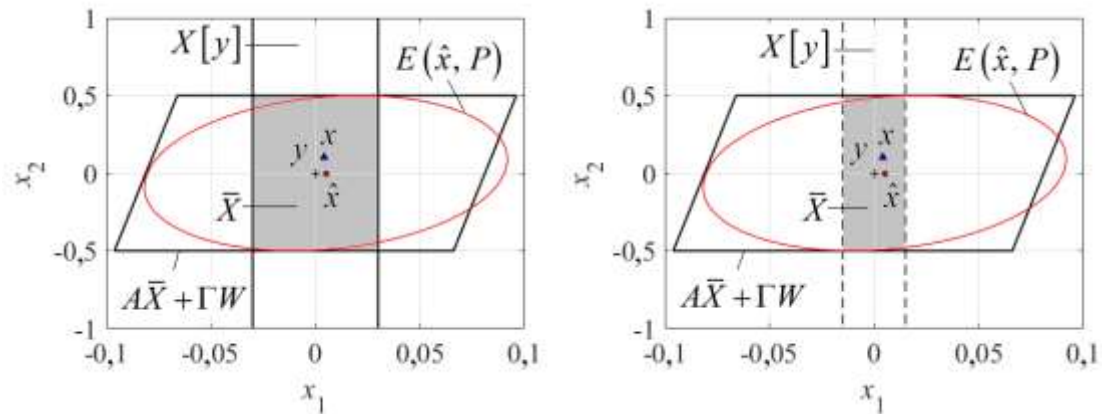


Рис. 2.1. Зависимость размеров информационного множества  $\bar{X}$  от реализации ошибок измерений  $v_k$ .

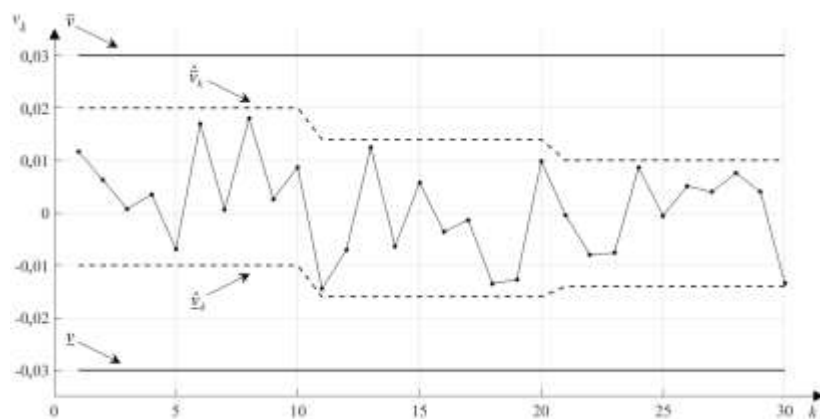


Рис. 2.2. Реализация ошибок измерений  $v_k \in \hat{V}_k = [\hat{v}_k; \hat{v}_k]$ .

В связи с этим актуальной становится задача оценивания неизвестных возмущений  $w_k$  в модели динамики объекта (2.1) и ошибок измерений  $v_k$  в модели (2.2). Уточнение множественных оценок процессов  $\{w_k\}$  и  $\{v_k\}$  с использованием их неявной модели позволит существенно повысить точность решения задачи гарантированного оценивания.

В теории оптимальной фильтрации развивается подход к синтезу алгоритмов оценивания вектора состояния динамической системы, основанный на «неслучайном» представлении возмущений, когда они могут быть заданы в виде разложения по системе функций  $\phi_{ik}$ ,  $i = \overline{1, m}$  [60, 62, 100]

$$w_k = \sum_{i=1}^m \alpha_i \phi_{ik}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.4)$$

где  $\alpha_i$  – постоянные неизвестные коэффициенты.

В работе [70, 81] рассматривается волновое представление случайных возмущений в виде

$$w_k = c_1 f_{1k} + c_2 f_{2k} + \dots + c_m f_{mk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

где  $f_{1k}, f_{2k}, \dots, f_{mk}$  – известные базовые функции;  $c_1, c_2, \dots, c_m$  – неизвестные весовые коэффициенты, которые время от времени скачком изменяют свои значения.

Например для волнового описания скорости дрейфа гиросприбора могут быть выбраны базовые функции  $f_{1k} = 1$  и  $f_{2k} = \exp(-\alpha k)$ . Тогда волновое представление скорости дрейфа примет вид

$$w_k = c_1 + c_2 \exp(-\alpha k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Модель волновых возмущений может быть задана совокупностью гармоник со своими амплитудами, частотами и случайными фазами [70, 81]

$$w_k = \sum_{i=1}^m \alpha_i \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Когда модель возмущений  $w_k$  определена в виде (2.4), наряду с задачей оценивания вектора состояния  $x_k$  возникает задача оценивания параметров модели возмущений.

Матрично-векторная модель возмущений (2.4) примет вид

$$w_k = \Phi_k \alpha, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.5)$$

Традиционный подход к решению задачи совместного оценивания вектора состояния и внешних возмущений по зашумленным измерениям выхода заключается в расширении [73] вектора состояния путем включения в него неизвестных параметров. При таком подходе операции суммы множеств  $A_k \bar{X}_k$  и  $\Gamma_k W$  в (4) в алгоритме гарантированного оценивания не возникает.

Модель системы (2.1), (2.2) с расширенным вектором состояния примет вид

$$z_{k+1} = A_k z_k + B_k u_k, \quad (2.6)$$

$$y_{k+1} = G_{k+1} z_{k+1} + v_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.7)$$

где  $z_k \in R^{n+m}$ ,  $z_k = [x_k \quad w_k]^T$ ,  $A_k = \begin{bmatrix} A_k & \Gamma_k \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$ ,  $B_k = \begin{bmatrix} B_k \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $G_k = [G_k \quad 0]$ ;  $A_k$ ,  $B_k$  и  $G_k$  – блочные матрицы,  $I_m$  – единичная матрица размера  $m \times m$ .

Однако при таком подходе происходит увеличение размерности задачи оценивания и, следовательно, объема требуемых вычислений и памяти ЭВМ. Вместе с тем вектор состояния динамической системы может содержать компоненты, являющиеся ненаблюдаемыми по результатам измерений. Упростить вычислительную процедуру оценивания возможно за счет 1) сведения исходной задачи, имеющей большую размерность, к задачам меньшей размерности, т.е. за счет декомпозиции задачи оценивания расширенного вектора состояния; 2) за счет разделе-

ния полного вектора состояния на наблюдаемый и ненаблюдаемый векторы [55, 65, 73].

Поэтому наряду с задачей множественного оценивания неизвестных ошибок измерений в алгоритме гарантированного оценивания, ставится задача уменьшения требований, предъявляемых к вычислительным ресурсам при реализации гарантированных алгоритмов в темпе поступления новых данных наблюдений. Решение последней задачи может осуществляться путем приведения исходной системы (2.1), (2.2) к виду (2.6), (2.7).

## 2.1 Обновляемая последовательность в алгоритме гарантированного оценивания

Пусть объект наблюдения описывается уравнениями (2.1), (2.2). Задана последовательность измерений  $\{y_k, k = 1, 2, \dots, N\}$ . Требуется найти оценку вектора состояния  $x_N$ . Последовательность  $\{y_k\}$  может быть получена при помощи различных реализаций возмущений  $\{w_k\}$  и ошибок измерений  $\{v_k\}$ .

Каждой реализации случайных векторов  $w_k$  и  $v_k$  соответствует математическая модель (2.3)

$$w_k \in W, k = 0, 1, \dots, N-1, v_k \in V, k = 1, 2, \dots, N.$$

По существу, приведенные множества – есть множества возможных значений случайных, но неопределенно коррелированных между собой, возмущений и ошибок измерений соответственно. Здесь и далее будем рассматривать векторы  $w_k$  и  $v_k$  ограниченными по норме векторами с распределением, близким к нормальному. Векторы такого типа в работах [15, 105, 106] названы практически гауссовыми.

Задача адаптивной фильтрации заключается в том, чтобы в процессе наблюдения за объектом из всего множества возможных реализаций  $\{v_k\}$  выбрать ту, которая бы породила заданную последовательность измерений  $\{y_k\}$ . В такой постановке задачи оценивания математическую модель ошибок измерений можно представить в виде

$$v_{k+1} = v_{k+1/k} + \xi_{k+1}, \xi_{k+1} \in \Xi, \Xi \subset V, k = 0, 1, \dots, N, \quad (2.8)$$

где  $v_{k+1/k}$  – прогнозируемое с  $k$ -го на  $(k+1)$ -й шаг значение вектора ошибок измерения,  $\xi_{k+1}$  – вектор ошибок прогнозирования,  $\Xi$  – множество возможных значений ошибок прогнозирования.

Будем, как и раньше искать оптимальную оценку вектора состояния в виде

|      |      |          |         |      |                         |      |
|------|------|----------|---------|------|-------------------------|------|
|      |      |          |         |      | 09.06.01.2019.157.00 ПЗ | Лист |
| Изм. | Лист | № докум. | Подпись | Дата |                         | 21   |

$$x_{k+1}^* = \arg \min_{c \in R^n} \max_{x \in \bar{X}_{k+1}} \|x - c\|, \quad k = 0, 1, \dots, L.$$

По аналогии с адаптивными фильтрами Калмана [20, 39, 56, 110] будем рассматривать

$$v_{k+1/k}^* = y_{k+1} - G_{k+1} x_{k+1/k}^*, \quad x_{k+1/k}^* = \arg \min_{c \in R^n} \max_{x \in X_{k+1/k}} \|x - c\|, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.9)$$

– последовательность невязок измерений  $y_{k+1}$  и прогнозируемых с  $k$ -го на  $(k+1)$ -й шаг оценок вектора состояния  $x_{k+1/k}^*$ ,

$$v_{k+1}^* = y_{k+1} - G_{k+1} x_{k+1}^*, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.10)$$

– последовательность невязок измерений  $y_{k+1}$  и апостериорных оценок вектора состояния  $x_{k+1}^*$ .

По существу, вектор  $v_{k+1/k}^*$  – прогнозируемая с  $k$ -го на  $(k+1)$ -й шаг оценка вектора ошибок измерений, а вектор  $v_{k+1}^*$  – оценка вектора ошибок измерений на  $(k+1)$ -м шаге.

Тогда вектор

$$\xi_{k+1} = v_{k+1}^* - v_{k+1/k}^*, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.11)$$

– вектор ошибок одношагового прогнозирования ошибок измерений.

В предположении о том, что векторы возмущений  $w_k$  и ошибок измерений  $v_k$  являются постоянно распределенными случайными взаимно некоррелированными векторами, найдем эллипсоид в пространстве  $R^l$

$$E(v_{k+1/k}^*, R_{k+1}) = \left\{ v^* : (v_{k+1}^* - v_{k+1/k}^*)^T R_{k+1}^{-1} (v_{k+1}^* - v_{k+1/k}^*) \leq \gamma^2 \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.12)$$

в котором вектор оценка вектора ошибок измерений  $v_{k+1}^*$  (2.10) находится с заданной (требуемой) вероятностью. Здесь  $v_{k+1/k}^*$  – центр эллипсоида,  $R_{k+1} = M \left\{ (v_{k+1}^* - v_{k+1/k}^*)^T (v_{k+1}^* - v_{k+1/k}^*) \right\}$  – ковариационная матрица ошибок прогнозирования ошибок измерений размером  $(l \times l)$ , смысл параметра  $\gamma$  будет пояснен ниже.

Не теряя общности постановки задачи, предположим, что матрица  $G$  в модели измерений (2.2) такова, что для вектора измерений  $y_k$  имеем

$$y_{k+1}^i = x_{k+1}^i + v_{k+1}^i, \quad i = \overline{1, l}, \quad l < n, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.13)$$

где  $x_{k+1}^i$  –  $i$ -ая компонента вектора состояния  $x_{k+1}$ .

Тогда ковариационной матрицей  $R_{k+1}$  в (2.12) является диагональная матрица

$$R_{k+1} = \begin{pmatrix} \sigma_{1k+1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{2k+1}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{lk+1}^2 \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.14)$$

соответствующая отсутствию корреляции между ошибками  $\xi_{k+1}$  (2.11). Здесь  $\sigma_{ik+1}^2$ ,  $i = \overline{1, l}$ , – соответствующие дисперсии компонент вектора  $\xi_{k+1}^i = (\xi_{k+1}^1, \dots, \xi_{k+1}^l)^T$ .

Будем считать, что вектор ошибок измерений  $v_k$  удовлетворяет покомпонентным (геометрическим) ограничениям

$$v_k \in V = \left\{ v_k^i = (v_k^1, \dots, v_k^l)^T : |v_k^i| \leq c^i, i = \overline{1, l} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (2.15)$$

где числа  $c^i$  априорно заданы.

Один из возможных путей построения адаптивного алгоритма минимаксной фильтрации заключается в использовании статистического подхода к обработке последовательностей  $\{v_{k+1/k}^*\}$  и  $\{v_{k+1/k}^*\}$  с целью построения множественной оценки ошибок измерений  $\tilde{V}$ .

Перед реализацией адаптивного алгоритма осуществляется оценивание вектора состояния  $x_k$  на основе алгоритма, в котором априорно заданная оценка ошибок измерений  $v_k \in V$  завышена, являясь грубой оценкой сверху. При этом необходимо определить степень отличия используемой оценки  $V$  от реальной  $\tilde{V}$ . Если  $\tilde{V}$  незначительно отличается от априорно заданного значения  $V$ , то фильтр фактически работает в оптимальном режиме, и можно считать, что  $\tilde{V} = V$ , т.е. реализация ошибок измерений  $\{v_k\}$  такова, что на рассматриваемом интервале наблюдений они принимают значения из всего заданного множества  $V$ . Если же  $\tilde{V} < V$ , то это значит, что ошибки измерений принимают значения только из подмножества  $v_k \in \tilde{V} \subset V$ .

Так, подход к построению адаптивного алгоритма минимаксной фильтрации основан на сравнении априорно заданной величины возможных ошибок измерений  $|v_k^i| \leq c^i$ ,  $i = \overline{1, l}$  (2.15) с их среднеквадратическими значениями  $\sigma_k^i = \gamma \sqrt{R_k^{ii}}$  (2.14), получаемыми по результатам измерений  $y_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ .

