

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования  
«Южно-Уральский государственный университет»  
(национальный исследовательский университет)  
Факультет «Математики, механики и компьютерных наук»  
Кафедра «Вычислительной механики»

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_ /Ю.М. Ковалев

\_\_\_\_\_ 2019 г.

**Трёхмерное моделирование газодинамических процессов**

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА К ВЫПУСКНОЙ  
КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ  
ЮУрГУ – 01.03.03.2019.129-05 ПЗ ВКР

Руководитель,

ст. преподаватель

\_\_\_\_\_ / Пигасов Е.Е.

\_\_\_\_\_ 2019 г.

Автор работы студент группы

ЕТ-410

\_\_\_\_\_ /А.А. Галка

\_\_\_\_\_ 2019 г.

Нормоконтролер

к.ф.-м.н., доцент

\_\_\_\_\_ /Н.Л. Клиначева

\_\_\_\_\_ 2019 г.

Челябинск, 2019

## АННОТАЦИЯ

Галка А.А. Трёхмерное моделирование газодинамических процессов, модифицированным методом крупных частиц. – Челябинск: ЮУрГУ, ЕТ-410, 64 с., ил.17, библиогр. Список – 9 наименований.

Данная работа посвящена реализации численного алгоритма для решения задач в трёхмерной постановке.

В данном дипломном проекте проведён анализ методов численного моделирования ударно-волновых течений.

Произведено обобщение МКЧ на трёхмерный случай, разработан вычислительный алгоритм для решения задач, выполнена программная реализация, использующая ООП.

Проведена верификация программы, произведены расчёты для двух классических задач обтекания тел в трёхмерной постановке.

## Оглавление

1. Обзор литературы.....	6
2. Постановка задачи.....	8
3. Численный метод.....	10
3.1 Идея метода.....	10
3.2 Разностная схема.....	13
3.3 Модификация численного метода.....	16
3.4 Программная реализация.....	19
3.5 Верификация.....	22
4. Обтекание.....	25
4.1 Обтекание шара конечного объёма.....	25
4.2 Обтекание пули конечного объёма.....	28
5. Заключение.....	29
6. Список литературы.....	30
7. Листинг программы.....	31

## Введение

Математическое моделирование уже многие десятилетия является неотъемлемой частью, как теоретического научного познания, так и практики высокотехнологичных промышленных разработок. Постоянно возрастающие мощности вычислительных машин все сильнее укрепляют роль математического моделирования и расширяют спектр его применения.

## Актуальность

Существует множество задач, решение которых аналитическими методами невозможно или сопряжено с принятием множества допущений, ставящих под вопрос адекватность полученного результата реальным физическим процессам. Проведение экспериментов так же не всегда является возможным, как по причине их высокой стоимости, так и в силу возможных фундаментальных или законодательных ограничений. В таких ситуациях математическое моделирование становится главным, а иногда и единственным инструментом исследования.

Современные вычислительные мощности позволяют переходить к более детальному моделированию физических процессов, учитывающему большее число факторов, влияющих на результат и уменьшающему количество принимаемых допущений. Одна из таких возможностей – применение трехмерного моделирования газодинамических течений, что является актуальным для многих современных задач механики сплошных сред, связанных с протеканием процессов в областях сложной геометрической формы.

Для решения таких задач уже существует ряд программных комплексов, как коммерческих (Ansys, LS-DINA, FLOWVISION), так и свободно распространяемых, в том числе с открытым исходным кодом (OpenFOAM). Во всех этих комплексах реализованы универсальные решатели для многих задач механики сплошных сред. Однако, решение некоторых задач невозможно без выхода за рамки возможностей стандартных решателей, что требует применения

пользовательских функций с нестандартными алгоритмами или определенной модификаций кода. Пользовательские функции в коммерческих комплексах имеют ряд существенных ограничений, а модификация кода решателей невозможна, так как код является закрытым. Комплексы с открытым исходным кодом предоставляют широкие возможности модификации алгоритмов, но неоднородность написания различных модулей и почти полное отсутствие документации делают эту задачу весьма натривиальной. Так же для получения достоверных результатов необходимо проводить дополнительное тестирование отдельных частей вычислительных алгоритмов, что требует трудозатрат, сопоставимых с необходимыми для разработки собственных программных средств. В связи с этим разработка программ, реализующих вычислительные алгоритмы для трехмерного математического моделирования газодинамических течений является актуальной задачей.

Цели:

Программная реализация численного метода в трёхмерной постановке.

Задачи:

Программная реализация в трёхмерной постановке на основе тестовой задачи,

Решение классических задач об обтекании в трёхмерной постановке.

## 1. Обзор литературы

Газодинамические течения достаточно высокой интенсивности, происходящие в геометрических областях сложной формы могут содержать ударные волны. В случае течений в неидеальных средах вообще любая бегущая волна постепенно вырождается в ударную. Эти обстоятельства говорят о необходимости использования численных методов, способных корректно описывать соответствующие режимы течений, как гладкие течения, так и ударно-волновые.

Существует четыре метода расчета ударных волн: метод Неймана-Рихтмайера[1], метод Лакса[2], метод Годунова[3] и метод Куропатенко[4]. Основные идеи этих методов будут приведены ниже.

Так как нелинейность законов сохранения массы, количества движения и энергии приводит к возникновению в сплошной среде сильных разрывов – ударных волн. На таком сильном разрыве энтропия терпит скачок. В этом заключается принципиальное различие между ударными волнами и волнами с непрерывным течением.

К сильному разрыву с обеих сторон примыкают области, в которых все величины непрерывны. Для расчёта такой ударной волны её фронт заменяется отрезком конечной ширины, который, как правило, сравним с размерами одной расчётной ячейки. Такое свойство разностных законов сохранения называется дистракцией.

Поскольку состояние перед разрывом и за ним связаны ударной адиабатой, то в области дистракции разрыва должен действовать определенный механизм, обеспечивающий рост энтропии.

Идея метода Неймана-Рихтмайера состоит в том, что в дифференциальные уравнения движения и энергии добавляется искусственная вязкость, которая обеспечивает диссипацию энергии.

Основная идея метода Лакса заключается в том, чтобы необходимая диссипация энергии обеспечивалась главными членами погрешностей аппроксимации.

Идея метода Годунова заключается в следующем: все величины, характеризующие состояние среды, принимаются кусочно-постоянными в серединах интервалов. Таким образом, в узлах сетки находятся произвольные разрывы. Если течение непрерывное, то разрыв не распадается, если же разрывное – разрыв распадается на систему устойчивых разрывов: сильный, слабый и контактный. Так задача о расчете разрывного течения приводит к задаче о распаде произвольного разрыва.

Основная идея, лежащая в основе метода крупных Куропатенко, заключается в следующем. Все сеточные функции в интервалах внутри ударного слоя, считаются кусочно-постоянными. В этом случае на границах сеточных интервалов находятся разрывы. Анализ величин в интервалах, примыкающих к сеточному разрыву, позволяет определить величины перед разрывом и одну величину за разрывом. После этого находятся все величины за разрывом и скорость разрыва. Таким образом ударный слой в любой момент времени  $t^n$  представляет собой пакку следующих друг за другом ударных волн меньшей амплитуды.

Данные методы дают точную картину движения ударной волны, но их реализация в двумерной и трехмерной постановке является трудоемкой задачей из-за особенностей разностных схем.

Еще одним методом, находящим свое применение при расчете течений, содержащих ударные волны, является метод крупных частиц, изложенный в [5]. В качестве механизма диссипации энергии в базовом алгоритме предлагается использовать псевдовязкость, однако существуют модификации, реализующие другие подходы, например модификация Эйлера этапа изложенная в [6]. Метод не лишен недостатков, например, возникновения сильных осцилляций на фронте

при отражении ударных волн, но и имеет определенные достоинства. Он довольно прост в реализации и легко обобщается на трехмерный случай, а применение модифицированных алгоритмов позволяет свести осцилляции к приемлемым пределам.



## 2. Постановка задачи

В данной работе были рассмотрены две задачи:

### Задача 1.

Пусть в расчётной области, изображённой на рис.1 в момент времени  $t=0$ , образовалась ударная волна с параметрами в возмущенной области обозначенной красным цветом:  $P=60000000 \text{ Па}$ ,  $\rho=5.626 \text{ кг/м}^3$ ,  $V=2600 \text{ м/с}$ , параметры в невозмущенной области, обозначенной синим цветом :  $P=1000000 \text{ Па}$ ,  $\rho=1.21 \text{ кг/м}^3$ ,  $V=0 \text{ м/с}$ . В невозмущенной области располагается шар радиусом  $0.02 \text{ м}$ .

