

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
Высшего профессионального образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Национальный исследовательский университет)
Факультет математики, механики и компьютерных наук
Кафедра вычислительной механики

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой
_____/Ковалев Ю.М.
_____ 2019 г.

**Численное моделирование обтекания пластинки конечной ширины
сверхзвуковым потоком газа**

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ
ЮУрГУ – 01.03.03.2019.129-16.ПЗ ВКР

Руководитель работы

кан. физ.-мат. наук, доцент кафедры ВМСС
_____/ Клиначева Н.Л./
«_____» _____ 2019 г.

Автор

Студент группы ЕТ-410
_____/ Помыкалов Е.В./
«_____» _____ 2019 г.

Нормоконтролер

кан. физ.-мат. наук, доцент кафедры ВМСС
_____/ Клиначева Н.Л./
«_____» _____ 2019 г.

Челябинск
2019

АННОТАЦИЯ.

Помыкалов Е.В. Численное моделирование обтекания пластинки конечной ширины сверхзвуковым потоком газа. – Челябинск: ЮУрГУ, ЕТ-410, 51 с., 22 ил., библиограф. список – 10 наименований., 1 прил.

Выпускная квалификационная работа выполнена с целью исследования задачи об обтекании пластинки конечной ширины сверхзвуковым потоком газа.

Разработан и протестирован численный алгоритм, реализующий модифицированный метод крупных частиц для двумерной постановки задачи.

Получены качественные картины течения за пластиной. Построены поля давлений и скоростей на определенные моменты времени.

Оглавление

Введение.....	4
1. Обзор литературы.....	6
2. Постановка задачи.....	13
2.1 Метод расчета.....	15
2.2 Исследование сеточной сходимости.....	21
2.3 Тестирование численного алгоритма.....	23
3. Анализ результатов.....	26
3.1 Численное моделирование обтекания пластины.....	26
3.2. Дорожка Кармана.....	35
Заключение.....	38

Введение.

В современном мире в связи с конструированием и полетами летательных аппаратов в широком диапазоне скоростей и разных высот для людей открыто множество задач для исследований, которые требуют кардинально новые методы для их решений. Данные задачи весьма трудно решить с помощью аналитического исследования в связи с достаточно сложной математической постановкой, но с помощью численных методов и достаточно мощных ЭВМ, возможно, получить полную информацию и физические характеристики течения. Для данного типа задач используется метод “сквозного счета”, с помощью которого не происходит выделения особенностей течения. В данных случаях приемлемо использовать и нестационарные подходы (метод “частиц в ячейках” Харлоу) которые имеют наименьшее отклонение от проведенных численных экспериментов. Не исключено, что локальные свойства численных решений определяются, не так полно, но только такими методами можно получить картину течения со всеми сложными физическими особенностями.

Важным вопросом является выбор системы координат, расчетной сетки. В нестационарных задачах широко используются Лагранжево-Эйлеровый подход. На Лагранжевой сетке точно определяется структура потока, но метод точен, когда перемещение вещества относительно небольшое. Эйлерова сетка используется для течений со значительными деформациями, в данном случае расчетная сетка фиксируется в пространстве.

Предложенный Харлоу, численный метод включает в себя преимущества Лагранжева и Эйлерова подхода, в котором расчетная область разбивается на неподвижную сетку, но так как сплошная среда описывается дискретной моделью, и на Лагранжеву сетку. С помощью Лагранжевой сетки определяются параметры самого вещества, а Эйлерова сетка служит для определения параметров полей.

Такой метод позволяет описать достаточно сложные явления в динамике многокомпонентных сред. Но дискретный метод частиц имеет и недостатки. Главным недостатком метода является представления сплошной среды как дискретного набора, следовательно, данный метод неустойчив. Не менее важный недостаток – затруднительное получение информации для разреженных областей вещества.