Подход оперирует с заданными априори интервалами, в которых заключены неизвестные компоненты вектора  $v_k^i = (v_k^1, \dots, v_k^l)^T$

$$-c^i \leq v_k^i \leq c^i, \quad i = \overline{1, l}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (2.16)$$

и с интервалами, в которых заключены оценки компонент вектора ошибок измерений  $v_k^{*i} = (v_k^{*1}, \dots, v_k^{*l})^T$

$$-\gamma\sigma_k^i \leq v_k^{*i} \leq \gamma\sigma_k^i, \quad i = \overline{1, l}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.17)$$

Здесь  $\gamma$  – параметр при выборе которого задается вероятностная мера  $\alpha \rightarrow 1$  [17].

|          |       |       |       |
|----------|-------|-------|-------|
| $\gamma$ | 1     | 2     | 3     |
| $\alpha$ | 0,683 | 0,955 | 0,997 |

Адаптация алгоритма минимаксной фильтрации состоит в замене исходного  $l$ -мерного параллелепипеда, задаваемого неравенствами (2.16) параллелепипедом, задаваемым неравенствами (2.17), если последний обладает меньшим объемом.

Очевидно, что параллелепипед, задаваемый неравенствами (2.17) будет иметь меньший по сравнению с исходным параллелепипедом объем, когда величина ошибки прогнозирования ошибки измерения  $\xi_{k+1}^i = (\xi_{k+1}^1, \dots, \xi_{k+1}^l)^T$  будет меньше априорно заданной величины  $|v_k^i| \leq c^i, \quad i = \overline{1, l}$ .

*Утверждение.* Величина ошибки прогнозирования ошибки измерения  $\xi_{k+1}^i = v_{k+1}^{i*} - v_{k+1/k}^{i*}$  будет меньше априорно заданной величины  $|v_{k+1}^i| \leq c^i$ , когда возмущения  $w_k$  объекта наблюдения отсутствуют или малы по сравнению с ошибками измерений.

Доказательство утверждения рассмотрим на примере процесса первого порядка

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + w_k, \\ y_{k+1} = x_{k+1} + v_{k+1}, \\ k = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

$$x_0 \in X_0 = [\underline{x}_0; \bar{x}_0], \quad w_k \in W = [\underline{w}; \bar{w}], \quad v_k \in V = [\underline{v}; \bar{v}].$$

Уравнения минимаксного фильтра для рассматриваемой модели системы

$$X_{k+1/k} = \bar{X}_k + W, \quad \bar{X}_0 = X_0,$$

$$X[y_{k+1}] = \{x: y_{k+1} - \bar{v} \leq x \leq y_{k+1} - \underline{v}\},$$

$$\bar{X}_{k+1} = X_{k+1/k} \cap X[y_{k+1}], \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Все операции производятся над интервалами:

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d],$$



$$[a, b] \cap [c, d] = [\max(a, c), \min(b, d)].$$

Во введенных в утверждении обозначениях величина  $\xi_k$  должна удовлетворять условию

$$\xi_{k+1} = v_{k+1}^* - v_{k+1/k}^*, \quad \underline{v} < \xi_{k+1} < \bar{v}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

или

$$|\xi_{k+1}| = |v_{k+1}^* - v_{k+1/k}^*| < \text{diam}(V), \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Его выполнением является

$$v_{k+1}^* \in V, \quad v_{k+1/k}^* \in V, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Для апостериорной оценки ошибки измерения имеем:

$$v_{k+1}^* = y_{k+1} - x_{k+1}^*, \quad x_{k+1}^* \in \bar{X}_{k+1} = [\underline{x}_{k+1}; \bar{x}_{k+1}], \quad x_{k+1}^* = \frac{x_{k+1} + \bar{x}_{k+1}}{2},$$

$$v_{k+1}^* \in \tilde{V}_{k+1} = \{v: y_{k+1} - \bar{x}_{k+1} \leq v \leq y_{k+1} - \underline{x}_{k+1}\}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Оценка  $\bar{X}_{k+1}$  является гарантированной, при этом очевидно, что она не может быть хуже априорной оценки  $V$

$$\text{diam}(\bar{X}_{k+1}) \leq \text{diam}(V), \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Поэтому

$$v_{k+1}^* \in \tilde{V}_{k+1} \subseteq V, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Для прогнозируемой оценки ошибки измерения имеем:

$$v_{k+1/k}^* = y_{k+1} - x_{k+1/k}^*, \quad x_{k+1/k}^* \in X_{k+1/k} = [\underline{x}_{k+1/k}; \bar{x}_{k+1/k}], \quad x_{k+1/k}^* = \frac{x_{k+1/k} + \bar{x}_{k+1/k}}{2},$$

$$v_{k+1/k}^* \in \tilde{V}_{k+1/k} = \{v: y_{k+1} - \bar{x}_{k+1/k} \leq v \leq y_{k+1} - \underline{x}_{k+1/k}\}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Условие  $v_{k+1/k}^* \in \tilde{V}_{k+1/k} \subseteq V$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , выполняется только тогда, когда

$$\text{diam}(X_{k+1/k}) \leq \text{diam}(V),$$

$$\text{diam}(X_{k+1/k}) = \text{diam}(\bar{X}_k) + \text{diam}(W), \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

что, в свою очередь, возможно в случае, когда  $W = 0$  или  $\text{diam}(W) \ll \text{diam}(V)$  (отношение дисперсий возмущений  $w_k$  и ошибок измерений  $v_k$   $\rho \ll 1$ ).

Если априорные множества возможных значений возмущений  $w_k \in W$  и ошибок измерений  $v_k \in V$  постоянны на всем рассматриваемом интервале наблюдений  $k = \overline{1, N}$ , то дисперсии компонент вектора  $\xi_k = (\xi_k^1, \dots, \xi_k^l)^T$  при  $k \rightarrow N$  стремятся к установившемуся состоянию  $\sigma_{N-1}^i = \sigma_N^i = \sigma^i$ .

|      |      |          |         |      |                         |      |
|------|------|----------|---------|------|-------------------------|------|
|      |      |          |         |      | 09.06.01.2019.157.00 ПЗ | Лист |
| Изм. | Лист | № докум. | Подпись | Дата |                         | 25   |

Пусть для заданной последовательности измерений  $\{y_k, k = 1, 2, \dots, N\}$  получена множественная оценка ошибок одношагового прогнозирования ошибок измерений  $\Xi_N$  в виде  $l$ -мерного прямоугольного параллелепипеда

$$\xi_N \in \Xi_N = \left\{ \xi_N^i = (\xi_N^1, \dots, \xi_N^l)^T : |\xi_N^i| \leq \gamma \sigma_N^i, i = \overline{1, l} \right\}, \quad (2.18)$$

стороны которого параллельны осям координат.

Тогда выражение для ошибки измерения на шаге  $N + 1$  можно записать в виде

$$v_{N+1} = v_{N+1/N} + \xi_{N+1}, \quad \xi_{N+1} \in \Xi_N. \quad (2.19)$$

Для вычисления прогнозируемого с  $N$  на  $(N + 1)$ -й шаг значения вектора ошибок измерений  $v_{N+1/N}$  будем использовать уравнение (2.9) для одношагового прогноза ошибки измерения, которое перепишем в виде

$$v_{k+1/k}^* = G_{k+1} x_{k+1} + v_{k+1} - G_{k+1} x_{k+1/k}^* = G_{k+1} e_{k+1/k} + v_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (2.20)$$

где  $e_{k+1/k} = x_{k+1} - x_{k+1/k}^*$  – прогнозируемая с  $k$ -го на  $(k + 1)$ -й шаг ошибка оценивания вектора состояния  $x_k$ .

В соответствии с (2.13) уравнение (2.20) представим в виде

$$v_{k+1/k}^{*i} = e_{k+1/k}^i + v_{k+1}^i, \quad i = \overline{1, l}, \quad l < n, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (2.21)$$

где  $e_{k+1/k}^i$  –  $i$ -ая координата вектора ошибок оценивания  $e_{k+1/k}$ .

Математическое ожидание величины  $v_{k+1/k}^{*i}$

$$M \left\{ v_{k+1/k}^{*i} \right\} = M \left\{ e_{k+1/k}^i \right\} + M \left\{ v_{k+1/k}^i \right\}. \quad (2.22)$$

Из априорных предположений о том, что ошибки измерений  $v_k$  являются практически гауссовыми векторами, следует, что  $M \left\{ v_{k+1/k}^i \right\} = 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Математическое ожидание величины  $e_{k+1/k}^i$  при  $k \rightarrow \infty$  стремится к фиксированному значению, отличному от нуля. Поэтому величиной  $M \left\{ v_{k+1/k}^i \right\}$  в (2.22) можно пренебречь. Отсюда

$$M \left\{ v_{k+1/k}^{*i} \right\} = M \left\{ e_{k+1/k}^i \right\},$$

т.е. последовательность  $\left\{ v_{k+1/k}^i, k = 0, 1, \dots, N - 1 \right\}$  имеет математическое ожидание, равное математическому ожиданию последовательности прогнозируемых ошибок оценивания вектора состояния  $\left\{ e_{k+1/k}^i, k = 0, 1, \dots, N - 1 \right\}$ .

Тогда в качестве оценки вектора  $v_{N+1/N}$  в (2.19) будем использовать «центрированное» значение  $v_{N+1/N}^*$

$$v_{N+1/N} = v_{N+1/N}^* - \bar{v}_{N+1/N}^*, \quad (2.23)$$

где

$$\bar{v}_{N+1/N}^* = \frac{N}{N+1} \bar{v}_N^* + \frac{v_{N+1/N}^*}{N+1}. \quad (2.24)$$

Здесь  $\bar{v}_{N+1/N}^*$  – оценка математического ожидания вектора  $v_{N+1/N}^*$ .

## 2.2 Описание ошибок измерений с помощью формирующих фильтров

Адаптация алгоритма гарантированного оценивания возможна за счет выделения границ подынтервалов времени, внутри которых можно пренебречь изменениями вектора состояния  $x_k$

$$x_k = x_{k-1}, \quad y_k = G_k x_k + v_k, \quad k \in [1, N], \quad (2.25)$$

где  $x_k \in R^n$ ,  $y_k \in R^l$ ,  $v_k \in R^l$ .

Т.е. будем считать, что ошибки измерений  $v_k$  являются более высокочастотными по сравнению с изменениями вектора  $x_k$  состояния системы, или в линейной динамической системе возможны только медленные движения по сравнению с быстрыми изменениями ошибок измерений. Также будем предполагать, что ошибки измерений  $\{v_k, k = 1, \dots, N\}$  внутри заданного интервала времени являются стационарной случайной или неопределенной последовательностью.

Тогда измерения  $\{y_k, k = 1, \dots, N\}$  следует рассматривать не как статистическую выборку, а как временной ряд, обработка которого может осуществляться с применением методов фильтрации временных рядов и случайных процессов [16, 88, 90, 93, 104].

Будем, как и раньше искать оптимальную оценку вектора состояния в виде

$$x_k^* = \arg \min_{c \in R^n} \max_{x \in \bar{X}_k} \|x - c\|, \quad k \in [1, N].$$

Матрица  $G$  в модели измерений (2.25) такова, что для вектора измерений  $y_k$  имеем

$$y_k^i = x_k^i + v_k^i, \quad i = \overline{1, l}, \quad l < n, \quad k \in [1, N], \quad (2.26)$$

где  $x_k^i$  –  $i$ -ая компонента вектора состояния  $x_k$ .

Для вектора апостериорной невязки  $v_k^*$  в соответствии с (2.21) имеем

$$v_k^{*i} = e_k^i + v_k^i, \quad i = \overline{1, l}, \quad l < n, \quad k \in [1, N], \quad (2.27)$$

где  $e_k^i$  –  $i$ -ая координата вектора ошибок оценивания  $e_k$ .

Таким образом, из (2.27) получаем  $v_k^{*i}$  – наблюдаемый временной ряд, представляющий собой «аддитивную смесь» ненаблюдаемого сигнала  $v_k^i$  и помехи  $e_k^i$ ,

|      |      |          |         |      |                         |      |
|------|------|----------|---------|------|-------------------------|------|
|      |      |          |         |      | 09.06.01.2019.157.00 ПЗ | Лист |
|      |      |          |         |      |                         | 27   |
| Изм. | Лист | № докум. | Подпись | Дата |                         |      |

причем, в связи с принятыми выше допущениями, последовательность  $\{v_k^i\}$  представляет собой «быстрые» колебания, а последовательность  $\{e_k^i\}$  – «медленные» колебания. Далее для упрощения записи опустим индекс  $i$ .

Математическое ожидание такого ряда определяется «медленной» составляющей и формально ряд оказывается нестационарным, но он становится стационарным путем вычитания из наблюдений  $v_k^*$  составляющей  $e_k$ , т.е. он оказывается стационарным относительно математического ожидания.

Такие ряды относят к классу TS-рядов (trend stationary series – стационарные относительно тренда ряды). В общем случае идентификация TS-ряда осуществляется поэтапно:

- 1) используя метод наименьших квадратов, находится оценка вектора неизвестных параметров «медленной» (детерминированной) составляющей ряда;
- 2) строится остаточный ряд;
- 3) остаточный ряд подвергается проверке на центрированность, по результатам которой принимается решение о необходимости или об отсутствии необходимости коррекции модели «медленной» составляющей ряда; усилия по коррекции модели «медленной» составляющей на этом этапе направляются именно на достижение центрированности остаточного ряда;
- 4) в классе стационарных процессов ARMA ( $p, q$ ) разрабатывается структура остаточного ряда, отождествляемая с математической моделью «быстрой» составляющей исходного ряда;
- 5) проводится параметрическая идентификация остаточного ряда [16, 93].

Пусть на интервале времени  $k \in [1, N]$  получена последовательность величин  $\{v_k^*\}$  (2.27). Задача математической обработки  $\{v_k^*\}$  сводится к выделению детерминированной и случайной компонент в  $\{v_k^*\}$ .