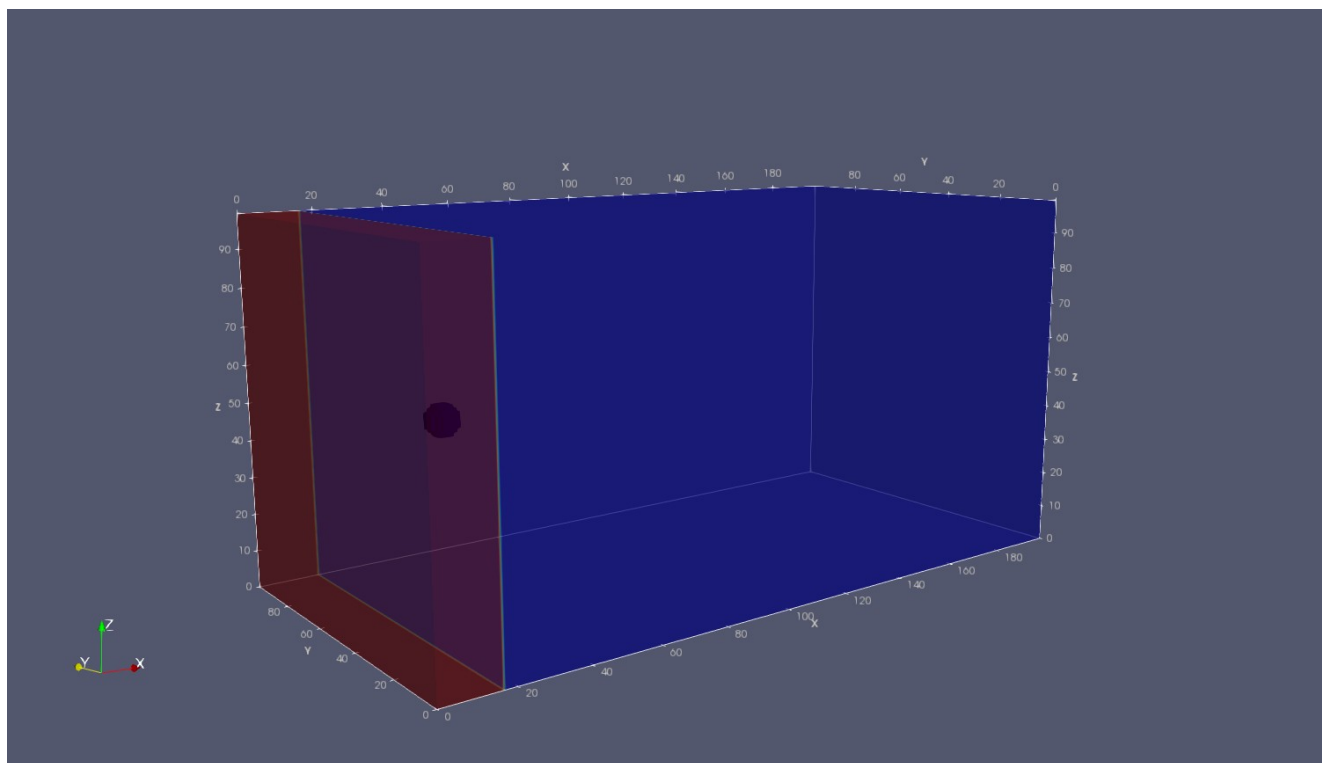


Рисунок 1 Расчётная область

### Задача 2.

Пусть в расчётной области изображённой на рис.2 в момент времени  $t=0$ , образовалась ударная волна с параметрами в возмущенной области обозначенной красным цветом:  $P=18000000 \text{ Па}$ ,  $\rho=5.626 \text{ кг/м}^3$ ,  $V=636 \text{ м/с}$ ,

параметры в невозмущенной области, обозначенной синим цветом :  
 $P=1200000 \text{ Па}$ ,  $\rho=1.21 \text{ кг/м}^3$ ,  $V=0 \text{ м/с}$ . В невозмущенной области располагается шар радиусом  $0.02 \text{ м}$ .

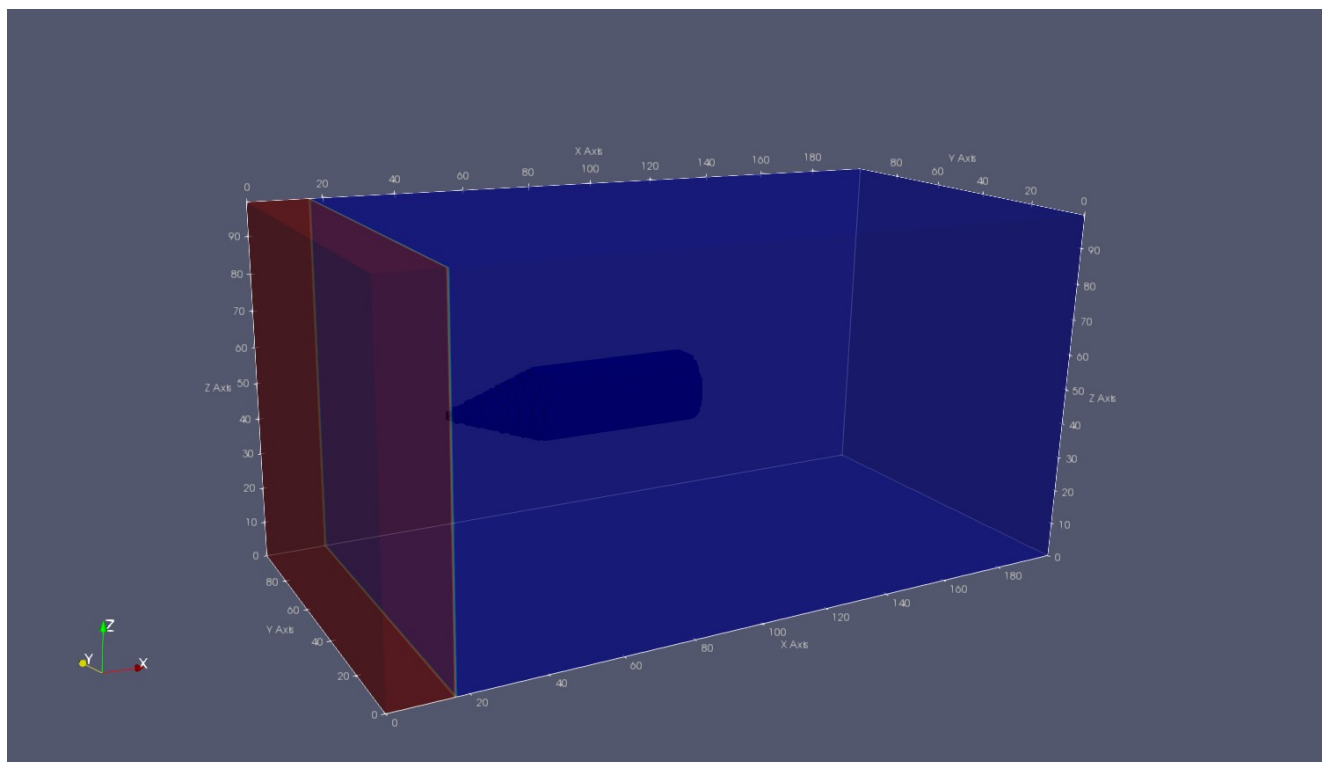


Рисунок 2 Расчётная область

### 3. Численный метод

#### 3.1 Идея метода

Идея метода крупных частиц состоит в расщепление по физическим процессам исходной нестационарной системы уравнений, записанной в форме Эйлера. Среда имеет вид системы, состоящей из крупных частиц, которые совпадают в текущий момент времени с ячейкой эйлеровой сетки. Расчёт каждого шага по времени разделяется на три основных этапа:

- I. **Эйлеров этап**, на котором пренебрегаем всеми эффектами, связанными с перемещением элементарной ячейки, и учитываем движение среды лишь за счёт давления; здесь для крупной частицы определяются промежуточные значения искомых параметров.
- II. **Лагранжев этап**, на котором вычисляются потоки массы, импульса, энергии через границы эйлеровых ячеек.
- III. **Заключительный этап**, на котором определяются окончательные значения газодинамических параметров на новом временном слое.

Для подробного рассмотрения всех этапов метода, запишем систему законов сохранения газовой динамики в форме Эйлера в дивергентном виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho W) &= 0, \\ \frac{\partial \rho u_x}{\partial t} + \text{div}(\rho u_x W) &= 0, \\ \frac{\partial \rho u_y}{\partial t} + \text{div}(\rho u_y W) &= 0, \\ \frac{\partial \rho u_z}{\partial t} + \text{div}(\rho u_z W) &= 0, \\ \frac{\partial \rho u_z}{\partial t} + \text{div}(\rho E W) + \text{div}(p W) &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Замыкается система уравнением состояния идеального газа

$$P = (\gamma - 1) \rho \left( E - \frac{(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)}{2} \right). \quad (2)$$

Где  $\rho$  – плотность,  $u_x, u_y, u_z$  – составляющие вектора скорости  $W$ ,  $E$  – удельная полная энергия,  $P$  – давление,  $\gamma$  – показатель адиабаты.

### 1. Эйлерав этап.

На этом этапе расчёта изменяются лишь величины, относящиеся к ячейке в целом, а среда предполагается заторможенной. Поэтому конвективные члены вида  $(\rho u_x W)$ ,  $(\rho u_y W)$ ,  $(\rho u_z W)$ , соответствующие эффектам перемещения, в системе (1) полагаются равными нулю. Из уравнения неразрывности, в частности, следует, что поле плотности будет заторможено, поэтому в оставшихся уравнениях (1) можно вынести  $\rho$  из под знака дифференциала и разрешить (1) относительно временных производных от  $u_x, u_y, u_z, E$ . Тогда

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\rho \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} + \dot{i}(pW) = 0.$$

### 2. Лагранжев этап.

Этот этап характеризует перемещение расчетных ячеек относительно среды – здесь вычисляются эффекты переноса, учитывающие обмен между ячейками при их перестройке на прежнюю эйлерову сетку, моделируется движение потока массы через границы эйлеровых ячеек и находятся смещения расчетных точек.

На этом этапе находятся потоки массы  $\Delta M^n$ , импульса  $\Delta p^n$ , энергии  $\Delta E^n$  за текущий временной шаг  $\Delta t$ .

### 3. Заключительный этап.

Здесь происходит перераспределение массы, импульса и энергии по пространству и определяются окончательные поля эйлеровых параметров потока на фиксированной сетке в момент времени  $t^{n+1}=t^n+\Delta t$ . Уравнения этого этапа представляют собой законы сохранения массы  $M$ , импульса  $p$  и полной энергии  $E$

$$M^{n+1} = M^n + \sum \Delta M_{zp}^n,$$

$$p^{n+1} = p^n + \sum \Delta p_{zp}^n,$$

$$E^{n+1} = E^n + \sum \Delta E_{zp}^n.$$

Здесь  $M_{zp}^n$ -масса среды, которая пересекла за время  $\Delta t$ , одну из границ рассматриваемой ячейки; суммирование производится по всем граням ячейки. Аналогичным образом понимаются  $\sum \Delta p_{zp}^n, \sum \Delta E_{zp}^n$ .

## 3.2 Разностная схема

1. Эйлерав этап.