Для газодинамических задач обтекания с однородной средой необходимо учитывать непрерывность, а именно, рассматривать вместо “частиц” потоки массы через границы Эйлеровых ячеек. Плотность потока находится из закона сохранения массы. При этом нужно сохранить все сильные стороны метода “частиц в ячейках” и процесс вычислений.

Актуальность работы: в связи с увеличением мощности электронно-вычислительных машин (ЭВМ) можно получить приближенную математическую модель, которая наиболее точно описывает характерные физические свойства рассматриваемых явлений, что уменьшает затраты на реализацию различных экспериментов. Результаты численного моделирования обтекания тел различной формы сверхзвуковым потоком газа, могут быть применены, например, при проектировании летательных аппаратов и архитектурных конструкций.

Цель работы: разработка численного алгоритма и программная реализация решения задачи об обтекании пластинки конечной ширины сверхзвуковым потоком газа.

Задачи: 1) Выбор математической модели.

2) Разработка и тестирование численного алгоритма на решении одномерной задачи о взаимодействии плоской ударной волны с жесткой стенкой.

3) Разработка и реализация численного алгоритма в двумерной постановке.

4) Численное моделирование обтекания пластины конечной ширины сверхзвуковым потоком газа.

1. Обзор литературы.

Численное моделирование обтекания сверхзвуковым потоком газа различных преград, является актуальной задачей в современной науке. Расчеты полной картины обтекания тел конечных размеров течением газа, позволяют определить конфигурацию течения и характеристики в зоне отрыва и в спутном следе за кормой тела. Природа следа за движущимися телами представляет одну из фундаментальных задач механики сплошных сред. Эти явления привлекают к себе особое внимание в связи с движением летательных аппаратов на сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростях, входом спускаемых космических аппаратов в плотные слои атмосферы, обтекание мостов различных конфигураций и т.п., когда за телом образуется развитые зоны отрыва с возвратно-циркуляционным течением.

В ходе проделанной работы было изучено большое количество научной литературы и научных статей по данной теме.

Основные этапы и особенности стационарного и нестационарного течения газа в окрестности жесткой и упругой пластины достаточно хорошо изучены в работах [1], [2].

В работе [1] проводилось исследование об обтекание прямого уступа в аэродинамической трубе с использованием цифровой скоростной камеры. Рассмотренная задача встречается во многих приложениях аэрогазодинамики, к примеру, обтекания различных элементов летательных аппаратов с расположенными на них неровностями, что приводит к изменениям режима полета. Исследования, проводимые в аэродинамической трубе, демонстрируют особенности ударно-волновой картины течения в углах сжатия для сверхзвуковых или гиперзвуковых условий обтекания при числах Рейнольдса в диапазоне от 10^5 до 10^6 . Предельный угол сжатия образует прямую ступень. Особенностью обтекания прямой ступени является наличие отрывной зоны.

В ходе эксперимента для чисел Маха $M = 2.0, 2.5$ и 3.0 использовалась аэродинамическая труба периодического действия с камерой Эйфеля и выхлопом в вакуумную емкость, давление торможения составляло 0.1 МПа. Было исследовано течение вблизи прямого уступа с газопроницаемой вставкой, число Рейнольдса $Re = 5 \cdot 10^5$, температура торможения 290 К.

В работе [2] рассматривалась задача о моделировании взаимодействия потока воздуха с гибкой пластиной. Актуальность задачи заключается в том, что при проектировании строительных конструкций необходимо учитывать аэроупругие эффекты, возникающие в результате взаимодействия

аэродинамических сил и вызванных ими упругих механических реакций конструкций.

В ходе работы рассматривалось турбулентное течение воздуха в окрестности пластины с параметрами $P = 1.0$ атм, $U_0 = 5 \frac{M}{c}$, установленной по нормали к потоку и жестко закрепленной одним концом на нижней стенке. Пластина состоит из сплава алюминия, плотность равна $\rho = 2770$ кг/м³. Расчеты выполнены для атмосферного воздуха с плотностью $\rho = 1.225$ кг/м³ и вязкостью $\mu = 1.789 \cdot 10^{-5} \frac{Hc}{M^2}$. На нижней стенке и границе пластинки задано граничное условие прилипания. На выходе из расчетной области принято условие постоянства статического давления. На верхней границе области выполняется условие симметрии.