Одним из эффективных методов выделения детерминированной («медленной») составляющей временных рядов является представление модели временного ряда в виде разложения по системе функций  $\varphi_{ik}$ ,  $i = \overline{1, m}$  [62]

$$v_k^* = e_k + v_k, \quad e_k = \sum_{i=1}^m a_i \varphi_{ik}, \quad k \in [1, N], \quad (2.28)$$

где  $a_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , – коэффициенты разложения, подлежащие оценке.

Во многих случаях для описания детерминированной составляющей удается ограничиться полиномиальной моделью или разложением по какой-либо системе

|      |      |          |         |      |                         |      |
|------|------|----------|---------|------|-------------------------|------|
|      |      |          |         |      | 09.06.01.2019.157.00 ПЗ | Лист |
| Изм. | Лист | № докум. | Подпись | Дата |                         | 28   |

ортогональных многочленов. В простейшем варианте принимается  $e_k = \sum_{i=1}^m a_i k^i$  и задача построения модели детерминированной составляющей сводится к выбору порядка  $m$  многочлена [93]. Определение наилучшего порядка  $m$  представлено в [62, 70].

Пусть детерминированная составляющая измерений задана в виде полинома относительно аргумента  $k$  известной степени  $m$  с неопределенными коэффициентами  $a_0, \dots, a_m$ :

$$v_k^* = a_0 + a_1 k + \dots + a_m k^m + v_k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.29)$$

Представим вектор коэффициентов  $a = [a_0 \dots a_m]^T$  как вектор состояния  $x_k \in R^m$  динамической модели

$$x_k = x_{k-1}, \quad y_k = G_k x_k + v_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (2.30)$$

где элементы матрицы измерений

$$G_k = [1 \quad k \quad k^2 \quad k^3].$$

Таким образом, задача оценивания коэффициентов в (2.29) рассматривается как задача оценивания вектора состояния  $x_k$  модели (2.30).

После того, как получена математическая модель детерминированной составляющей ряда (2.28), приступаем к разработке математической модели стохастической составляющей ряда. Экспериментальными данными для этого этапа является остаточный ряд

$$\hat{v}_k = v_k^* - \sum_{i=1}^m \hat{a}_i \varphi_{ik}, \quad k \in [1, N]. \quad (2.31)$$

Значения остаточного ряда (2.31) являются оценками реализовавшихся на интервале времени  $k \in [1, N]$  ошибок измерений  $v_k$ .

Вычисляя оценки статистических характеристик остаточного ряда

$$\bar{v} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{v}_k, \quad \hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (\hat{v}_k - \bar{v})^2}, \quad (2.32)$$

где  $\bar{v}$  и  $\hat{\sigma}_v$  – оценки математического ожидания и среднеквадратического отклонения соответственно, сравниваем априорно заданную величину возможных ошибок измерений  $|v_k| \leq c$  с их среднеквадратическими значениями  $3\hat{\sigma}_v$ , при этом возможны два случая:

- 1)  $3\hat{\sigma}_v \approx c$ , что соответствует случаю, когда априорно заданная величина возможных ошибок измерений  $|v_k| \leq c$  соответствует их фактическим среднеквадратическим значениям  $\hat{\sigma}_v$ ;

2)  $3\hat{\sigma}_v < c$ , что соответствует случаю, когда априорно заданная величина возможных ошибок измерений  $|v_k| \leq c$  завышена. Величина фактических ошибок измерений  $v_k$  меньше априорно заданной.

Таким образом, принимаем решение о необходимости или об отсутствии необходимости адаптации алгоритма гарантированного оценивания к ошибкам измерений.

Структуру остаточного ряда будем разрабатывать в классе стационарных процессов ARMA ( $p, q$ ) или его частных вариантов AR ( $p$ ) и MA ( $q$ ), отождествляемых с математической моделью ошибок измерений  $v_k$ . При этом основополагающими при выборе модели являются теоретические вероятностные характеристики процесса того или иного конкретного типа, отображаемые их эмпирическими аналогами [16, 93].

*Авторегрессионная модель  $p$ -го порядка AR ( $p$ ).*

Авторегрессионный порядка  $p$  процесс – случайный процесс  $v_k$ , реализация которого формируется в соответствии с разностным уравнением

$$v_k = b_1 v_{k-1} + b_2 v_{k-2} + \dots + b_p v_{k-p} + \xi_k, \quad (2.33)$$

в котором  $\{\xi_k\}$  – последовательность случайных величин  $M\{\xi_k\} = 0$ ,  $M\{\xi_k^2\} = r$ .

Передаточная функция формирующего фильтра в случае (2.33) имеет вид

$$W(z) = \frac{z^p}{z^p - b_1 z^{p-1} - b_2 z^{p-2} - \dots - b_p}.$$

*Модель скользящего среднего  $q$ -го порядка MA ( $q$ ).*

Процесс скользящего среднего  $q$ -го порядка – случайный процесс  $v_k$ , реализация которого формируется в соответствии с разностным уравнением

$$v_k = \xi_k + c_1 \xi_{k-1} + c_2 \xi_{k-2} + \dots + c_q \xi_{k-q}, \quad (2.34)$$

в котором  $\{\xi_k\}$  – последовательность случайных величин  $M\{\xi_k\} = 0$ ,  $M\{\xi_k^2\} = r$ .

Передаточная функция формирующего фильтра в случае (2.34) имеет вид

$$W(z) = \frac{z^q + c_1 z^{q-1} + \dots + c_q}{z^q}.$$

*Модель авторегрессии скользящего среднего ARMA ( $p, q$ ).*

Процесс авторегрессии  $p$ -го порядка и скользящего среднего  $q$ -го порядка – случайный процесс  $v_k$ , реализация которого формируется в соответствии с разностным уравнением

$$v_k = b_1 v_{k-1} + b_2 v_{k-2} + \dots + b_p v_{k-p} + \xi_k + c_1 \xi_{k-1} + \dots + c_q \xi_{k-q}, \quad (2.35)$$

в котором  $\{\xi_k\}$  – последовательность случайных величин  $M\{\xi_k\} = 0$ ,  $M\{\xi_k^2\} = r$ .

Передаточная функция формирующего фильтра в случае (2.35) имеет вид

$$W(z) = \frac{z^q + c_1 z^{q-1} + \dots + c_q}{z^p - b_1 z^{p-1} - \dots - b_p}.$$

Выбор между моделью типа AR ( $p$ ), типа MA ( $q$ ) или моделью ARMA ( $p, q$ ) обусловлен свойствами этих процессов, проявляющимися в различии поведения автокорреляционных (ACF – autocorrelation function) функций [93].

В таблице представлены свойства ACF для ARMA моделей стационарных временных рядов

| Модель                | ACF  |
|-----------------------|--|
| AR ( $p$ ), $b_1 > 0$ | экспоненциальное убывание                                |
| AR ( $p$ ), $b_1 < 0$ | осциллирующее убывание                                   |
| MA ( $q$ ), $c_1 > 0$ | положительный пик при $k = 1$ ,<br>зануление при $k > 1$ |
| MA ( $q$ ), $c_1 < 0$ | отрицательный пик при $k = 1$ ,<br>зануление при $k > 1$ |
| ARMA ( $p, q$ )       | осциллирующее или прямое убывание                        |

В п. 1.2 было показано, что описание ошибок измерений  $v_k$  с помощью формирующих фильтров может вполне адекватно описывать вероятностное поведение реальных ошибок измерений, в силу того, что корреляция между ошибками измерений убывает по экспоненциальному закону и изменяется при  $k \rightarrow \infty$  достаточно «гладко».

Поэтому в качестве модели остаточного ряда (2.31) будем использовать модель процесса AR ( $p$ ).

Теперь, начиная с момента времени  $N + 1$ , процесс  $\{v_k\}$  может быть задан стационарным формирующим фильтром  $p$ -го порядка

$$\hat{v}_k = b_1 \hat{v}_{k-1} + b_2 \hat{v}_{k-2} + \dots + b_p \hat{v}_{k-p} + \xi_k. \quad (2.36)$$

Таким образом, начиная с момента времени  $N + 1$ , процесс  $\{v_k\}$  рассматривается как выход линейной системы, вход которой представляет собой последовательность  $\{\hat{v}_k\}$  (2.36). Поэтому статистические характеристики процесса  $\{\xi_k\}$  в (2.36) определяются статистическими характеристиками процесса  $\{\hat{v}_k\}$  в (2.31), (2.32).

После того, как модель стохастической составляющей временного ряда определена в виде формирующего фильтра (2.33), проводится оценка параметров этой модели (параметрическая идентификация)  $b = (\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_p)^T$ .

На практике, порядок  $p$  формирующего фильтра (2.33), как правило, не превышает 2 [16].

В общем случае параметры авторегрессии (2.33) выражаются через оценки Юла-Уокера [16, 93] (автокорреляционный метод оценивания, МНК-оценки). Однако такой метод оценивания параметров требует по меньшей мере 100 наблюдений [16].

Предлагается гарантированный метод оценивания параметров формирующего фильтра (2.33), требующий меньшего объема данных наблюдений.

Если в момент времени  $N$  получены оценки статистических характеристик последовательности  $\{\xi_k\}$ : математическое ожидание  $\bar{\xi}$  и среднеквадратическое отклонение  $\sigma_\xi$ , то интервальная оценка  $\{\xi_k\}$  может быть определена в виде

$$\xi_k \in \Xi = [-3\sigma_\xi; 3\sigma_\xi], \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Для процесса AR (2) в соответствии с рекуррентной формулой (2.33) имеем

$$\begin{aligned} k = 1: \quad \hat{v}_1 &= \xi_1, \\ k = 2: \quad \hat{v}_2 &= b_1 \hat{v}_1 + \xi_2, \\ k = 3: \quad \hat{v}_3 &= b_1 \hat{v}_2 + b_2 \hat{v}_1 + \xi_3, \\ &\dots \\ k = N: \quad \hat{v}_N &= b_1 \hat{v}_{N-1} + b_2 \hat{v}_{N-2} + \xi_N. \end{aligned} \quad (2.37)$$

или

$$\begin{aligned} k = 1: \quad -\xi_1 &\leq \hat{v}_1 \leq \xi_1, \\ k = 2: \quad -\xi_2 &\leq \hat{v}_2 - b_1 \hat{v}_1 \leq \xi_2, \\ k = 3: \quad -\xi_3 &\leq \hat{v}_3 - b_1 \hat{v}_2 - b_2 \hat{v}_1 \leq \xi_3, \\ &\dots \\ k = N: \quad -\xi_N &\leq \hat{v}_N - b_1 \hat{v}_{N-1} - b_2 \hat{v}_{N-2} \leq \xi_N. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Решая последовательно неравенства (2.38) в которых  $\xi_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ , получим последовательность множеств  $B_k$ ,  $k = \overline{3, N}$ , допустимых значений параметров  $b_1$ ,  $b_2$ .

Множество допустимых значений параметров  $b_1$ ,  $b_2$ , удовлетворяющее всем неравенствам начиная с шага  $k = 3$

$$\hat{B} = \bigcap_{k=3}^N B_k. \quad (2.39)$$



Вектор параметров  $b = (\hat{b}_1, \hat{b}_1)^T$  – чебышевский центр множества (2.39)

$$b_N^* = \arg \min_{c \in R^2} \max_{b \in B} \|b - c\|. \quad (2.40)$$

Таким образом, оценка ошибки измерения на шаге  $N + 1$  может быть определена в виде

$$\hat{v}_{N+1} = \hat{b}_1 \hat{v}_N + \hat{b}_2 \hat{v}_{N-1} + \xi_{N+1}, \quad \xi_{N+1} \in \Xi = [-3\sigma_\xi; 3\sigma_\xi]. \quad (2.41)$$

Оценка (2.41) является интервальной и может быть использована в уравнениях алгоритма гарантированного оценивания.

После обработки  $(N + 1)$ -го измерения ширина интервала наблюдений, используемого для оценивания параметров модели, регулируется, т.е. можно расширить интервал на это измерение или сохранить его ширину  $N$ , откинув  $\hat{v}_1$ . В последнем случае осуществляется итеративное линейное оценивание параметров стохастической составляющей ряда с шириной «скользящего» интервала наблюдений, соответствующее работам [41, 102–104]. Параметры детерминированной составляющей ряда также пересчитываются с поступлением нового измерения.

#### Установление соответствия между случайными и неопределенными величинами

Пусть, как и раньше, вектор ошибок измерений  $v_k^i = (v_k^1, \dots, v_k^l)^T$  является почти гауссовым вектором с ковариационной матрицей

$$R = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_l^2 \end{pmatrix},$$

где  $\sigma_i^2$ ,  $i = \overline{1, l}$  – соответствующие дисперсии компонент вектора  $v_k$ .

Для практически гауссовых векторов будем пользоваться правилом  $3\sigma$ , т.е. тем, что максимальное отклонение случайной или неопределенной величины от ее среднего значения в 3 раза больше среднего отклонения [105, 106]. Тогда в пространстве  $R^l$  можно задать эллипсоид

$$\Omega_v = \{v_k : v_k^T R^{-1} v_k \leq 3^2\},$$

который является внешней оценкой вектора  $v_k$ .

В рамках теоретико-множественного подхода внешней гарантированной оценкой вектора  $v_k$  является параллелепипед в пространстве  $R^l$ , аппроксимирующий

сверху эллипсоид  $\Omega_v$  [57–59, 105, 106]. На рис. 4. показаны внешняя эллипсоидальная  $\Omega_v$  и множественная  $V$  оценки вектора ошибок измерений  $v \in R^2$  с ковариационной матрицей  $R = \text{diag}\{1, 4\}$ .

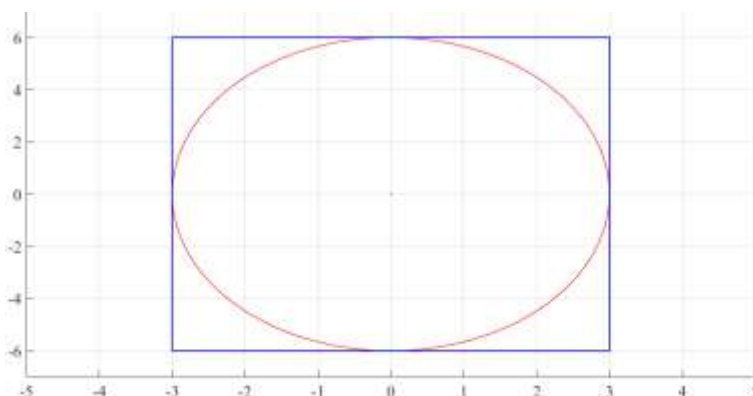


Рис. 2.3. Оценки  $\Omega_v$  и  $V$ .