Явные конечно-разностные уравнения имеют вид:

$$\tilde{u}_{xi,j,k}^n = u_{xi,j,k}^n - \left( \frac{p_{i+1/2,j,k}^n - p_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} \right) \frac{\Delta t}{\rho_{i,j,k}^n},$$

$$\tilde{u}_{yi,j,k}^n = u_{yi,j,k}^n - \left( \frac{p_{i,j+1/2,k}^n - p_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y} \right) \frac{\Delta t}{\rho_{i,j,k}^n},$$

$$\tilde{u}_{zi,j,k}^n = u_{zi,j,k}^n - \left( \frac{p_{i,j,k+1/2}^n - p_{i,j,k-1/2}^n}{\Delta z} \right) \frac{\Delta t}{\rho_{i,j,k}^n},$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{i,j,k}^n = E_{i,j,k}^n - \dot{\epsilon} & - \left[ \frac{p_{i+1/2,j,k}^n u_{xi+1/2,j,k}^n - p_{i-1/2,j,k}^n u_{xi-1/2,j,k}^n}{\Delta x} + \dot{\epsilon} \frac{p_{i,j+1/2,k}^n u_{yi,j+1/2,k}^n - p_{i,j-1/2,k}^n u_{yi,j-1/2,k}^n}{\Delta y} + \dot{\epsilon} \right. \\ & \left. + \frac{p_{i,j,k+1/2}^n u_{zi,j,k+1/2}^n - p_{i,j,k-1/2}^n u_{zi,j,k-1/2}^n}{\Delta z} \right] \frac{\Delta t}{\rho_{i,j,k}^n}. \end{aligned}$$

2. Лагранжев этап

Потоки массы определяются по формулам:

$$\Delta M_{xi+1/2,j,k}^n = \begin{cases} \rho_{i,j,k}^n \frac{\tilde{u}_{xi,j,k}^n + \tilde{u}_{xi+1,j,k}^n}{2} \Delta y \Delta z \Delta t, \text{ если } \tilde{u}_{xi,j,k}^n + \tilde{u}_{xi+1,j,k}^n > 0 \\ \rho_{i+1,j,k}^n \frac{\tilde{u}_{xi,j,k}^n + \tilde{u}_{xi+1,j,k}^n}{2} \Delta y \Delta z \Delta t, \text{ если } \tilde{u}_{xi,j,k}^n + \tilde{u}_{xi+1,j,k}^n < 0 \end{cases}$$

$$\Delta M_{yi,j+1/2,k}^n = \begin{cases} \rho_{i,j,k}^n \frac{\tilde{u}_{yi,j,k}^n + \tilde{u}_{yi,j+1,k}^n}{2} \Delta x \Delta z \Delta t, \text{ если } \tilde{u}_{yi,j,k}^n + \tilde{u}_{yi,j+1,k}^n > 0 \\ \rho_{i,j+1,k}^n \frac{\tilde{u}_{yi,j,k}^n + \tilde{u}_{yi,j+1,k}^n}{2} \Delta x \Delta z \Delta t, \text{ если } \tilde{u}_{yi,j,k}^n + \tilde{u}_{yi,j+1,k}^n < 0 \end{cases}$$

$$\Delta M_{zi,j,k+1/2}^n = \begin{cases} \rho_{i,j,k}^n \frac{\tilde{u}_{zi,j,k}^n + \tilde{u}_{zi,j,k+1}^n}{2} \Delta x \Delta y \Delta t, \text{ если } \tilde{u}_{zi,j,k}^n + \tilde{u}_{zi,j,k+1}^n > 0 \\ \rho_{i,j,k+1}^n \frac{\tilde{u}_{zi,j,k}^n + \tilde{u}_{zi,j,k+1}^n}{2} \Delta x \Delta y \Delta t, \text{ если } \tilde{u}_{zi,j,k}^n + \tilde{u}_{zi,j,k+1}^n < 0 \end{cases}$$

Потоки скорости определяются по формулам:

$$\Delta p_{xi+1/2,j,k}^n = \begin{cases} \Delta M_{xi,j,k}^n \tilde{u}_{xi,j,k}^n, & \text{если } \tilde{u}_{xi,j,k}^n + \tilde{u}_{xi+1,j,k}^n > 0 \\ \Delta M_{xi,j,k}^n \tilde{u}_{xi+1,j,k}^n, & \text{если } \tilde{u}_{xi,j,k}^n + \tilde{u}_{xi+1,j,k}^n < 0 \end{cases}$$

$$\Delta p_{yi,j+1/2,k}^n = \begin{cases} \Delta M_{yi,j,k}^n \tilde{u}_{yi,j,k}^n, & \text{если } \tilde{u}_{yi,j,k}^n + \tilde{u}_{yi,j+1,k}^n > 0 \\ \Delta M_{yi,j,k}^n \tilde{u}_{yi,j+1,k}^n, & \text{если } \tilde{u}_{yi,j,k}^n + \tilde{u}_{yi,j+1,k}^n < 0 \end{cases}$$

$$\Delta p_{zi,j+1/2,k}^n = \begin{cases} \Delta M_{zi,j,k}^n \tilde{u}_{zi,j,k}^n, & \text{если } \tilde{u}_{zi,j,k}^n + \tilde{u}_{zi,j,k+1}^n > 0 \\ \Delta M_{zi,j,k}^n \tilde{u}_{zi,j,k+1}^n, & \text{если } \tilde{u}_{zi,j,k}^n + \tilde{u}_{zi,j,k+1}^n < 0 \end{cases}$$

Потоки энергии определяются по формулам:

$$\Delta E_{i+1/2,j,k}^n = \begin{cases} \Delta M_{xi,j,k}^n \tilde{E}_{xi,j,k}^n, & \text{если } \tilde{u}_{xi,j,k}^n + \tilde{u}_{xi+1,j,k}^n > 0 \\ \Delta M_{xi,j,k}^n \tilde{E}_{xi+1,j,k}^n, & \text{если } \tilde{u}_{xi,j,k}^n + \tilde{u}_{xi+1,j,k}^n < 0 \end{cases}$$

$$\Delta E_{i,j+1/2,k}^n = \begin{cases} \Delta M_{yi,j,k}^n \tilde{E}_{yi,j,k}^n, & \text{если } \tilde{u}_{yi,j,k}^n + \tilde{u}_{yi,j+1,k}^n > 0 \\ \Delta M_{yi,j,k}^n \tilde{E}_{yi,j+1,k}^n, & \text{если } \tilde{u}_{yi,j,k}^n + \tilde{u}_{yi,j+1,k}^n < 0 \end{cases}$$

$$\Delta E_{i,j,k+1/2}^n = \begin{cases} \Delta M_{zi,j,k}^n \tilde{E}_{zi,j,k}^n, & \text{если } \tilde{u}_{zi,j,k}^n + \tilde{u}_{zi,j,k+1}^n > 0 \\ \Delta M_{zi,j,k}^n \tilde{E}_{zi,j,k+1}^n, & \text{если } \tilde{u}_{zi,j,k}^n + \tilde{u}_{zi,j,k+1}^n < 0 \end{cases}$$

### 3. Заключительный этап

Плотность:

$$\rho_{i,j,k}^{n+1} = \rho_{i,j,k}^n + \dot{\rho}$$

$\dot{\rho}$

$$\frac{\Delta M_{xi-1/2,j,k}^n + \Delta M_{yi,j-1/2,k}^n + \Delta M_{zi,j,k-1/2}^n}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

Скорости:

$$u_{xi,j,k}^{n+1} = \tilde{u}_{xi,j,k}^n \frac{\rho_{i,j,k}^n}{\rho_{i,j,k}^{n+1}} + \dot{u}$$

$$+ \frac{(\Delta p_{xi+1/2,j,k}^n + \Delta p_{xi,j+1/2,k}^n + \Delta p_{xi,j,k+1/2}^n)}{\rho_{i,j,k}^{n+1} \Delta x \Delta y \Delta z} - \dot{u}$$

$$\left. - \frac{\Delta p_{xi+1/2,j,k}^n \Delta p_{xi,j-1/2,k}^n \Delta p_{xi,j,k-1/2}^n}{\rho_{i,j,k}^{n+1} \Delta x \Delta y \Delta z} \right).$$

$$u_{yi,j,k}^{n+1} = \tilde{u}_{yi,j,k}^n \frac{\rho_{i,j,k}^n}{\rho_{i,j,k}^{n+1}} + \zeta$$

+  $\zeta$

$$\left. - \frac{\Delta p_{yi+1/2,j,k}^n + \Delta p_{yi,j-1/2,k}^n + \Delta p_{yi,j,k-1/2}^n}{\rho_{i,j,k}^{n+1} \Delta x \Delta y \Delta z} \right).$$

$$u_{zi,j,k}^{n+1} = \tilde{u}_{zi,j,k}^n \frac{\rho_{i,j,k}^n}{\rho_{i,j,k}^{n+1}} + \zeta$$

$$+ \left( \frac{\Delta p_{zi+1/2,j,k}^n + \Delta p_{zi,j+1/2,k}^n \Delta p_{zi,j,k+1/2}^n}{\rho_{i,j,k}^{n+1} \Delta x \Delta y \Delta z} - \zeta \right.$$

$$\left. - \frac{\Delta p_{zi+1/2,j,k}^n + \Delta p_{zi,j-1/2,k}^n + \Delta p_{zi,j,k-1/2}^n}{\rho_{i,j,k}^{n+1} \Delta x \Delta y \Delta z} \right).$$

Энергия:

$$E_{i,j,k}^{n+1} = \tilde{E}_{i,j,k}^n \frac{\rho_{i,j,k}^n}{\rho_{i,j,k}^{n+1}} + \zeta$$

$$+ \left( \frac{\Delta E_{i+1/2,j,k}^n + \Delta E_{i,j+1/2,k}^n \Delta E_{i,j,k+1/2}^n}{\rho_{i,j,k}^{n+1} \Delta x \Delta y \Delta z} - \zeta \right.$$

$$\left. - \frac{\Delta E_{i+1/2,j,k}^n + \Delta E_{i,j-1/2,k}^n + \Delta E_{i,j,k-1/2}^n}{\rho_{i,j,k}^{n+1} \Delta x \Delta y \Delta z} \right).$$

Давление:

$$P_{i,j,k}^n = (\gamma - 1) \rho_{i,j,k}^{n+1} \left( E_{i,j,k}^{n+1} - \frac{u_{xi,j,k}^{n+1 2} + u_{yi,j,k}^{n+1 2} + u_{zi,j,k}^{n+1 2}}{2} \right).$$



### 3.3 Модификация численного метода

В данной работе используется модификация разработанная Гришиным Ю.А., Зенкиным В.А. в основе которой лежит идея использовать специальную процедуру для расчёта давления и скорости на границах между ячеек.