Данная задача решается в несколько этапов. На первом этапе выполнено моделирование обтекания пластины со скоростью набегающего потока $U_\infty = 5$ м/с. Для предварительного исследования структуры течения сначала проведен гидродинамический расчет течения в окрестности абсолютно жесткой пластины. При тех же параметрах потока выполнено двустороннее связывание гидродинамического расчета течения воздуха и прочностного расчета упругой пластины. На втором этапе рассмотрено обтекание пластины нестационарным потоком воздуха меняющимся по гармоническому закону $U_\infty = 5 \sin 3t + 5$ с характерным периодом $T = 2,08$ с. Максимальная скорость воздуха в ядре потока $U_{\infty max} = 10 \frac{M}{c}$, а число Рейнольдса $Re = 5.1 \cdot 10^5$.

Исходя из результатов, полученных в работе и полученной картины течения период времени, можно разбить на несколько этапов. На первом этапе скорость внешнего течения достигает минимума. В окрестности пластины существуют два вихря за пластиной и два вихря перед пластиной. В связи с ростом скорости вихрь, образованный за пластиной, объединятся с рециркуляционной зоной за пластиной. На втором этапе в дальнейшем росте скорости набегающего потока образовавшийся на первом этапе единый вихрь растет и воздействует на подветренную сторону пластины. Вихри, образованные перед пластинкой под действием интенсивного внешнего потока, разбиваются на более мелкие и примыкают к наветренной стороне пластины. На третьем этапе под увеличением скорости внешнего течения вихрь, образованный за пластинкой на первом этапе смещается по потоку. За пластиной снова образуется вихревая зона, которая увеличивается вдоль подветренной стенки пластинки. Перед пластиной образуется отрывная зона. На четвертом этапе скорость внешнего потока, достигнув максимума, начнет замедляться. Вихрь образованный за пластиной начнет увеличиваться и смещается в направлении, обратном основному потоку. Отрывная зона в угле за пластинкой испытывает

влияние этого вихря. Рециркуляционная зона перед пластиной тоже растет, сдвигаясь вдоль нижней стенки навстречу основному потоку, формируя вихри перед стенкой при взаимодействии с внешним потоком. Когда скорость начинает возрастать, повторяется первый этап.

В работе [3] экспериментально были получены теневые картины в плоскости симметрии (рис.1), на которых изображены системы скачков, положение начала перехода и отрыва пограничного слоя. Распределения давления, полученные на плоскости непосредственно перед щитком и вблизи боковых кромок пластины, указывают на пространственный характер течения. В случае пространственного характера течения обтекания различных преград была зарегистрирована область сверхзвукового возвратного течения, положение которой зависит от высоты преграды и от числа Рейнольдса. Качественно проиллюстрированы процессы в пограничном слое и зафиксировано, что при изменении числа Рейнольдса точка перехода пограничного слоя смещается.