Этот алгоритм может быть реализован даже для короткого интервала измерений. Его свойства характеризуются результатами имитационного моделирования, представленными в разделе 3.

|      |      |          |         |      |
|------|------|----------|---------|------|
|      |      |          |         |      |
| Изм. | Лист | № докум. | Подпись | Дата |

09.06.01.2019.157.00 ПЗ

Лист

34

### 3 РЕАЛИЗАЦИЯ АДАПТИВНЫХ АЛГОРИТМОВ ГАРАНТИРОВАННОГО ОЦЕНИВАНИЯ

#### 3.1 Построение формирующего фильтра в алгоритме минимаксной фильтрации

Рассмотрим задачу оценивания величины постоянного сигнала, наблюдаемого на фоне помехи.

Наблюдаемый (регистрируемый измерительным прибором) сигнал  $\{y_k\}$  имеет вид

$$y_k = x + v_k, \quad v_k \in V = [v_{\min}; v_{\max}], \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (3.1)$$

где  $x$  – постоянный, но неизвестный сигнал (полезный сигнал),  $\{v_k\}$  – ошибки измерений.

Информация об ошибках в задании начальной величины сигнала  $x$  представлена в виде

$$x_0 \in X_0 = [x_{\min}; x_{\max}]. \quad (3.2)$$

Требуется по результатам измерений  $\{y_k, k = 1, \dots, N\}$  оценить величину сигнала  $x$ .

Для моделирования процесса зададим:  $x_0 \in X_0 = [-6; 6]$ ,  $x = 1,5$ ,  $v_k$  – ошибки измерений в виде белого гауссовского шума с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением  $\sigma = 1$ , число измерений  $N = 100$ . Исходные данные на рис. 3.1, 3.2.

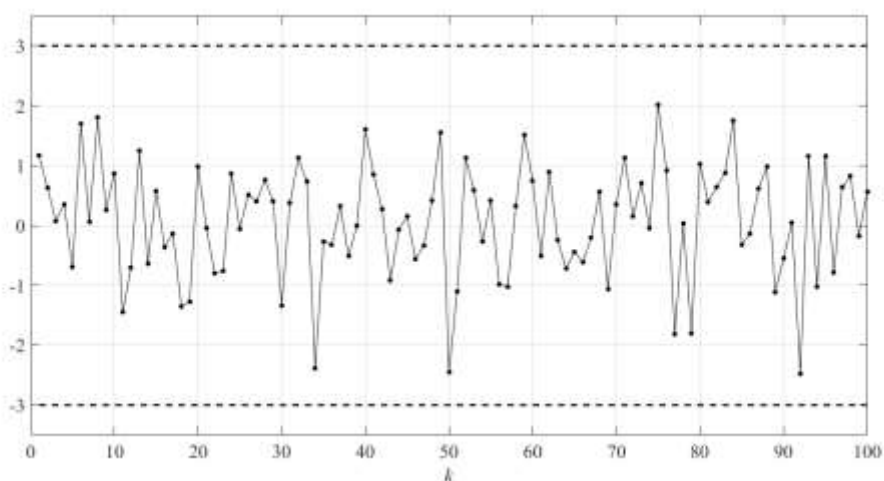


Рис. 3.1. Ошибки измерений (пунктиром обозначены границы множества  $V$ ).

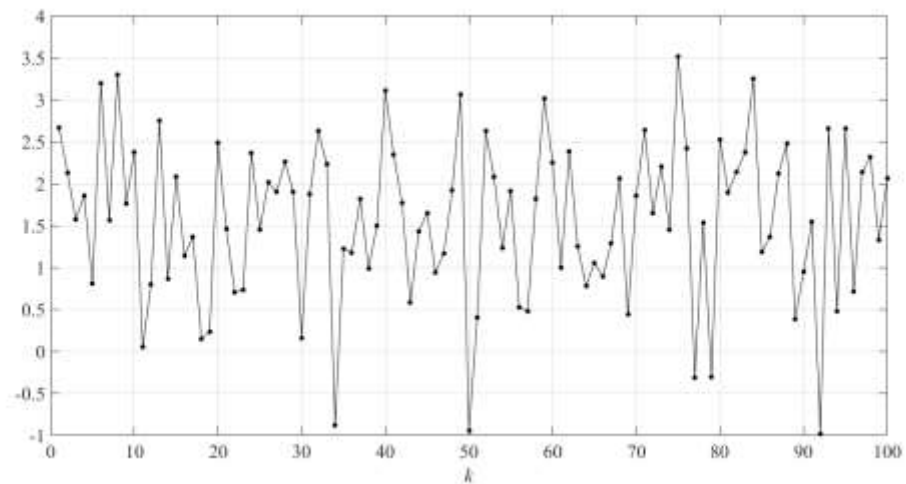


Рис. 3.2. Зашумленные измерения (пунктиром обозначены границы множества  $V$ ).

На интервале измерений  $k \in [1, 20]$  будем вычислять оценку  $x_k^*$  (1.15) и  $v_k^*$  в виде

$$v_k^* = y_k - x_k^*. \quad (3.3)$$

Оценку ошибок измерений  $\hat{v}_k$  на рассматриваемом интервале времени получим в виде

$$\hat{v}_k = v_k^* - \bar{v}_k^*, \quad \bar{v}_k^* = \frac{k-1}{k} \bar{v}_{k-1}^* + \frac{v_k^*}{k}, \quad \bar{v}_1^* = 0, \quad (3.4)$$

получая таким образом стационарный относительно математического ожидания ряд  $\{\hat{v}_k, k = \overline{1, 20}\}$  (рис. 3.3).

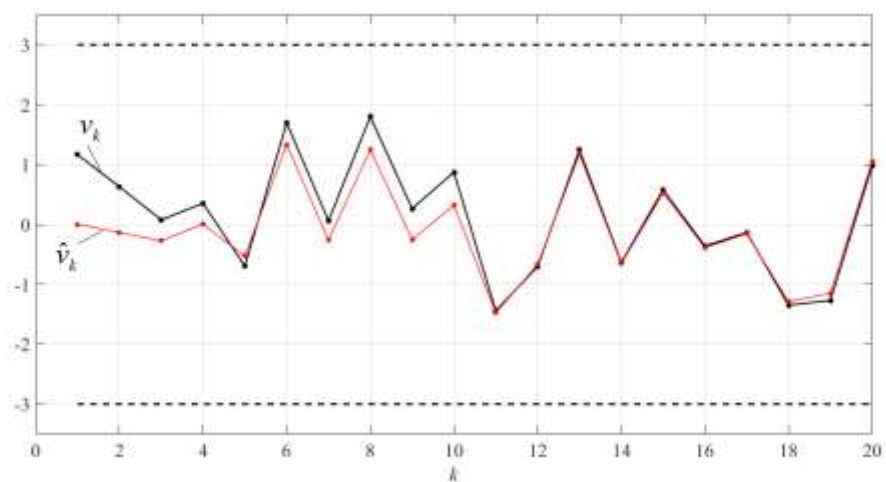


Рис. 3.3. Процессы  $\{v_k\}$  и  $\{\hat{v}_k\}$ .

Оценка среднеквадратического отклонения  $\{\hat{v}_k\}$   $\hat{\sigma} = 0,8001$ . Расчетное значение среднеквадратического отклонения ошибок измерений  $\hat{v}_k$  на рассматриваемом интервале измерений меньше априорно заданного.

Для описания реальных ошибок измерений  $v_k$  зададим формирующий фильтр второго порядка

$$\hat{v}_k = b_1 \hat{v}_{k-1} + b_2 \hat{v}_{k-2} + \xi_k. \quad (3.5)$$

Задавая интервал для помехи

$$\xi_k \in \Xi = [-3\hat{\sigma}; 3\hat{\sigma}], \quad k = \overline{1, N}, \quad N = 20,$$

и решая последовательно неравенства (2.38), находим множество (2.39) допустимых значений параметров  $b_1, b_2$  формирующего фильтра (3.5). Вектор параметров  $b = (\hat{b}_1, \hat{b}_2)^T$  – чебышевский центр множества (2.40) (рис. 3.4).

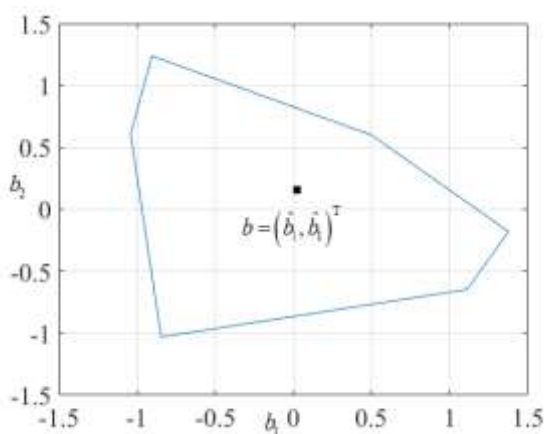


Рис. 3.4. Множество допустимых значений параметров  $b_1, b_2$  на шаге  $k = 20$ .

Тогда в качестве прогноза ошибки измерений на шаг  $N + 1$  используем (2.41). После обработки измерения  $y_{N+1}$  вычисляем оценки (3.3), (3.4), и пересчитываем параметры формирующего фильтра (3.5) для построения прогноза ошибки измерения на шаг  $N + 2$ , используя интервал измерений  $k \in [1, N + 1]$ . Таким образом осуществляем итеративное линейное оценивание параметров формирующего фильтра с расширением интервала измерений.

На рис. 3.5 представлены изменения оценок  $\hat{b}_1, \hat{b}_2$  параметров формирующего фильтра с ростом  $k$ .

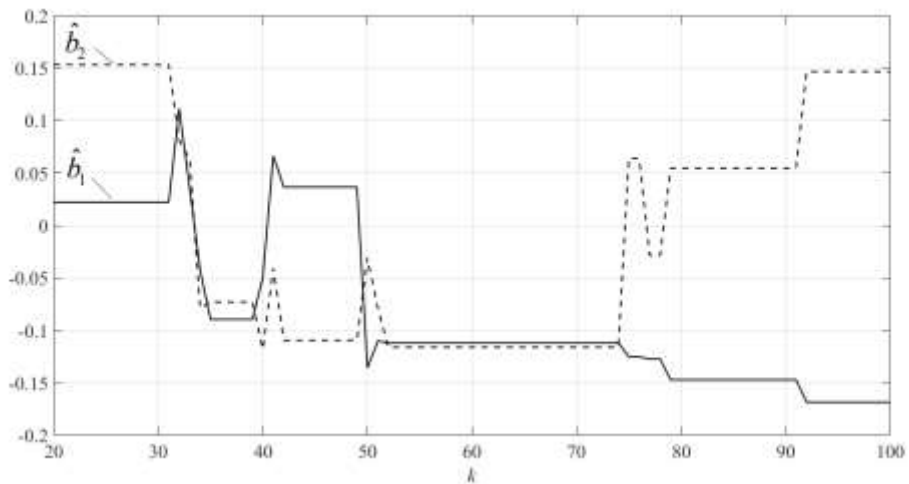


Рис. 3.5. Оценки коэффициентов  $b_1, b_2$ .

На рис. 3.6 приведены множественные оценки для ошибок измерений  $v_k \in \hat{V}_k \subset V$ . Результаты адаптивного оценивания постоянного сигнала  $x$  представлены на рис. 3.7. Множественная оценка  $x \in \hat{X}_k, k=1, \dots, N$ , адаптивного алгоритма гарантированного оценивания, в котором ошибки измерений описаны с помощью формирующего фильтра оказалась меньше по сравнению с оценкой неадаптивного алгоритма.

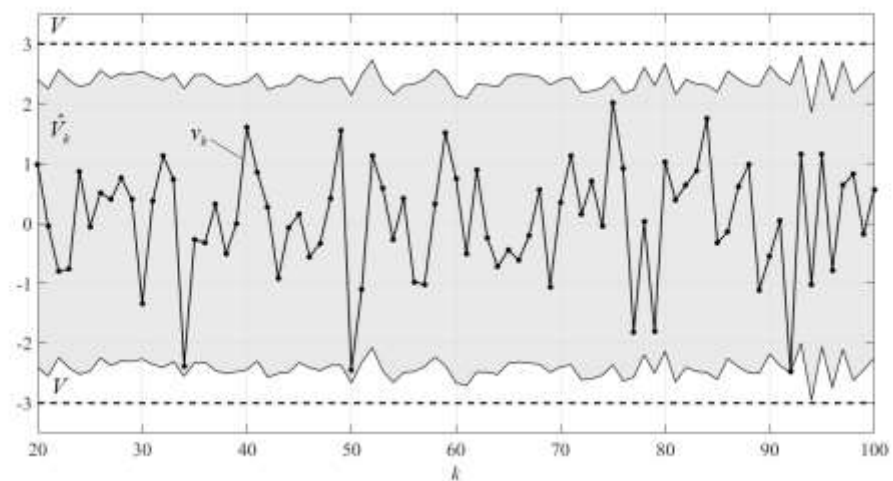


Рис. 3.6.  $v_k \in \hat{V}_k \subset V$ .

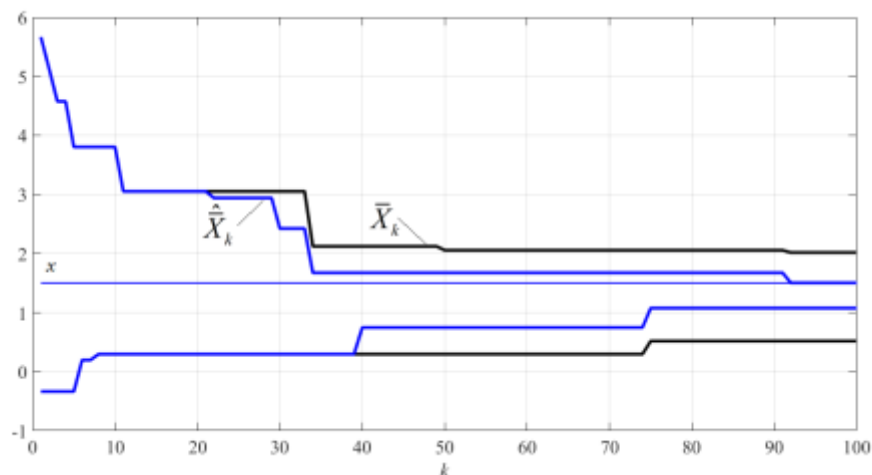


Рис. 3.7.  $x \in \bar{X}_k, x \in \hat{X}_k$ .