В базовом алгоритме метода крупных частиц давление и скорость на границах ячеек для использования на эйлеровом этапе при вычислении промежуточного значения энергии определяются расчетом средних арифметических значений между уже определенными давлениями и скоростями в смежных ячейках на n-ом шаге по времени.

В данной работе предлагается использовать специальную простую процедуру для определения давления и скорости на границах между ячейками.

Рассмотрим одномерную постановку задачи без учёта трения и теплообмена с окружающей средой. С учётом допущений этапа Эйлера в методе крупных частиц:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial x} = 0.$$

Дифференциальное уравнение полной энергии преобразуется к виду:

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}.$$

Здесь и ниже:  $p$  - давление;  $\rho$  - плотность;  $u$  - скорость;  $E$  - полная энергия;  $e$  - внутренняя энергия;  $k$  - показатель адиабаты.

Выразив величину полной энергии через внутреннюю, получим:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial p}{\partial x} - p \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Так как уравнение количества движения для этапа Эйлера имеет вид

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

уравнение энергии можно преобразовать к виду к виду

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = -p \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Внутренняя энергия идеального калорически совершенного газа выражается в виде

$$e = C_v T = \frac{p}{\rho(k-1)}.$$

Подставив это выражение в формулу , получим следующее соотношение для давления:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -(k-1)p \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Используя явное разностное представление, с помощью соотношения можно определить предварительное значение давления на  $n+1$  временном слое для  $i-1/2$  и  $i+1/2$  границ между ячейками  $i-1, i, i+1$ :

$$\hat{p}_{xi+1/2, k}^{n+1} = \frac{P_{i+1, j, k}^n + P_{i, j, k}^n}{2} \left( 1 - (\gamma - 1) (u_{xi+1, j, k}^n - u_{xi, j, k}^n) \frac{\Delta t}{\Delta x} \right),$$

$$\hat{p}_{yi, j+1/2, k}^{n+1} = \frac{P_{i, j+1, k}^n + P_{i, j, k}^n}{2} \left( 1 - (\gamma - 1) (u_{yi, j+1, k}^n - u_{yi, j, k}^n) \frac{\Delta t}{\Delta y} \right),$$

$$\hat{p}_{zi, j, k+1/2}^{n+1} = \frac{P_{i, j, k+1}^n + P_{i, j, k}^n}{2} \left( 1 - (\gamma - 1) (u_{zi, j, k+1}^n - u_{zi, j, k}^n) \frac{\Delta t}{\Delta z} \right).$$

Полученные значения давления предлагается использовать для определения промежуточных величин скорости в ячейке на этапе Эйлера:

$$\tilde{u}_{xi, j, k}^n = u_{xi, j, k}^n - \frac{\hat{p}_{xi+1/2, j, k}^{n+1} - \hat{p}_{xi-1/2, j, k}^{n+1}}{\Delta x} \frac{\Delta t}{\rho_{i, j, k}^n},$$

$$\tilde{u}_{yi,j,k}^n = u_{yi,j,k}^n - \frac{\hat{p}_{yi,j+1/2,k}^{n+1} - \hat{p}_{yi,j-1/2,k}^{n+1}}{\Delta y} \frac{\Delta t}{\rho_{i,j,k}^n},$$

$$\tilde{u}_{zi,j,k}^n = u_{zi,j,k}^n - \frac{\hat{p}_{xi,j,k+1/2}^{n+1} - \hat{p}_{xi,j,k-1/2}^{n+1}}{\Delta z} \frac{\Delta t}{\rho_{i,j,k}^n}.$$

Предварительное значение скоростей на границах ячеек вычисляются по формулам:

$$\hat{u}_{xi+1/2,j,k}^{n+1} = \frac{u_{xi,j,k}^n + u_{xi+1,j,k}^n}{2} - \frac{2}{\rho_{i,j,k}^n + \rho_{i+1,j,k}^n} (P_{i+1,j,k}^n - P_{i,j,k}^n) \frac{\Delta t}{\Delta x},$$

$$\hat{u}_{yi,j+1/2,k}^{n+1} = \frac{u_{yi,j,k}^n + u_{yi,j+1,k}^n}{2} - \frac{2}{\rho_{i,j,k}^n + \rho_{i,j+1,k}^n} (P_{i,j+1,k}^n - P_{i,j,k}^n) \frac{\Delta t}{\Delta y},$$

$$\hat{u}_{zi,j,k+1/2}^{n+1} = \frac{u_{zi,j,k}^n + u_{zi,j,k+1}^n}{2} - \frac{2}{\rho_{i,j,k}^n + \rho_{i,j,k-1}^n} (P_{i,j,k+1}^n - P_{i,j,k}^n) \frac{\Delta t}{\Delta z}.$$

Теперь можно определить значение энергии на Эйлеровом этапе:

$$\tilde{E}_{i,j,k}^n = E_{i,j,k}^n - \dot{\epsilon}$$

$$\begin{aligned} & - \left[ \frac{\hat{p}_{xi+1/2,j,k}^n \hat{u}_{xi+1/2,j,k}^n - \hat{p}_{xi-1/2,j,k}^n \hat{u}_{xi-1/2,j,k}^n}{\Delta x} + \dot{\epsilon} \right. \\ & + \frac{\hat{p}_{yi,j+1/2,k}^n \hat{u}_{yi,j+1/2,k}^n - \hat{p}_{yi,j-1/2,k}^n \hat{u}_{yi,j-1/2,k}^n}{\Delta y} + \dot{\epsilon} \\ & \left. + \frac{\hat{p}_{zi,j,k+1/2}^n \hat{u}_{zi,j,k+1/2}^n - \hat{p}_{zi,j,k-1/2}^n \hat{u}_{zi,j,k-1/2}^n}{\Delta z} \right] \frac{\Delta t}{\rho_{i,j,k}^n}. \end{aligned}$$

### 3.4 Программная реализация

В данной работе для реализации вычислительных алгоритмов использовался язык программирования C# описанной в [7]. Структура программы основана на принципах объектно ориентированного программирования. Структура ООП представляет собой совокупность объектов, каждый из которых является образцом класса, а классы образуют систему наследования. ООП использует другой подход к программированию, а именно как к моделированию информационных объектов, решающую основную задачу структурирования информации и дальнейшее управление ею. Такая работа с информацией позволяет минимизировать избыточность данных, что приводит к более понятной и удобной структуре. Данный подход в программировании очень удобен для реализации решений задач МСС. При численном решении задач, на основе расчётной области создаётся сетка, которая разбивается на конечное число ячеек, в которых производится расчёт. Каждая ячейка имеет определённое количество граней в зависимости от используемого вида сетки. На основе созданной сетки, ячеек и граней производится дальнейший расчёт. Используя принципы ООП, можно создавать классы ячейки и грани, в которых будет храниться все информация. Данная реализация позволяет существенно упростить расчёт поставленной задачи

Для подсчёта газодинамических величин были созданы класс ячейки и грани. Граничные условия и подсчёт значений граней внутри области были вынесены в отдельные классы, реализованы граничные условия: стенка, входящий поток, свободное протекание. Построитель сетки, вычислительный цикл, распараллеливание вычислительного цикла, вывод данных были объединены в один класс. Основные параметры, определяющие время работы программы, размеры вычисляемой области, количество ячеек расположены в отдельном классе. В итоге было создано 8 классов, которые взаимодействуют друг с другом.

**Класс Cell.** В данном классе хранятся значения:  $P, E, \rho, u_x, u_y, u_z$  а также вспомогательные значения скорости и энергии, рассчитывающиеся в Эйлеровом этапе. Хранится информация обо всех гранях ячейки и ссылки на методы для расчёта значений параметров в ячейках по значениям величин на гранях.

**Класс Face.** В данном классе хранятся значения:  $M, du, dE$ , а также вспомогательные значения скорости и давления, которые просчитываются в модификации Зенкина, Гришина. Хранится информация о прилегающих ячейках, площадь и координаты грани, информация о методах расчета значений на грани (один из видов граничных условий или алгоритм для внутренних граней).

**Классы InnerFace, Wall, InFlow, FreeFlow.** Эти классы созданы для расчёта значений на гранях по алгоритмам соответствующих граничных условий либо алгоритму сквозного счета (внутри области).

В классе **GlobalParameters** определяются все основные параметры вычислительного алгоритма и задаваемой сетки.

**Класс Program** содержит алгоритмы создания сетки, применения начальных и граничных условий. Хранит основной вычислительный цикл, а так же блок вывода данных в текстовые файлы для последующей визуализации.

Явным преимуществом такой реализации является упрощение основного вычислительного цикла и отдельных алгоритмов, что повышает удобство их модификации и снижает риск возникновения алгоритмических ошибок. Для сравнения будет использована программа, реализованная с помощью массивов.

```

for (int i = 1; i < Nx - 1; i++)
{
    for (int j = 1; j < Ny - 1; j++)
    {
        for (int k = 1; k < Nz - 1; k++)
        {
            ux_euler[i, j, k] = ux[i, j, k] - dt * (spx[i, j, k] - spx[i - 1, j, k]) / (dx * rho[i, j, k]);
            uy_euler[i, j, k] = uy[i, j, k] - dt * (spy[i, j, k] - spy[i, j - 1, k]) / (dy * rho[i, j, k]);
            uz_euler[i, j, k] = uz[i, j, k] - dt * (spz[i, j, k] - spz[i, j, k - 1]) / (dz * rho[i, j, k]);
            E_euler[i, j, k] = E[i, j, k] - dt * ((spx[i, j, k] * urx[i, j, k] - spx[i - 1, j, k] * ulx[i, j, k]) / dx
            + (spy[i, j, k] * ury[i, j, k] - spy[i, j - 1, k] * uly[i, j, k]) / dy
            + (spz[i, j, k] * urz[i, j, k] - spz[i, j, k - 1] * ulz[i, j, k]) / dz) / rho[i, j, k];
        }
    }
}

```

Рисунок 3 Реализация через массивы

```

//эйлерова скорость
for (int i = 0; i < cells.Length; i++)
{
    cells[i].CalcEulerVelocity();
}
//эйлерова энергия
for (int i = 0; i < cells.Length; i++)
{
    cells[i].CalcEulerEnergy();
}

```

Рисунок 4 Реализация через классы

На рис.3 показана реализация используя массивы. Как видно на картинке, для того чтобы просчитать все значения в сетке, нужны три цикла `for`. В реализации через классы рис. 4, для того чтобы просчитать значения, указывается ссылка на метод для каждой ячейки, используется только один цикл `for`.