В прикладных задачах слежения сбои датчиков могут происходить быстро [9, 10]. В таких случаях для настройки адаптивного алгоритма оценивания имеются только несколько последних измерений. Численный эксперимент показал, что количества измерений  $N \leq 20$  хватает для определения оценок статистических характеристик случайных или случайно-неопределенных ошибок измерений  $v_k$ , описываемых с помощью формирующего фильтра.

### 3.2 Оценивание величины сопротивления постоянному току обмоток трансформаторов

Известен способ измерения сопротивления постоянному току обмоток трансформатора [79]. Способ заключается в том, что постоянный стабилизированный ток пропускают через последовательно соединенные обмотку и эталонный резистор. Величину тока рассчитывают на основе предварительного измерения сопротивления обмотки. Затем измеряют падение напряжения на обмотке и эталонном резисторе. Вычисляя их отношение находят искомое сопротивление обмотки. Кроме того, на первом этапе, пока ток в обмотке нарастает до рассчитанного значения, увеличивают напряжение питания стабилизатора тока для сокращения длительности этапа, при этом скорость изменения тока увеличивается. На втором этапе, когда ток в обмотке установился почти равным рассчитанному току, но продолжает окончательно устанавливаться, снижают его для уменьшения мощности рассеивания на регулирующем транзисторе стабилизатора тока [79]. Графики изменения тока и напряжения в обмотке представлены на рис. 3.8.

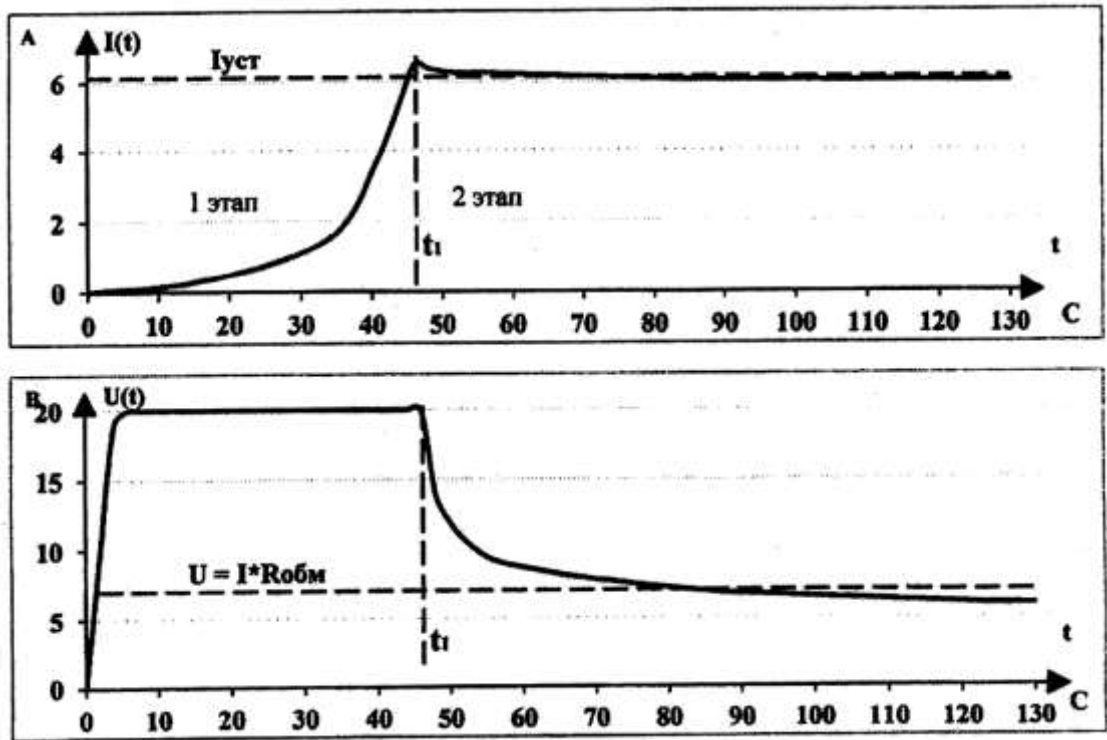


Рис. 3.8. Изменение тока и напряжения в обмотке.

Допустимая погрешность измерения сопротивления обмотки не должна превышать 0,2 %. В реальных производственных условиях процесс измерения может занять несколько десятков минут. При этом предъявляется ряд требований к измерительной аппаратуре. Поэтому основным направлением оптимизации процесса измерения является разработка методов измерения, которые позволят определить величину сопротивления с допустимой погрешностью 0,2 %.

Структура обмотки трансформатора представлена на рис 3.9.

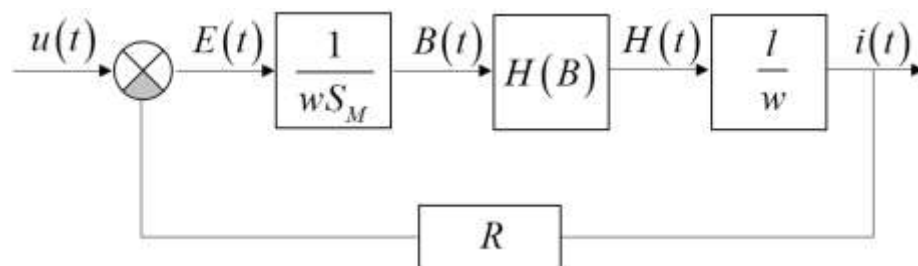


Рис. 3.9. Структурная схема обмотки трансформатора.

На вход объекта подается напряжение  $u(t)$  и измеряется выходной ток  $i(t)$  исследуемой обмотки, имеющей число витков  $w$ , площадь поверхности  $S$ , длину магнитопровода  $l$ , а также сопротивление  $R$ . Величина ЭДС, возникающей в обмотке, равна  $E(t) = u(t) - i(t)R$ . Однако за счет эффектов рассеяния и намагничивания ток  $i(t) = H(B(t))l/w$  связан с магнитной индукцией  $B$  нелинейно.



Напряженность магнитного поля  $H$  имеет нелинейную зависимость от магнитной индукции  $B$ , которая для холоднокатаной электротехнической стали может быть описана следующей формулой:

$$H(B) = 0,36(155B - 9B^2 + 1,04B^{12}).$$

Тогда по известным экспериментальным значениям напряжения  $u(t)$  и тока  $i(t)$  ставится задача определения величины сопротивления  $R$ .

Примерные параметры обмотки конкретных типов трансформаторов приведены в таблице

| Тип            | S, кВА | R1, Ом | R2, Ом | L1, Гн | L2, Гн | I <sub>хх1м</sub> , А | I <sub>хх2м</sub> , А | W1                |                    | W2                |                    |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------------------|-----------------------|-------------------|--------------------|-------------------|--------------------|
|                |        |        |        |        |        |                       |                       | 1/wS <sub>M</sub> | l <sub>cp</sub> /w | 1/wS <sub>M</sub> | l <sub>cp</sub> /w |
| ТСЗ-10/0,66    | 10     | 0,2    | 0,074  | 0,66   | 0,24   | 0,64                  | 1,06                  | 0,93421           | 0,008              | 1,5435            | 0,013              |
| ТСЗ-100/0,66   | 100    | 0,01   | 3,8м   | 0,17   | 0,062  | 4,72                  | 7,81                  | 0,93421           | 0,059              | 1,5435            | 0,098              |
| ТСЗ-160/0,66   | 160    | 5,6м   | 2,1м   | 0,12   | 0,046  | 6,53                  | 10,79                 | 0,93421           | 0,0816             | 1,5435            | 0,135              |
| ТМ-25/10       | 25     | 48     | 0,077  | 75,8   | 0,12   | 0,06                  | 1,43                  | 0,03550           | 0,00075            | 0,8875            | 0,018              |
| ТМ-63/10       | 63     | 27,5   | 0,044  | 51     | 0,082  | 0,12                  | 3,08                  | 0,03550           | 0,0015             | 0,8875            | 0,039              |
| ТМ-160/10      | 160    | 1,96   | 7,2м   | 8,02   | 0,029  | 0,38                  | 6,20                  | 0,05379           | 0,00475            | 0,8875            | 0,078              |
| ТМ-250/10      | 250    | 1,11   | 4,1м   | 5,44   | 0,02   | 0,59                  | 9,69                  | 0,05379           | 0,0074             | 0,8875            | 0,121              |
| ТСЗ-630/15     | 630    | 2,5    | 1,7м   | 56,8   | 0,04   | 0,58                  | 21,85                 | 0,02367           | 0,00725            | 0,8875            | 0,273              |
| ТСЗУ-1600/10   | 1600   | 0,2    | 0,32м  | 22,1   | 0,035  | 2,18                  | 32,64                 | 0,05917           | 0,02725            | 0,8875            | 0,408              |
| ТСЗК У-1000/6  | 1000   | 0,17   | 0,76м  | 12,7   | 0,057  | 1,63                  | 24,48                 | 0,05917           | 0,0204             | 0,8875            | 0,306              |
| ТМ - 6300/10   | 6300   | 0,059  | 0,021  | 6,3    | 2,3    | 3,60                  | 5,71                  | 0,03550           | 0,045              | 0,0563            | 0,071              |
| ТДНС -10000/35 | 10000  | 0,37   | 0,011  | 52     | 1,53   | 1,63                  | 9,07                  | 0,01014           | 0,0204             | 0,0563            | 0,113              |
| ТМН-6300/35    | 6300   | 0,72   | 0,021  | 77,4   | 2,2    | 1,25                  | 6,94                  | 0,01014           | 0,0156             | 0,0563            | 0,087              |

Трансформатор типа ТСЗ-10/0,66 имеет приблизительные значения параметров первичной обмотки:  $1/wS = 0,93421 \text{ м}^{-2}$ ,  $l/w = 0,008 \text{ м}$ ,  $R = 0,2 \text{ Ом}$ , а также параметры вторичной обмотки:  $1/wS = 1,5435 \text{ м}^{-2}$ ,  $l/w = 0,013 \text{ м}$ ,  $R = 0,074 \text{ Ом}$ .

Исследование обмоток трансформатора осуществляется после окончания времени установления значения тока  $i(t)$  и предполагает вычисление сопротивления  $R$  в обмотке трансформатора по зашумленным помехами  $v(t)$  измерениям тока  $i(t)$  и по известному подаваемому на обмотку напряжению  $u(t) = 27 \text{ В}$ . Поэтому уравнение измерения тока и уравнение измерения напряжения можно представить в виде

$$i'(t) = i(t) + v(t),$$

где  $v(t)$  – ошибка измерения тока, представляющая собой нормально распределенный случайный процесс со стандартным отклонением  $\sigma = 1$

Модель первичной обмотки трансформатора представлена на рис. 3.10.

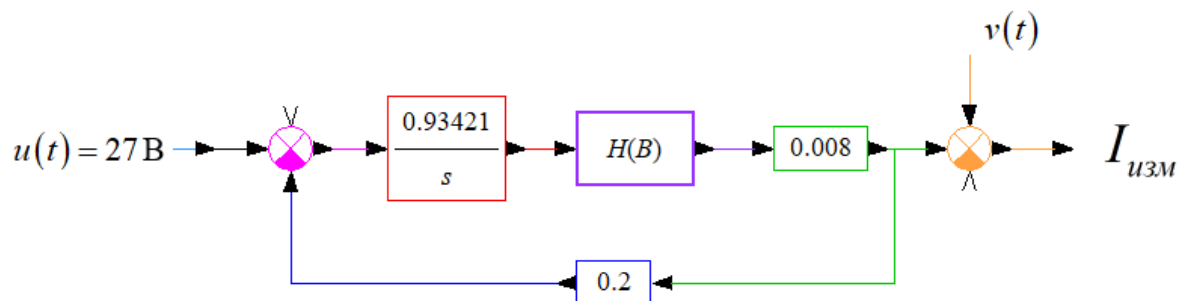


Рис. 3.10. Структурная схема первичной обработки трансформатора.

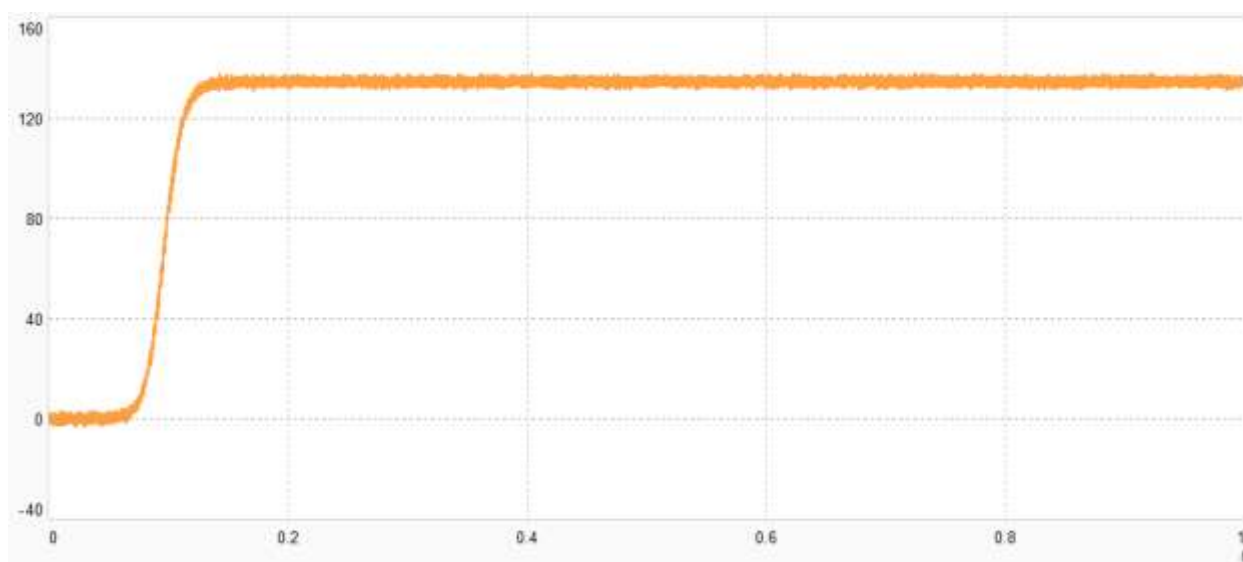


Рис. 3.11. Изменения тока.

Значение тока устанавливается на 0,14 с.

Для оценивания величины установившегося тока воспользуемся алгоритмом, представленным в п. 2.1, с периодом дискретизации  $T=1$  мкс.

На рис. 3.12–3.14 представлены результаты адаптивного и неадаптивного оценивания.

Истинное значение тока  $I = 135$  А.

Сопротивление первичной обмотки  $R = 0,2$  Ом.

Значение измеренного сопротивления с допустимой погрешностью, не превышающей 0,2% должно принадлежать интервалу

$$R_{изм} \in [0,1996; 0,2004].$$

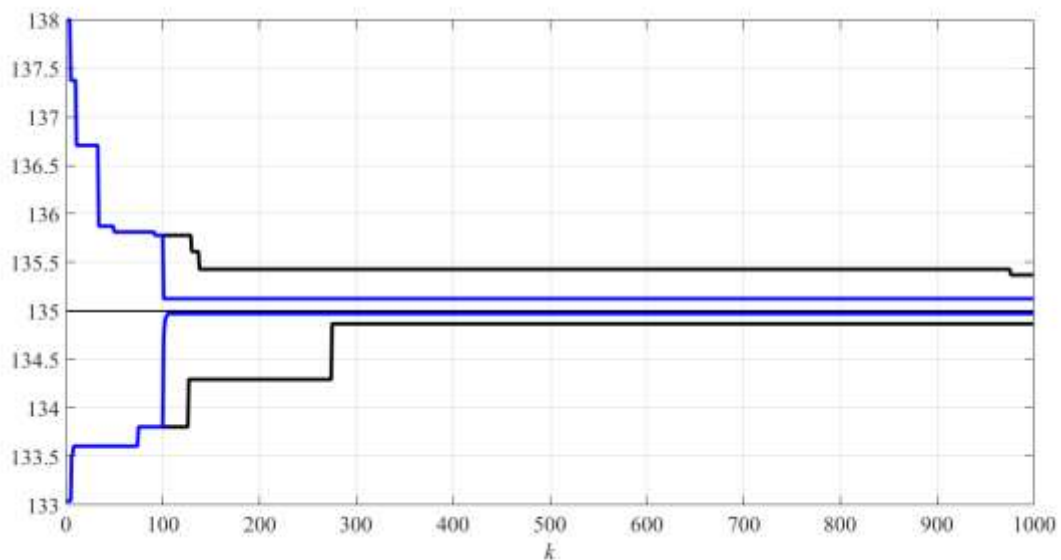


Рис. 3.12. Интервальные оценки значения постоянного тока (черным цветом обозначены результаты неадаптивного минимаксного фильтра, синим – результаты адаптивного минимаксного фильтра).

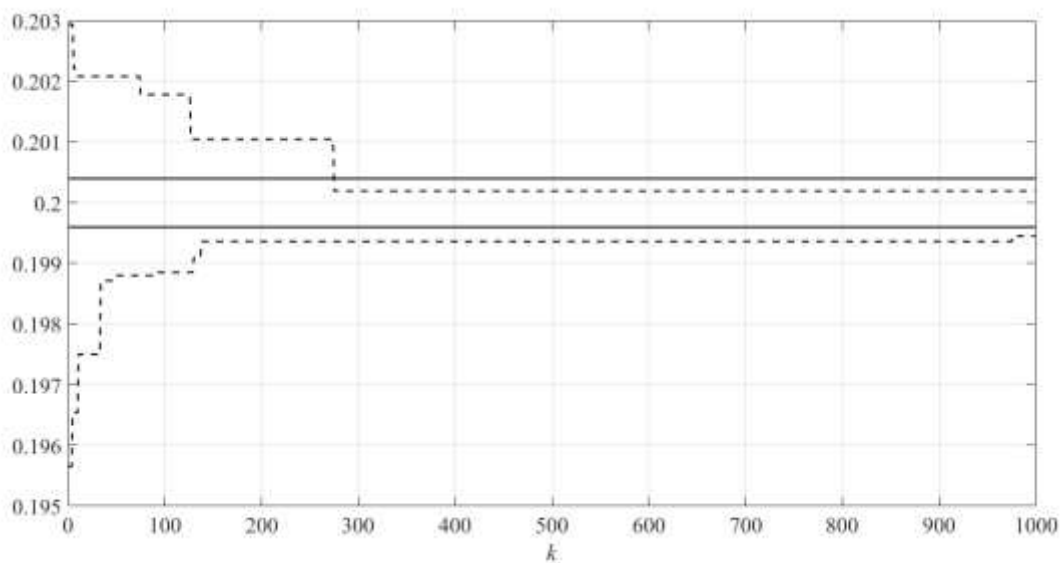


Рис. 3.13. Интервальные оценки значения сопротивления (сплошной линией обозначены  $R_{изм} \in [0,1996; 0,2004]$ , пунктиром - оценки неадаптивного минимаксного фильтра).

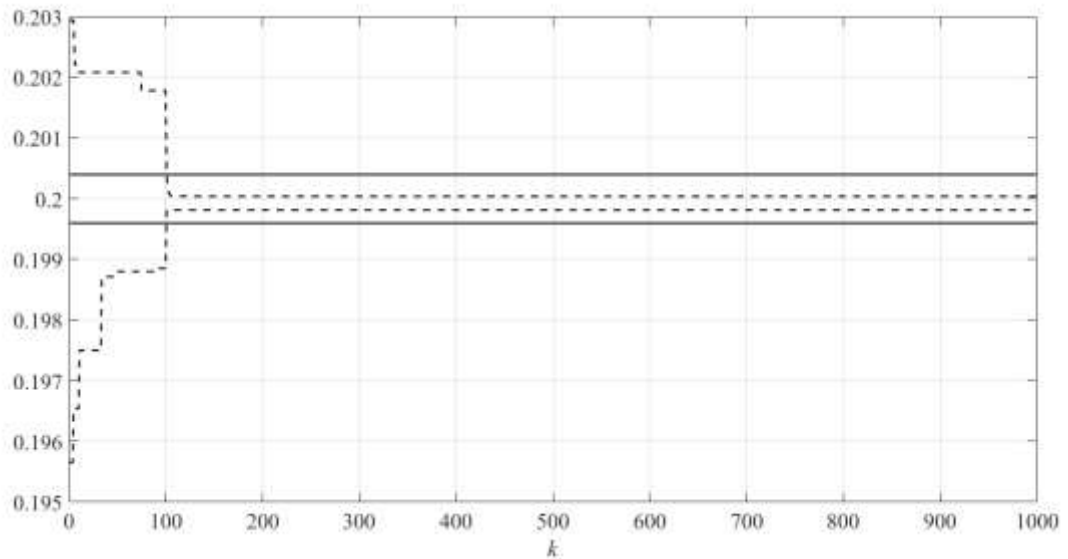


Рис. 3.14. Интервальные оценки значения сопротивления (сплошной линией обозначены  $R_{изм} \in [0,1996; 0,2004]$ , пунктиром - оценки адаптивного минимаксного фильтра).

Адаптивный алгоритм обеспечивает заданную (0,2%) точность измерения сопротивления на 0,1 с., а неадаптивный на 0,13 с., в то время как неадаптивный алгоритм на рассматриваемом интервале наблюдений не обеспечивает заданной точности.

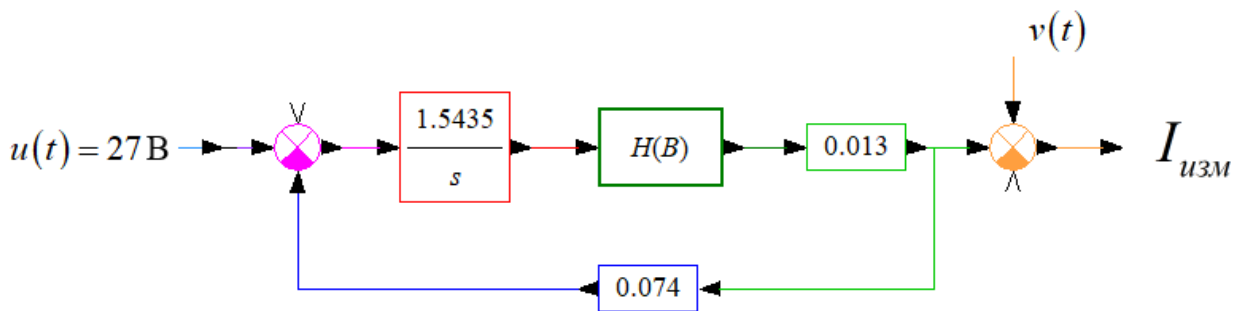


Рис. 3.15. Структурная схема вторичной обработки трансформатора.

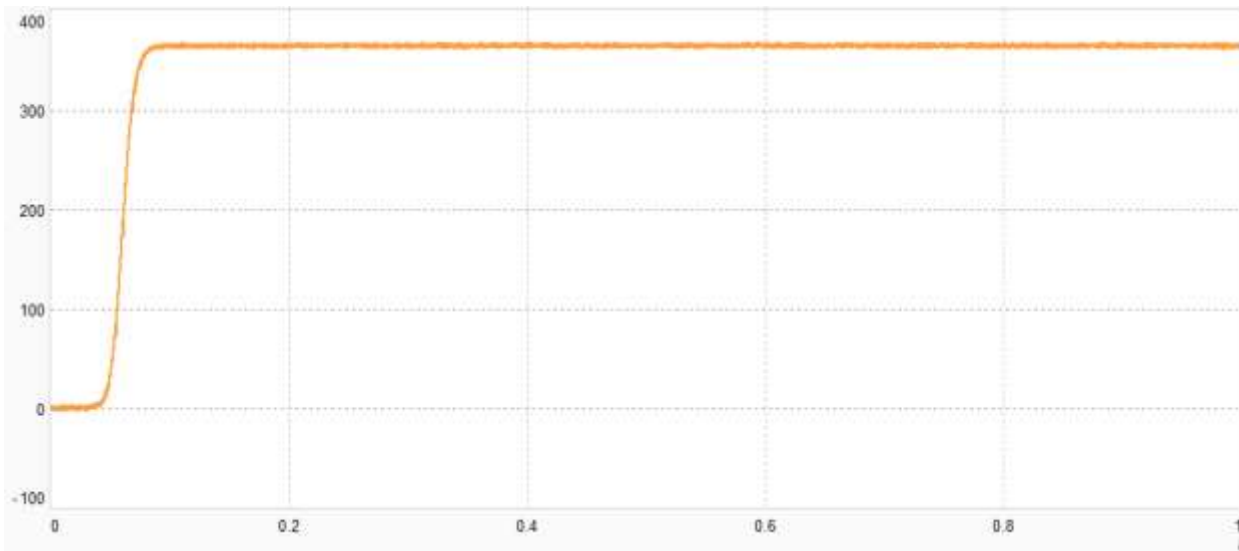


Рис. 3.16. Изменения тока.

Значение тока устанавливается на 0,09 с.

На рис. 3.17–3.19 представлены результаты адаптивного и неадаптивного оценивания.

Истинное значение тока  $I = 364,8648$  А.

Сопротивление первичной обмотки  $R = 0,074$  Ом.

Значение измеренного сопротивления с допустимой погрешностью, не превышающей 0,2% должно принадлежать интервалу

$$R_{изм} \in [0,073852; 0,074148].$$

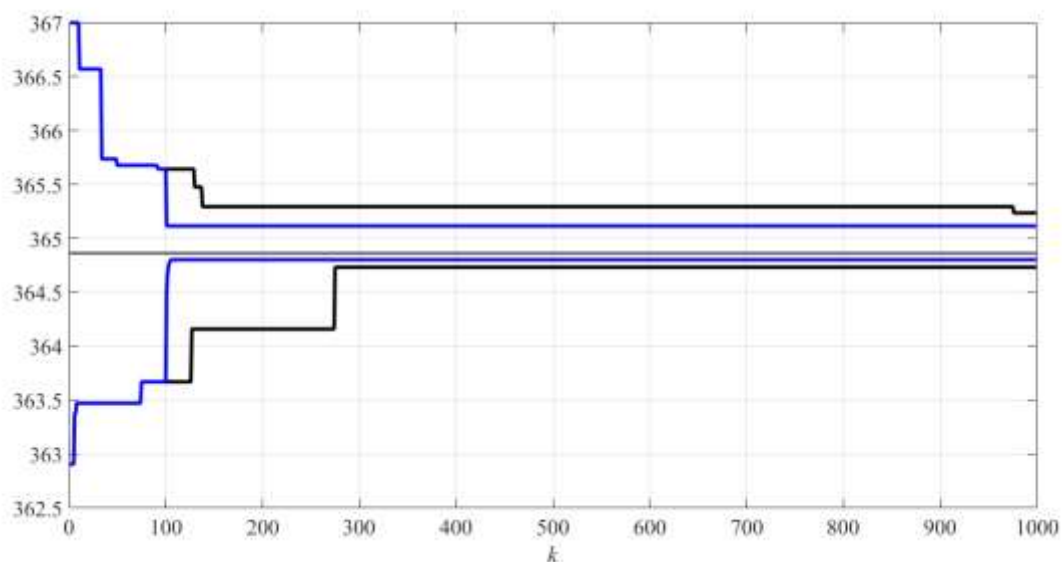


Рис. 3.17. Интервальные оценки значения постоянного тока (черным цветом обозначены результаты неадаптивного минимаксного фильтра, синим – результаты адаптивного минимаксного фильтра).

|      |      |          |         |      |
|------|------|----------|---------|------|
|      |      |          |         |      |
| Изм. | Лист | № докум. | Подпись | Дата |

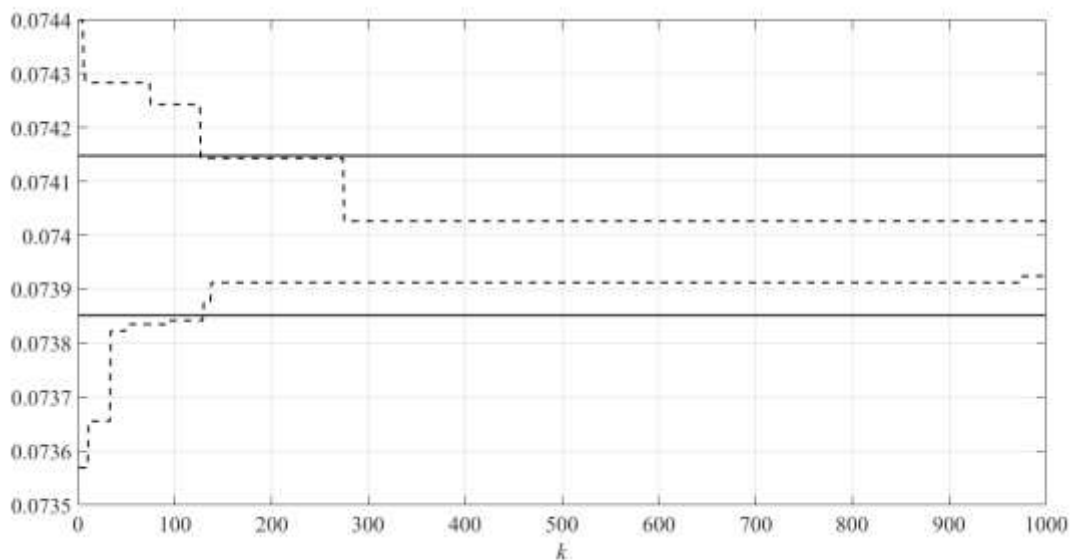


Рис. 3.18. Интервальные оценки значения сопротивления (сплошной линией обозначены  $R_{izm} \in [0,1996; 0,2004]$ , пунктиром - оценки неадаптивного минимаксного фильтра).