Для визуализации полученных данных использовалась программа ParaView принцип работы описанный в [8]. Данная программа позволяет строить сечения трехмерных объектов, строить графики и одновременно визуализировать процесс для подробного изучения результатов.

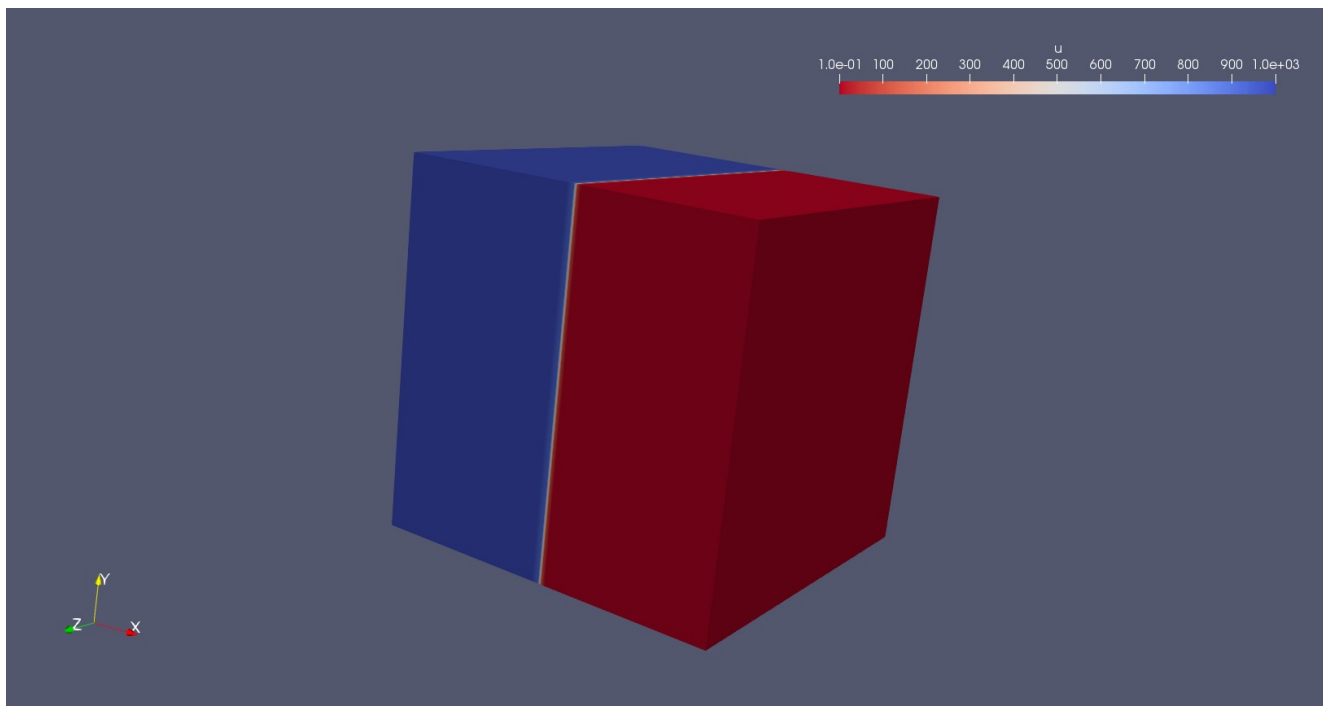


Рисунок 5 Визуализация расчётной области в ParaView

### 3.5 Верификация

Одномерный случай

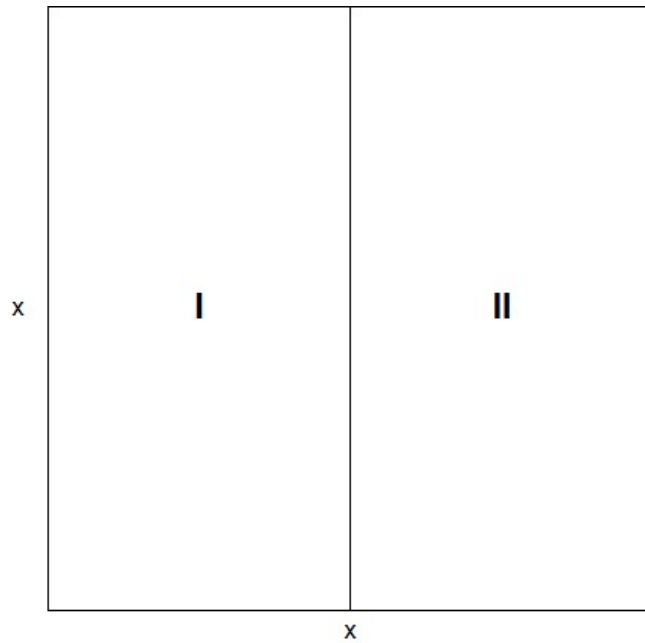


Рисунок 6 Расчётная одномерная область

Дана квадратная область рис.6 размером  $x \times x$ . Параметры в области I:  $P=1000 \text{ Па}, \rho=3.0 \text{ кг/м}^3, V=0 \text{ м/с}$ , параметры в области II:  $P=0.1 \text{ Па}, \rho=2.0 \text{ кг/м}^3, V=0 \text{ м/с}$ . Решается задача о произвольном распаде разрыва.

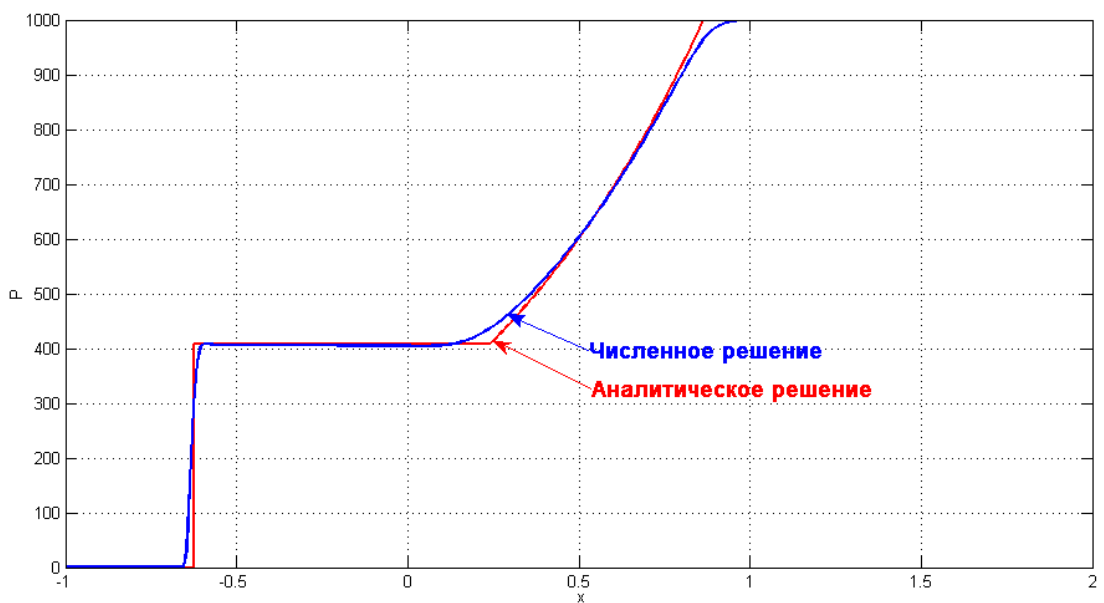




Рисунок 7 Сравнение с аналитическим решением

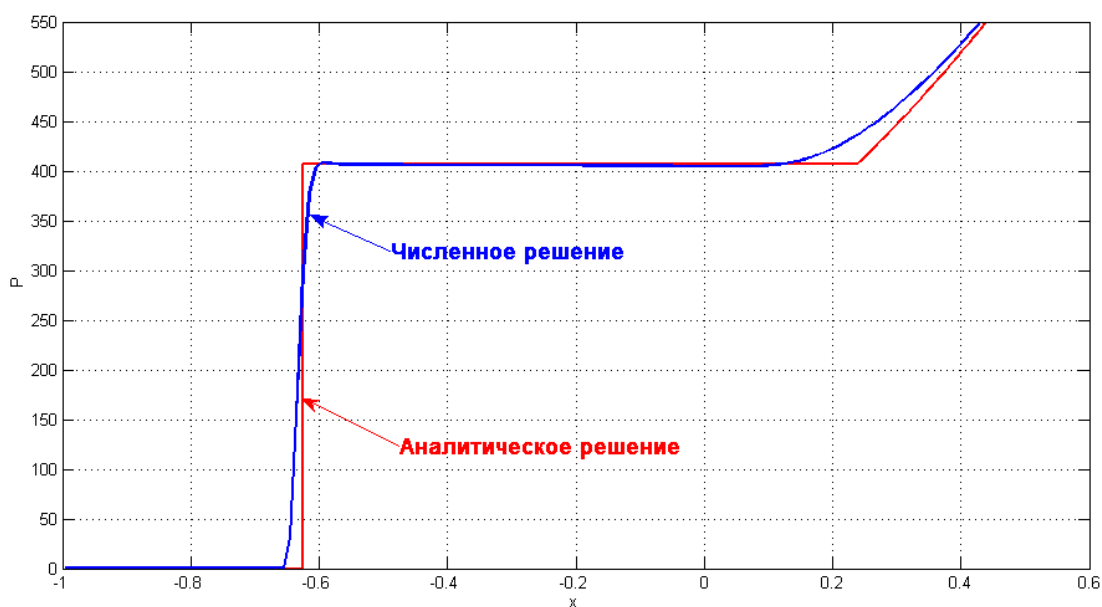


Рисунок 8 Сравнение с аналитическим решением

На рис.7, рис.8 показано сравнение численного решения с аналитическим,  $t_{stop}=0.04, \kappa=0.1$ . Анализируя полученные результаты, можно прийти к выводу, что численное решение достаточно близко сходится к аналитическому решению, что для конкретной задачи подходит решение.