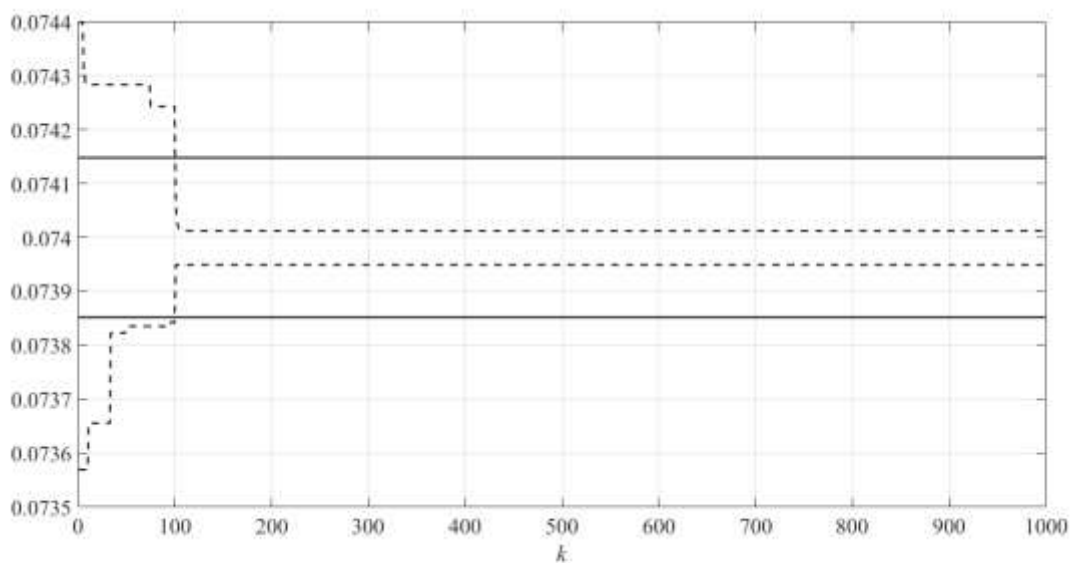


Рис. 3.19. Интервальные оценки значения сопротивления (сплошной линией обозначены  $R_{izm} \in [0,1996; 0,2004]$ , пунктиром - оценки адаптивного минимаксного фильтра).

В случае вторичной обмотки трансформатора, и неадаптивный и адаптивный алгоритмы обеспечивают заданную (0,2%) точность измерения сопротивления. Адаптивный алгоритм обеспечивает заданную точность на 0,1 с., а неадаптивный на 0,13 с.

|      |      |          |         |      |
|------|------|----------|---------|------|
|      |      |          |         |      |
| Изм. | Лист | № докум. | Подпись | Дата |

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа посвящена задаче адаптивного гарантированного оценивания состояния линейных динамических систем в условиях неопределенности.

Определены условия, в которых возможна адаптация алгоритма гарантированного оценивания к ошибкам измерений.

Предложен подход к построению адаптивного алгоритма гарантированного оценивания, который заключается в описании ошибок измерений с помощью формирующих фильтров. Предложен гарантированный подход к оценке параметров фильтра. При таком подходе осуществляется апостериорное информационное доопределение неизвестных помех, математическая модель которых используется в уравнениях гарантированного алгоритма с целью повышения точности решения задачи фильтрации. Предполагается, что математическая модель, оценка параметров которой осуществляется по результатам  $N$  наблюдений, достаточно точно описывает динамику неизвестных помех на рассматриваемом интервале. При поступлении следующего измерения ширина интервала, используемого для оценивания параметров модели, регулируется. После обработки  $(N + 1)$ -го измерения ширина интервала наблюдений, используемого для оценивания параметров модели, регулируется, т.е. можно расширить интервал на это измерение или сохранить его ширину  $N$ , откинув первое измерение. В последнем случае осуществляется итеративное линейное оценивание параметров стохастической составляющей ряда с шириной «скользящего» интервала наблюдений.

Предложен подход к построению адаптивного алгоритма гарантированного оценивания, который заключается в статистической обработке априорных и апостериорных невязок измерений и ошибок оценивания.

Приведены результаты имитационного моделирования, подтверждающие эффективность разработанных алгоритмов.

|      |      |          |         |      |                         |      |
|------|------|----------|---------|------|-------------------------|------|
|      |      |          |         |      | 09.06.01.2019.157.00 ПЗ | Лист |
|      |      |          |         |      |                         | 47   |
| Изм. | Лист | № докум. | Подпись | Дата |                         |      |

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Alamo, T. A new approach for guaranteed state estimation by zonotopes / T. Alamo, V.T.H. Le, E.F. Camacho, C. Stoica, D. Dumur // IFAC Proceedings Volumes. – 2011. – Vol. 44, Issue 1. – P. 9242–9247.
2. Alamo, T. A new approach for guaranteed ellipsoidal state estimation / T. Alamo, S. Ben Chabane, C. Stoica Maniu, E.F. Camacho, D. Dumur // IFAC Proceedings Volumes. – 2014. – Vol. 47, Issue 3. – P. 6533–6538.
3. Александров, В.М. Минимаксный подход к решению задачи обработки информации / В.М. Александров // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1966. – № 5. – С. 124–136.
4. Алешин, Б.С. Ориентация и навигация подвижных объектов: современные информационные технологии / Б.С. Алешин, А.А. Афонин, К.К. Веремеенко. – М.: Физматлит, 2006. – 424 с.
5. Ананьев, Б.И. Минимаксная линейная фильтрация многошаговых процессов с неопределенными распределениями возмущений / Б.И. Ананьев // Автоматика и телемеханика. – 1993. – № 10. – С. 131–139.
6. Бажинов, И.К. Оптимальное планирование навигационных измерений в космическом полете / И.К. Бажинов, В.Н. Почукаев. – М.: Машиностроение, 1976. – 288 с.
7. Бакан, Г.М. Решение задачи наблюдения дискретных систем методом эллипсоидов с неполным шагом / Г.М. Бакан, Н.Г. Сальникова // Проблемы управления и информатики. – 1994. – №3–4. – С. 3–13.
8. Бакан, Г.М. Оптимизация алгоритмов гарантированного оценивания состояний динамических систем / Г.М. Бакан // Автоматика и телемеханика. – 2000. – №10. – С. 27–36.
9. Барабанов, А.Е. Адаптивная фильтрация при неизвестной интенсивности возмущений и шумов измерений / А.Е. Барабанов, Ю.А. Лукомский, А.Н. Мирошников // Автоматика и телемеханика. – 1992. – № 11. – С. 93–101.
10. Барабанов, А.Е. Линейная фильтрация с адаптивной подстройкой матриц ковариаций возмущений в объекте и шумов измерения / А.Е. Барабанов // Автоматика и телемеханика. – 2016. – № 1. – С. 30–49.
11. Бахшиян, Б.Ц. Определение и коррекция движения. Гарантирующий подход / Б.Ц. Бахшиян, Р.Р. Назиров, П.Е. Эльясберг. – М.: Наука, 1980. – 360 с.
12. Bertsekas, D.P. On the minmax reachability of target set and target tubes / D.P. Bertsekas, I.B. Rhodes // Automatica. – 1971. – Vol. 7. – P. 233–247.



13. Bertsekas, D.P. Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty / D.P. Bersekas, I.B. Rhodes // IEEE Trans. Automat. Control. – 1971. – Vol. 16. – P. 117–128.
14. Blanchini, F. Set-theoretic methods in control / F. Blanchini, S. Miani. – 2<sup>nd</sup> Edition. – Springer International Publishing, Switzerland, 2015. – 640 p.
15. Богуславский, И.А. Прикладные задачи фильтрации и управления / И.А. Богуславский. – М.: Наука, 1983. – 401с.
16. Бокс, Дж. Анализ временных рядов, прогноз и управление. Под ред. В.Ф. Писаренко / Дж. Бокс, Г. Дженкинс. – М.: Мир, 1974. – 406 с., 197 с.
17. Брайсон, А. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо Ю-Ши. – М.: Мир, 1972. – 544 с.
18. Wiener, N. Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications / N. Wiener. – John Wiley and Sons, Inc., New York, 1949. – 171 p.
19. Волосов, В.В. Разработка и исследование робастных алгоритмов гарантированного эллипсоидального оценивания состояния многомерных линейных дискретных динамических систем. Часть I / В.В. Волосов, Л.И. Тютюнник // Проблемы управления и информатики. – 1997. – № 4. – С. 31–43. Часть II. – Проблемы управления и информатики. – 1997. – № 6. – С. 52–65.
20. Гаджиев, Ч.М. Диагностирование динамических систем по обновляющей последовательности фильтра Калмана / Ч.М. Гаджиев // Автоматика и телемеханика. – 1992. – № 1. – С. 180–183.
21. Джанджгава, Г.И. Инерциальная навигация и адаптивно-робастная фильтрация / Г.И. Джанджгава, А.В. Чернодаров // Авиакосмическое приборостроение. – 2015. – № 8. – С. 19–29.
22. Дмитриевский, А.А. Прикладные задачи теории оптимального управления движением беспилотных летательных аппаратов / А.А. Дмитриевский, Л.Н. Лысенко. – М.: Машиностроение, 1978.
23. Иргер, Д.С. Об оптимальной фильтрации по минимаксному критерию / Д.С. Иргер // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1966. – № 5. – С. 137–144.
24. Calafiore, G. Minimum variance estimation with uncertain statistical model / G. Calafiore, El Chaoui L. // Proc. IEEE CDC. – 2001. – P. 3497–3499.
25. Kalman, R.E. A new approach to linear filtering and prediction problems / R.E. Kalman // Journal of Basic Engineering. – 1960. – Vol. 82 (1). – P. 35–45.
26. Kalman, R.E. New results in linear filtering and prediction theory / R.E. Kalman, R.S. Bucy // Journal of Basic Engineering. – 1961. – Vol. 83. – P. 95–108.

27. Калман, Р.Е. Идентификация систем с шумами / Р.Е. Калман // Успехи мат. наук. – 1985. – Т.40, вып. 4(244). – С. 27–41.
28. Кац, И.Я. Минимаксное оценивание в многошаговых системах / И.Я. Кац, А.Б. Куржанский // Докл. АН СССР. – 1975. – Т.221, №3. – С. 535–538.
29. Кац, И.Я. Минимаксная многошаговая фильтрация в статистически неопределенных ситуациях / И.Я. Кац, А.Б. Куржанский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – №11. – С. 79–87.
30. Кейн, В.М. Оптимизация систем управления по минимаксному критерию / В.М. Кейн. – М.: Наука, 1985. – 248 с.
31. Коган, М.М. Оптимальное оценивание и фильтрация при неизвестных ковариациях случайных факторов / М.М. Коган // Автоматика и телемеханика. – 2014. – № 11. – С. 88–109.
32. Коган, М.М. Робастное оценивание и фильтрация в неопределенных системах при неизвестных ковариациях / М.М. Коган // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 10. – С. 50–66.
33. Колмогоров, А.Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей / А.Н. Колмогоров // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1941. – Т. 5, № 1. – С. 3–14.
34. Костоусова, Е.К. Об ограниченности внешних полиэдральных оценок множеств достижимости линейных систем / Е.К. Костоусова // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. – 2008. – Т. 48, № 6. – С. 974–989.
35. Кощеев, А.С. Адаптивное оценивание эволюции многошаговых систем в условиях неопределенности / А.С. Кощеев, А.Б. Куржанский // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1983. – № 2. – С.72–93.
36. Красовский, Н.Н. Теория управления движением. Линейные системы / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
37. Красовский, Н.Н. Об управлении при неполной информации / Н.Н. Красовский // Прикладная математика и механика. – 1976. – Т. 40, вып. 2. – С. 197–206.
38. Красовский, Н.Н. Современные проблемы оптимизации и устойчивости неопределенных и стохастических систем / Н.Н. Красовский, А.Б. Куржанский, А.И. Кибзун // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 10. – С. 3–4.
39. Кузовков, Н.Т. Инерциальная навигация и оптимальная фильтрация / Н.Т. Кузовков, О. С. Салычев. – М.: Машиностроение, 1982. – 261 с.
40. Кумков, С.И. Информационные множества в задача импульсного управления / С.И. Кумков, В.С. Пацко // Автоматика и телемеханика. – 1997. – № 7. – С. 195–206.

41. Кумков, С.И. Интервальное оценивание параметров движения самолета в условиях сильного искажения измерений / С.И. Кумков, А.А. Федотов // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 2. – С. 112–127.
42. Кунцевич, В.М. О точности построения аппроксимирующих моделей при ограниченных помехах измерений / В.М. Кунцевич // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 5. – С. 125–133.
43. Кунцевич, В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации / В.М. Кунцевич. – К.: Наукова думка, 2006. – 264 с.
44. Кунцевич, В.М. Эллипсоидальные и интервальные оценки вектора состояния семейств линейных и нелинейных дискретных динамических систем / В.М. Кунцевич, В.В. Волосов // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – Т.51, № 1. – С. 73–84.
45. Куржанский, А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности / А.Б. Куржанский. – М.: Наука, 1977. – 392 с.
46. Куржанский, А.Б. Минимаксная фильтрация при квадратичных ограничениях. I / А.Б. Куржанский, И.Я. Пищулина // Дифференц. Уравнения. – 1976. – Т. 12, № 8. – С. 1434–1446.
47. Куржанский, А.Б. Задача идентификации – теория гарантированных оценок / А.Б. Куржанский // Автоматика и телемеханика. – 1991. – №4. – С. 3–26.
48. Куржанский, А.Б. Управление эллипсоидальными траекториями / А.Б. Куржанский, А.И. Месяц // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – № 54:3. – С. 404–414.
49. Куркин, О. Минимаксная обработка информации / О. Куркин, С. Шаталов, Ю. Коробочкин. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 216 с.
50. Лычак, М.М. Идентификация и оценивание состояния объектов управления на основе множественного подхода / М.М. Лычак // Проблемы управления и информатики. – 1999. – № 5. – С. 34–41.
51. Майборода, Л.А. Атмосфера и управление движением летательных аппаратов / Л.А. Майборода, Е.П. Школьный. – М.: Гидрометеиздат, 1973. – 307 с.
52. Матасов, А.И. Метод гарантирующего оценивания / А.И. Матасов. – М.: Изд-во МГУ, 2009. – 100 с.
53. Малышев, В.В. Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами / В.В. Малышев, А.И. Кибзун. – М.: Машиностроение, 1987. – 304 с.
54. Малышев, В.В. Оптимизация наблюдения и управления летательных аппаратов / В.В. Малышев, М.Н. Красильщиков, В.И. Карлов. – М.: Машиностроение, 1989. – 312 с.

|      |      |          |         |      |                         |      |
|------|------|----------|---------|------|-------------------------|------|
|      |      |          |         |      | 09.06.01.2019.157.00 ПЗ | Лист |
|      |      |          |         |      |                         | 51   |
| Изм. | Лист | № докум. | Подпись | Дата |                         |      |

55. Малютин, Ю.М. Применение ЭВМ для решения задач идентификации объектов / Ю.М. Малютин, А.В. Экало. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988. – 256 с.
56. Mehra, R.K. On the identification of variances and adaptive Kalman filtering / R.K. Mehra // IEEE Trans. Automat. Control. – 1970. – Vol AC–15, No 2. – P. 175–184.
57. Овсеевич, А.И. Сравнение стохастического и гарантированного подходов к оцениванию состояния динамических систем / А.И. Овсеевич, Ю.В. Ким, Ю.Н. Решетняк // Техническая кибернетика. – 1992. – № 2. – С. 87–94.
58. Овсеевич, А.И. К вопросу о сопоставлении вероятностного и гарантированного подходов к прогнозу фазового состояния динамических систем / А.И. Овсеевич, А.М. Шматков / Изв. АН. Теория и системы управления. – 1997. – № 4. – С. 11–16.
59. Овсеевич, А.И. Сравнение интервальных и эллипсоидальных оценок погрешности векторных операций / А.И. Овсеевич, Ю.В. Тарабанько, Ф.Л. Черноусько // Докл. АН. – 2005. – Т. 400, № 6. – С. 739–743.
60. Осипов, Ю.С. Некоторые алгоритмы динамического восстановления входов / Ю.С. Осипов, А.В. Кряжимский, В.И. Максимов // Труды ИММ УрО РАН. – 2011. – Т. 17, № 1. – С. 129–161.
61. Первачев, С.В. Адаптивная фильтрация сообщений / С.В. Первачев, А.И. Перов. – М.: Радио и связь, 1991. – 160 с.
62. Пугачев, В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления / В.С. Пугачев. – М.: Физматлит, 1960. – 883 с.
63. Пупков, К.А. Высокоточные системы самонаведения: расчет и проектирование. Вычислительный эксперимент / К.А. Пупков, Н.Д. Егупов, Л.В. Колесников, Д.В. Мельников, А.И. Трофимов. – М.: Физматлит, 2011. – 512 с.
64. Poor, H.V. Minimax state estimation for linear stochastic systems with noise uncertainty / H.V. Poor, D.P. Looze // IEEE Trans. Automat. Control. – 1981. – Vol 26. – P. 902–906.
65. Разоренов, Г.Н. Декомпозируемость линейных динамических систем / Г.Н. Разоренов // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 1. – С. 12–16.
66. Разыграев, А.П. Основы управления полетом космических аппаратов / А.П. Разыграев. – М.: Машиностроение, 1990. – 480 с.
67. Ривкин, С.С. Метод оптимальной фильтрации Калмана и его применение в инерциальных навигационных системах. Часть I. Математические основы и вопросы реализации МОФК / С.С. Ривкин. – Л.: Судостроение, 1973. – 144 с.
68. Рябова-Орешкова, А.П. К вопросу линейной фильтрации на ЦВМ / А.П. Рябова-Орешкова // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1969. – № 3.

69. Рябова-Орешкова, А.П. Об устойчивости фильтров Калмана / А.П. Рябова-Орешкова // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1970. – № 5. – С. 203–212.
70. Салычев, О.С. Волновое описание возмущений в задачах оценки ошибок инерциальных систем навигации / О.С. Салычев. – М.: Машиностроение, 1992. – 216 с.
71. Сальников, Н.Н. Решение задачи оценивания состояния статического объекта с использованием алгоритма построения эллипсоидальных оценок / Н.Н. Сальников // Автоматика. – 1986. – №3. – С. 42–48.
72. Сальников, Н.Н. Эллипсоидальное оценивание состояний и параметров динамической системы при отсутствии априорной информации об оцениваемых величинах / Н.Н. Сальников // Проблемы управления и информатики. – 2014. – №2. – С. 144–156.
73. Sage, A.P. System Identification / A.P. Sage, J.L. Melsa. – Academic Press Inc., New York, 1970.
74. Sage, A.P. Estimation theory with applications to communications and control / A.P. Sage, J.L. Melsa. – McGraw Hill, New York, 1971.
75. Sayed, A.H. Framework for state-space estimation with uncertain models / A.H. Sayed / IEEE Trans. Automat. Control. – 2001. – Vol 46. – P. 998–1013.
76. Семенихин, К.В. Минимаксная идентификация обобщенной неопределенностохастической линейной модели / К.В. Семенихин, А.Р. Панков // Автоматика и телемеханика. – 1998. – № 11. – С. 158–171.
77. Семенихин, К.В. Минимаксная линейная фильтрация случайных последовательностей с неточно заданной ковариационной функцией / К.В. Семенихин // Автоматика и телемеханика. – 2016. – № 2. – С. 50–68.
78. Семушин, И.В. Контроль оптимальности адаптивного фильтра Калмана по реализации скалярного процесса / И.В. Семушин // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1979. – № 6. – С. 195–198.
79. Способ измерения сопротивления постоянному току: патент РФ № 2653173 / Г.И. Волович, опубл. 18.05.2018, бюл. № 16.
80. Степанов, О.А. Рекуррентное оценивание и фильтрация: предыстория и современное состояние / О.А. Степанов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2010. – №12. – С. 10–16.
81. Тарасов, Н.Н. Управление подводным аппаратом при неполной информации о модели движения и внешних возмущений / Н.Н. Тарасов, С.К. Данилова, И.М. Кусков // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2016. – Т. 17, № 5. – С. 354–359.

82. Тимофеева, Г.А. Оптимальные доверительные множества для статистически неопределенных систем / Г.А. Тимофеева // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 11. – С. 84–95.
83. Уханов, М.В. Алгоритмы построения информационных множеств для реализации минимаксного фильтра / М.В. Уханов, В.И. Ширяев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2002. – № 3. – С. 19–33.
84. Фомин, В.Н. Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация / В.Н. Фомин. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
85. Филимонов, Н.Б. Идентификация состояния и внешней среды дискретных динамических объектов методом полиэдрального программирования / Н.Б. Филимонов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2003. – № 2. – С. 11–15.
86. Филимонов, Н.Б. Проблема качества процессов управления: смена оптимизационной парадигмы // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2012. – № 12. – С. 2–9.
87. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / Я. Бар-Шалом, Г. Бреввер, С. Джонсон и др.; под ред. К.Т. Леондеса. – М.: Мир, 1980. – 407 с.
88. Khadanovich, D. On the estimation of measurement errors in linear dynamical systems / D. Khadanovich, V. Shiryaev // Proceedings of 3rd Russian Conference “Mathematical Modeling and Information Technologies” (ММИТ 2016). – 2016. – Vol. 1825. – P. 35–43.
89. Хаданович, Д.В. К задаче оценивания ошибок измерений в системах управления при неполной информации / Д.В. Хаданович, В.И. Ширяев // Вестник ЮУрГУ. Серия: компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2018. – Т. 18, № 4. – С. 25–40.
90. Khadanovich, D.V. To the problem of adaptive guaranteed estimation / D.V. Khadanovich, V.I. Shiryaev // IFAC-PapersOnLine. – 2018. – Vol. 51, Issue 32. – P. 717–722.
91. Черноусько, Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов / Ф.Л. Черноусько. – М.: Наука, 1988. – 320 с.
92. Chernousko, F.L. Minimax control for a class of linear systems subject to disturbances / F.L. Chernousko // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2005. – Vol. 127, No 3. – P. 535–548.
93. Чураков, Е.П. Прогнозирование эконометрических временных рядов / Е.П. Чураков. – М.: Финансы и статистика, 2008. – 208 с.
94. Шалыгин, А.С. Методы моделирования ситуационного управления движением беспилотных летательных аппаратов. Под ред. А.В. Ноздрачева и Л.Н.

|      |      |          |         |      |                         |      |
|------|------|----------|---------|------|-------------------------|------|
|      |      |          |         |      | 09.06.01.2019.157.00 ПЗ | Лист |
|      |      |          |         |      |                         | 54   |
| Изм. | Лист | № докум. | Подпись | Дата |                         |      |

- Лысенко / А.С. Шалыгин, Л.Н. Лысенко, О.А. Толпегин. – М.: Машиностроение, 2012. – 584 с.
95. Schweppe, F.C. Recursive state estimation: unknown but bounded error and system inputs / F.C. Schweppe // IEEE Trans. Automat. Control. – 1968. – AC–13, №1. – P. 22–28.
  96. Schweppe, F.C. Uncertain dynamic systems / F.C. Schweppe. – Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1973. – 563 p.
  97. Ширяев, В.И. Синтез управления линейными системами при неполной информации / В.И. Ширяев // Изв. РАН. Техническая кибернетика. – 1994. – № 3. – С. 229–237.
  98. Ширяев, В.И. Алгоритмы управления динамическими системами в условиях неопределенности / В.И. Ширяев // Мехатроника. – 2001. – № 8. – С. 2–5.
  99. Ширяев, В.И. Об аппроксимации информационных множеств в задаче гарантированного оценивания состояния линейных динамических систем / В.И. Ширяев, Е.О. Подивилова // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2014. – № 7. – С. 10–16.
  100. Ширяев, В.И. О гарантированном оценивании возмущений в линейных динамических системах / В.И. Ширяев, Е.Д. Ильин // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2014. – № 9. – С. 12–16.
  101. Širyaev, A.N. Minimax weights in a trend detection problem for a stochastic process / A.N. Širyaev, I.L. Legostaeva // Theory of Probability and its Applications. – 1971. – Vol. 16 (2). – P. 344–349.
  102. Шильман, С.В. Итеративное линейное оценивание с регулируемым объемом информации / С.В. Шильман // Автоматика и телемеханика. – 1983. – № 5. – С. 90–98.
  103. Шильман, С.В. Адаптивно-оптимальная фильтрация случайных процессов / С.В. Шильман // Автоматика и телемеханика. – 1986. – № 2. – С. 113–126.
  104. Шильман, С.В. Адаптивное, предельно оптимальное прогнозирование временных рядов при неизвестных значениях ковариационных функций / С.В. Шильман // Докл. АН. – 1993. – Т. 331, № 2. – С. 161–164.
  105. Шматков, А.М. Сопоставление стохастического и эллипсоидального оценивания неопределенности для динамической системы с возмущениями, ограниченными по величине / А.М. Шматков // Докл. АН. – 2006. – Т. 411, № 4. – С. 460–463.
  106. Шматков, А.М. Построение аналога фильтра Калмана для гарантированной оценки состояния динамической системы / А.М. Шматков // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2011. – № 5. – С. 33–40.

107. Шориков, А.Ф. Минимаксные фильтры для оценивания состояния нелинейных дискретных систем / А.Ф. Шориков // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 4. – С. 112–122.
108. Шориков, А.Ф. Алгоритм решения задачи апостериорного минимаксного оценивания состояний дискретных динамических систем. II / А.Ф. Шориков // Автоматика и телемеханика. – 1996. – № 9. – С. 139–150.
109. Эльясберг, П.Е. Определение движения по результатам измерений / П.Е. Эльясберг. – М.: Наука, 1976. – 416 с.
110. Jazwinski, A.H. Stochastic processes and filtering theory / A.H. Jazwinski. – New York, Academic Press, 1970.
111. Язвинский, А.Г. Метод адаптивного оценивания / А.Г. Язвинский. – Управление в пространстве. Том 2. – М.: Наука, 1975. – С. 38–42.

|      |      |          |         |      |                         |      |
|------|------|----------|---------|------|-------------------------|------|
|      |      |          |         |      | 09.06.01.2019.157.00 ПЗ | Лист |
|      |      |          |         |      |                         | 56   |
| Изм. | Лист | № докум. | Подпись | Дата |                         |      |