Трёхмерный случай

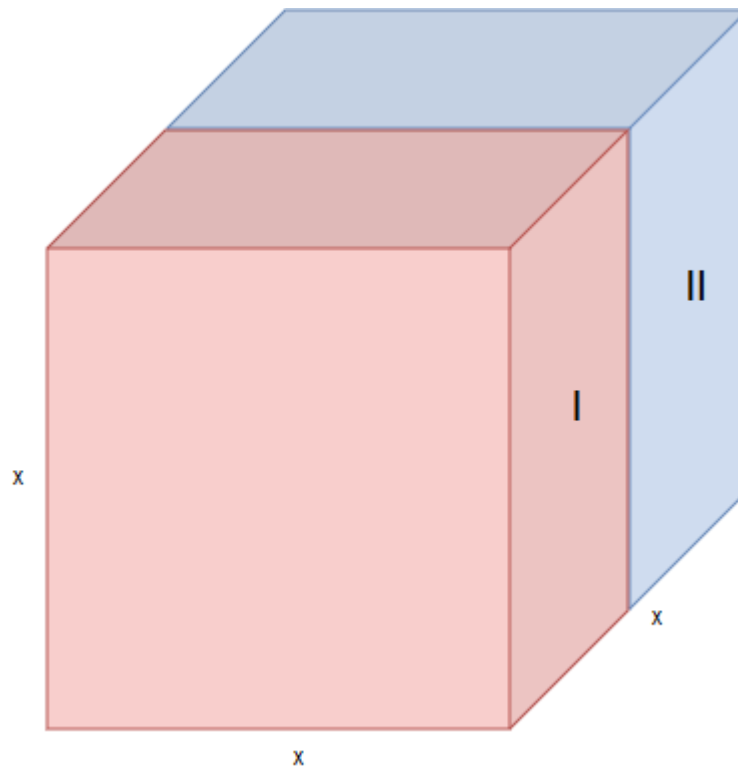


Рисунок 9 Расчётная трехмерная область

Дана кубическая область рис.9 размером  $x \times x \times x$ . . Параметры в области I:  $P=1000 \text{ Па}, \rho=3.0 \text{ кг/м}^3, V=0 \text{ м/с}$ , параметры в области II:  $P=0.1 \text{ Па}, \rho=2.0 \text{ кг/м}^3, V=0 \text{ м/с}$ . Решается задача о произвольном распаде разрыва.

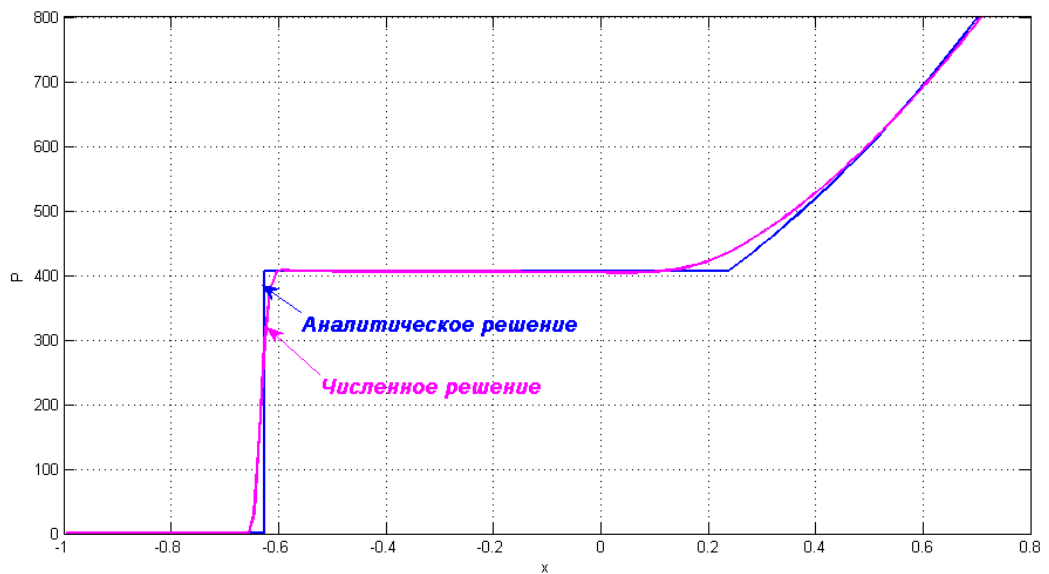


Рисунок 10 Сравнение с аналитическим решением

На рис. 10 показано сравнение трехмерного решения с аналитическим,  $t_{stop}=0.04, \kappa=0.1$ . Волна распространяется вдоль оси  $x$ , при распространении волны вдоль осей  $y, z$  решение остается неизменным. Сохраняется одномерность, численное решение достаточно близко сходится к аналитическому решению.

## 4. Обтекание

### 4.1 Обтекание шара конечного объёма

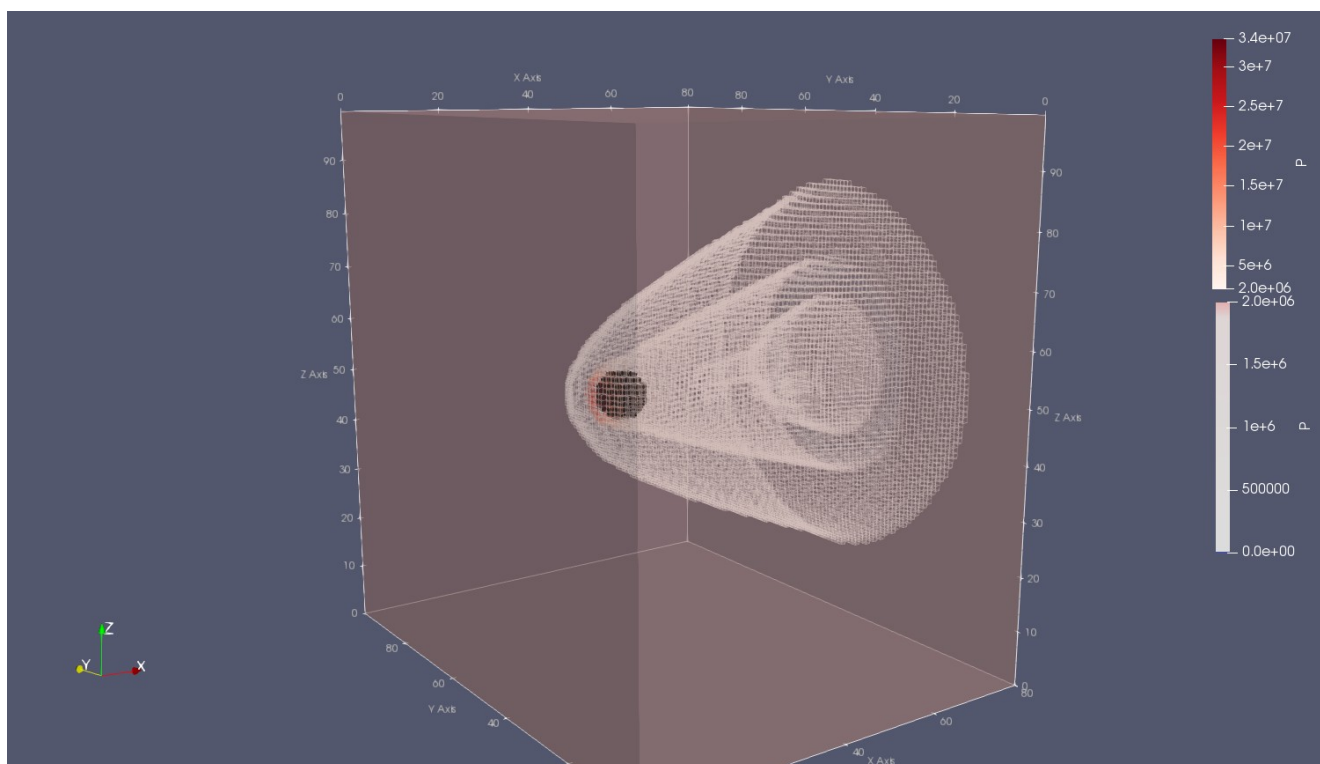


Рисунок 11 Поле давлений в момент времени  $t=0.002$

На рис. 11 показано поле давлений обтекаемого тела. На рисунке виден головной скачок уплотнения, образованный набегающим потоком газа.

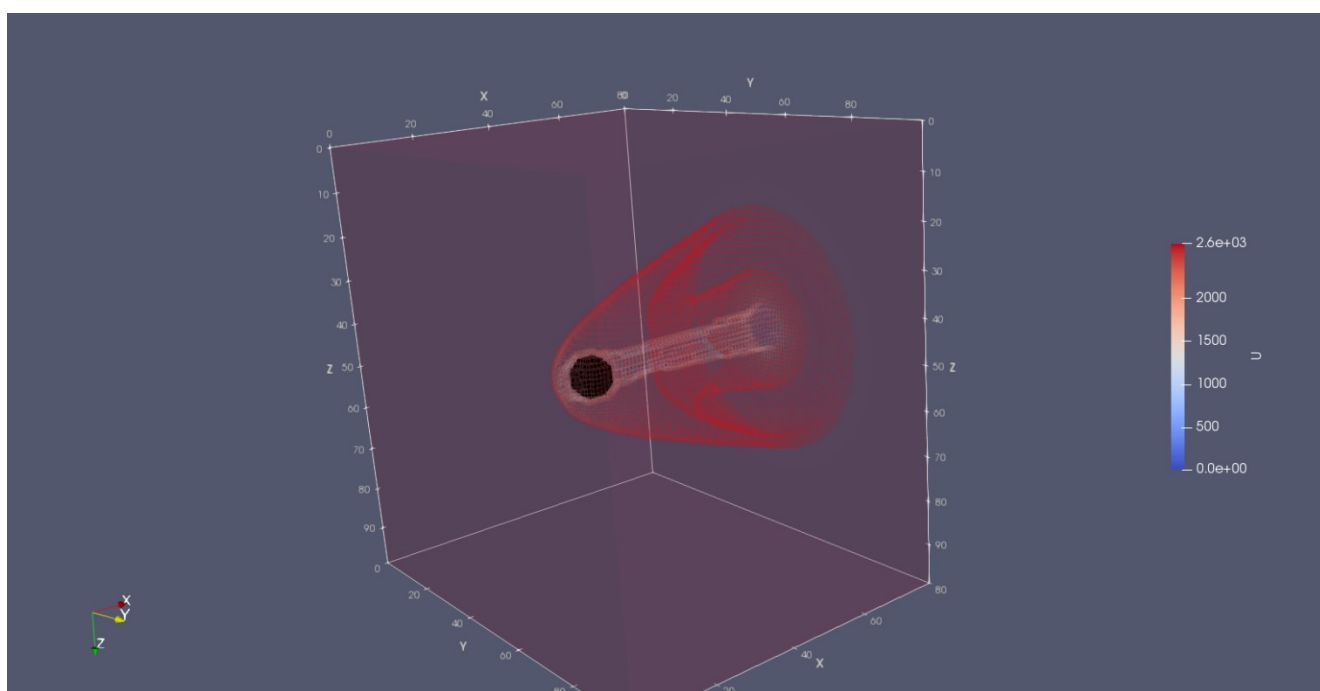


Рисунок 12 Поле скоростей в момент времени  $t=0.002$

На рис. 12 показано распределение поля скоростей.

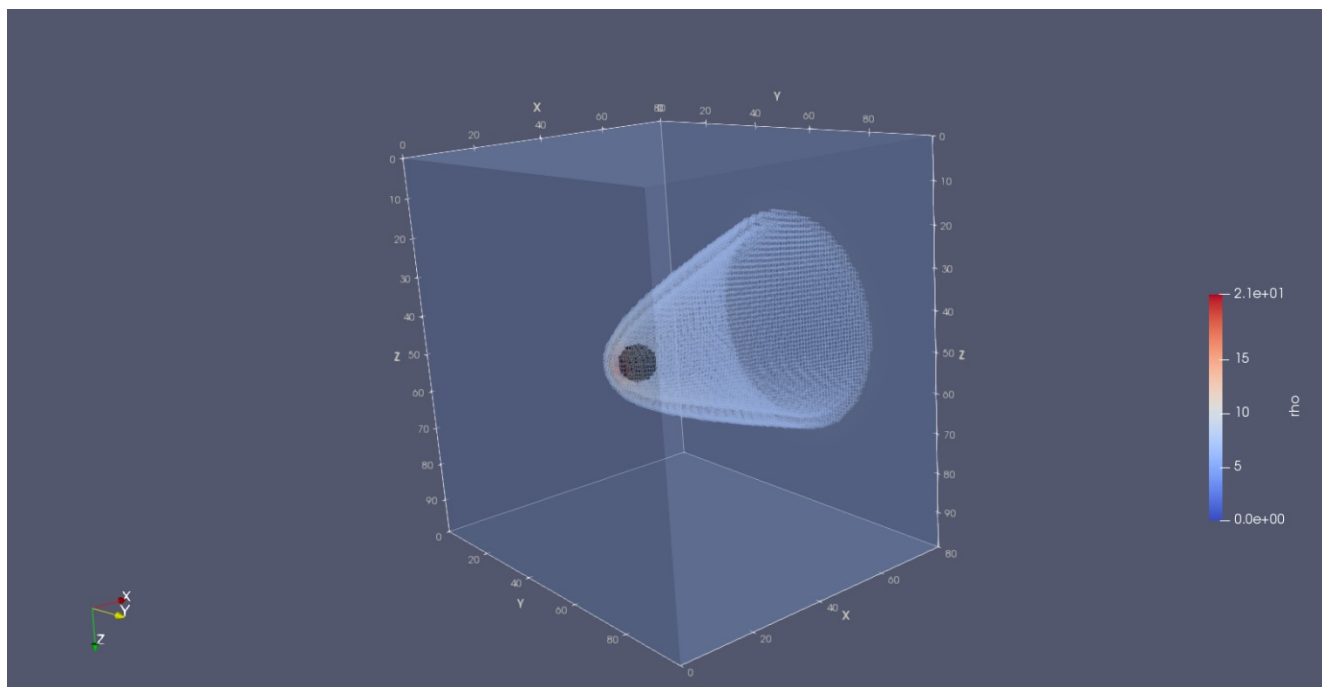


Рисунок 13 Поле плотностей в момент времени  $t=0.002$

На рис. 13 показано распределение поля плотностей.

Результаты численного моделирования представленные на рис. 11-14 показывают полное совпадение картины течения с результатом эксперимента на рис. 15 описанным в [9]. При столь высоком числе Маха головная волна прижимается к передней части тела. Волны Маха, отходящие вниз по потоку от поверхности, отмечают заднюю границу дозвуковой области.

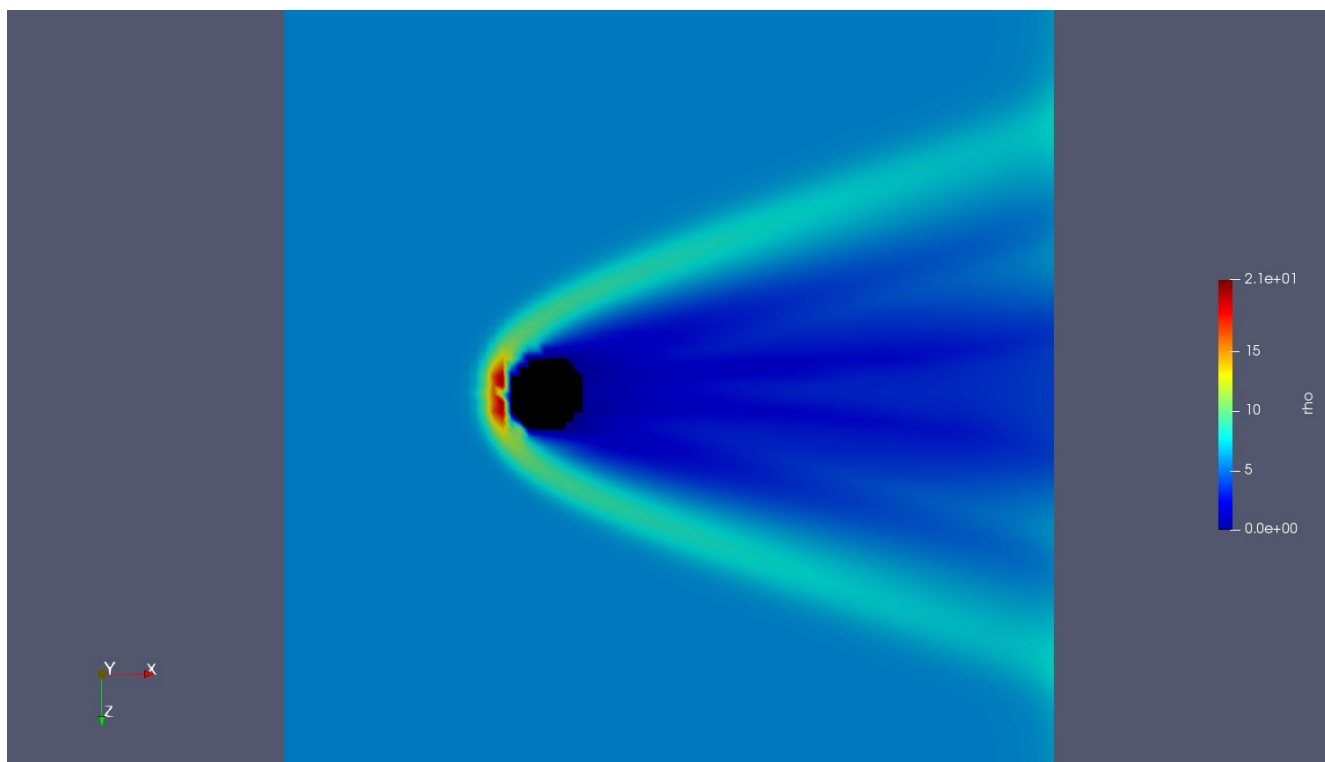


Рисунок 14 Распределение плотности в сечении расчётной области

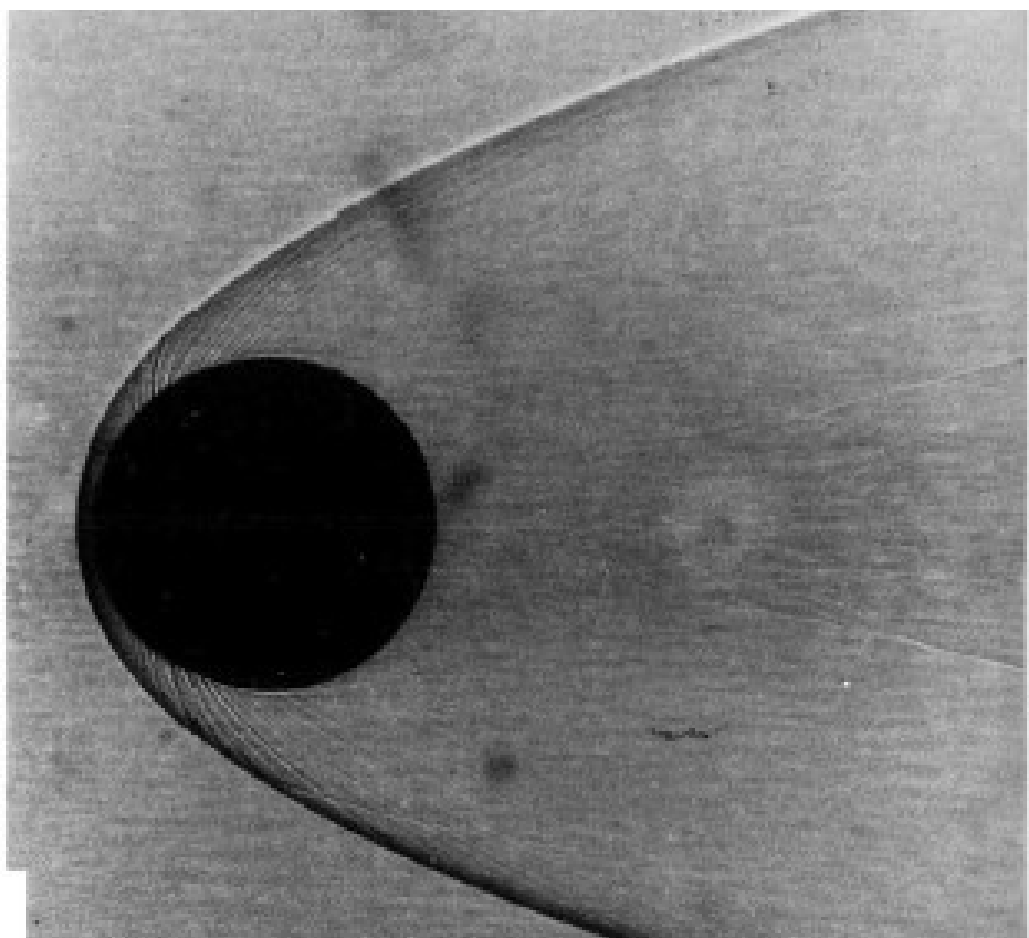


Рисунок 15 Обтекание шара поток газа при числе Маха  $M=7,6$

## 4.2 Обтекание пули конечного объема

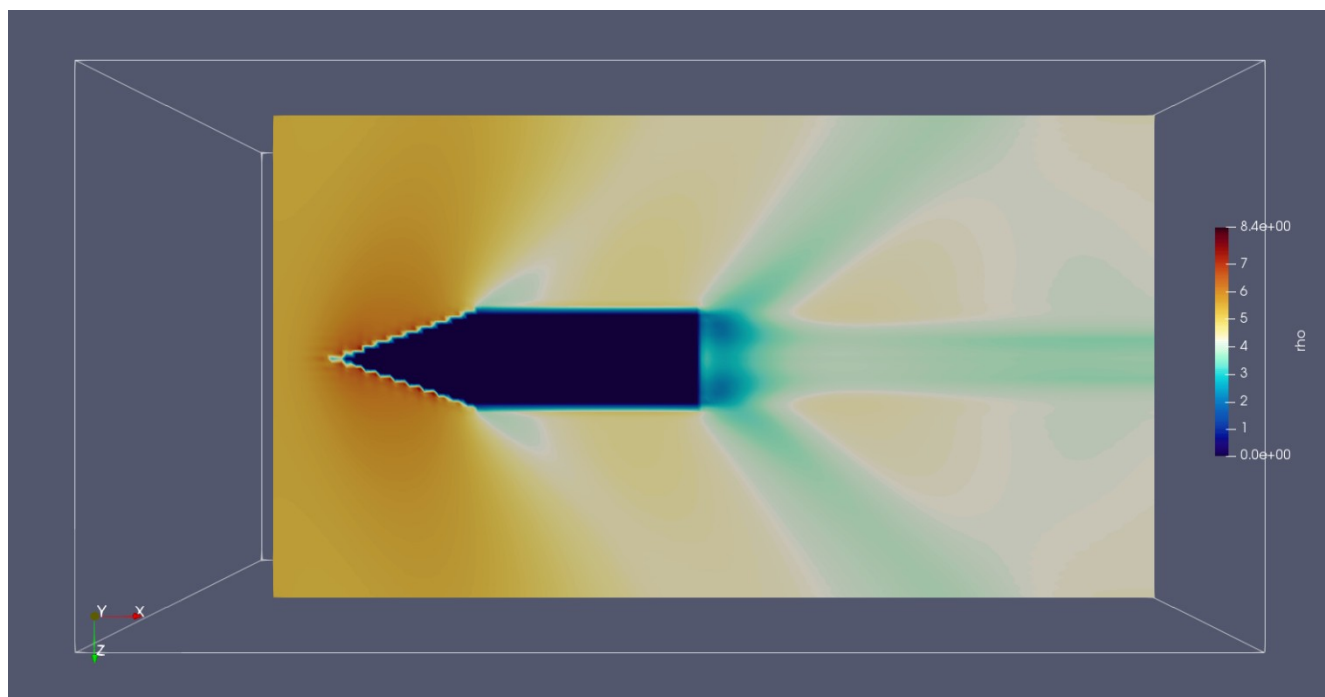


Рисунок 16 Распределение плотности в сечении расчётной области

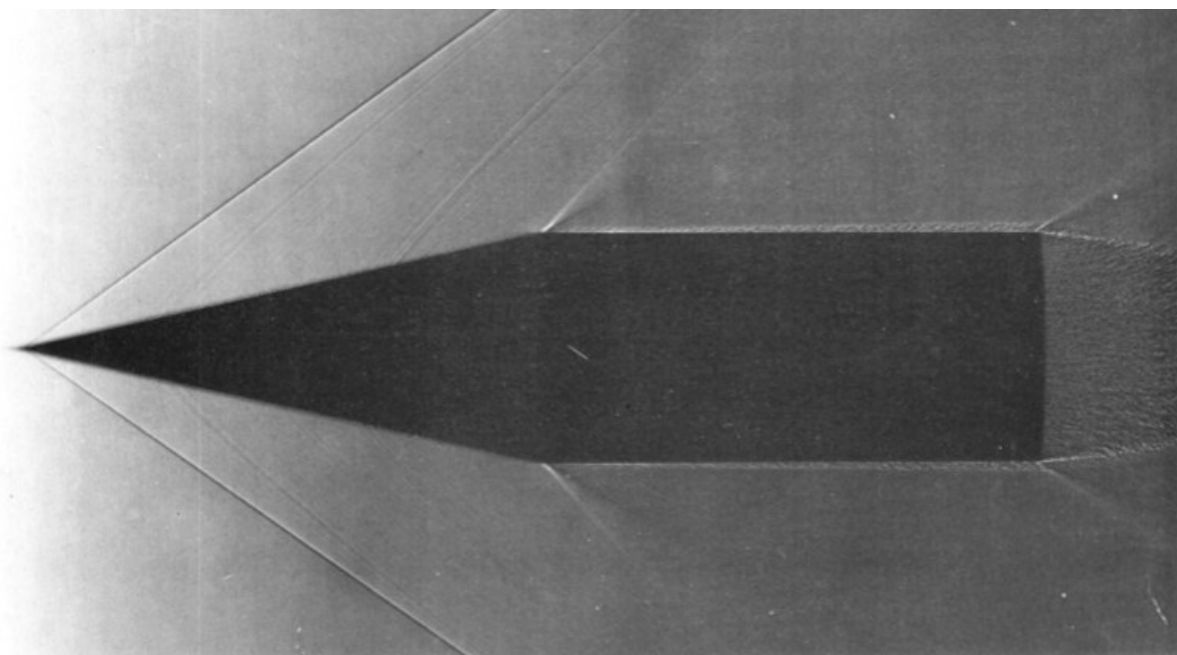


Рисунок 17 Комбинация конуса с цилиндром обтекаемым газом при числе Маха  $M=1,85$

Результаты численного моделирования представленные на рис. 16 показывают полное совпадение картины течения с результатом эксперимента на рис. 17.

Однако из-за того, что при численном моделировании использовалась достаточно

крупная сетка, скачок уплотнения на конусе сглаживается и не имеет чётко выраженного характера, как в эксперименте.



## **5. Заключение**

В данной работе был реализован численный алгоритм для решения задач в трёхмерной постановке в программной среде C#, используя принципы ООП. Программная реализация позволяет считать ударные волны, решать задачи об обтекании тел сложной геометрии. Численный метод верифицирован аналитическим решением. Исследовано обтекание тел в трёхмерной постановке, визуализированы все поставленные задачи. Для более точного описания геометрии тел в дальнейшем планируется переход к не ортогональным сеткам.

## 6. Список литературы

1. NEUMANN J. A METHOD FOR THE NUMERICAL CALCULATION OF HYDRODYNAMICAL SHOCKS/ J. NEUMANN, R.RICHTMAYER -J. APPL.PHYS. -1950. – v.21, N 3.-232-237p.
2. LAX P.D. WEAK SOLUTION OF NONLINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS AND THEIR NUMERICAL COMPUTATIONS/ P.D. LAX -COMN. PURE AND APPL. MATH. -1954. – v.7 –p.159-193.
3. ГОДУНОВ С.К. РАЗНОСТНЫЙ МЕТОДА РАСЧЁТА УДАРНЫХ ВОЛН/ С.К. ГОДУНОВ - УМН. -1957. -т. 12. –вып.1. -176-177с.
4. КУРОПАТЕНКО В.Ф. МЕТОД РАСЧЁТА УДАРНЫХ ВОЛН/ В.Ф. КУРОПАТЕНКО –ДАН СССР.- 1960. т.3, №4.-771-772с.
5. БЕЛОЦЕРСКОВСКИЙ О.М. МЕТОД КРУПНЫХ ЧАСТИЦ В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ:КНИГА/О.М. БЕЛОЦЕРСКОВСКИЙ, Ю.М. ДАВЫДОВ.-М.:НАУКА. ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, 1982.-392с.
6. ЗЕНКИН, В.А. ПОВЫШЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА МЕТОДА КРУПНЫХ ЧАСТИЦ/ В.А. ЗЕНКИН, Ю.А.ГРИШИН//-НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ.-2011.-5с.
7. ГЕРБЕРТ, ШИЛДТ. С# 4.0:КНИГА/ГЕРБЕРТ ШИЛДТ- ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ "ВИЛЬЯМС", 2011 © BY THE MCGRAW-HILL COMPANIES, 2010.-1465с.
8. ДОКУМЕНТАЦИЯ PARAVIEW.-[HTTPS://WWW.PARAVIEW.ORG/DOCUMENTATION/](https://www.paraview.org/documentation/)
9. ВАН-ДАЙК, М. АЛЬБОМ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ И ГАЗА:КНИГА/М. ВАН-ДАЙК.-МИР, 1986.-184с.