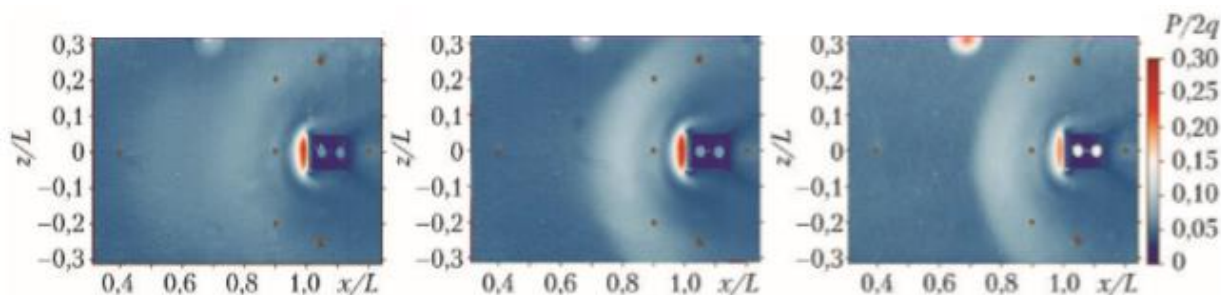


Рис.1. Влияние числа Рейнольдса на течение перед преградой

При решении задач газовой динамики, связанных с проектированием и созданием сверхзвуковых летательных аппаратов, необходимо решать задачи об обтекании тел различной формы сверхзвуковым потоком газа. Главные особенности обтекания клиновидных тел подробно рассмотрены в работе [4]. В рассмотренной работе для решения задачи об обтекании сверхзвуковым потоком газа клина конечной ширины использовался метод сквозного счета. Рассматривается клин с углом раствора $\delta = 15^\circ$, боковые поверхности клина плоские. На поверхности ставится условие непротекания. В начале был задан сверхзвуковой поток с числом $M_\infty = 2.5$ под углом атаки $\alpha = 15^\circ$ к оси x . Численное решение задачи сравнивалось с экспериментом, модель клина в аэродинамической трубе полностью соответствовала численному решению. В результате было получено, что при обтекании клина поток разбивается на несколько областей течения:

- 1) невозмущенный набегающий поток,
- 2) плоское двумерное течение,
- 3) область конического или близкого к коническому течения,
- 4) полностью трехмерное течение.

Кроме того, в области отрыва в поперечном сечении поток, ускоряясь, перерасширяется, затем у боковой поверхности клина образуется область поджатия потока. При этом уменьшаются обе компоненты скорости, следовательно, уменьшается полное число Маха.

При обтекании пластинки конечной ширины, расположенной перпендикулярно потоку, рассматривается ряд схем течений с отрывом потока, рассмотренные в работе [5].

В схеме Кирхгофа (рис.2 б) предполагается, что с концов пластинки происходит срыв струй γ и γ' , а между ними образуется бесконечная застойная зона. Кривые γ и γ' заранее не задаются, а определяются из условия постоянства на них давления (а, следовательно, и скорости). Схема Кирхгофа имеет несколько существенных дефектов даже в простейшем случае обтекания плоской пластинки. Например, застойная зона, которая в действительности имеет конечные размеры, в схеме Кирхгофа бесконечна и для ее создания в этой схеме требуется бесконечно большая энергия.

В сороковые года Эфрос предложил новую модель отрыва (рис.3), в которой срывающаяся с пластинки струя γ возвращается обратно к пластинке и, проходя через нее, уходит в $-\infty$ вдоль оси симметрии. Предполагается, что вдоль этой струи скорость постоянна, а значения скоростей всюду в потоке меняются непрерывно. Эта модель дает хорошо согласующееся с опытом распределение давления на пластинке; наличие обратной струйки так же наблюдается экспериментально. Дефектом модели является физически невозможное предположение о том, что обратная струя «отсасывается» пластинкой и после прохождения пластинки течет по уже занятому течением пространству, не смешиваясь со старым течением.

Дефект схемы Эфроса устраняется в схеме Лаврентьева (рис.4), которая дает примерно такое же распределение давления на пластинке. В ней делается допущение, что за обтекаемой пластинкой возникают два жидких кольца δ и δ' , которые ограничены пластинкой, отрезком оси симметрии, струями γ и γ' , сходящими с краев пластинки, и замкнутыми линиями тока γ_0 и γ'_0 ограничивающими кольца изнутри. Неизвестные линии γ , γ' , и γ_0 , γ'_0 определяются из следующих условий: на γ_0 , γ'_0 скорость имеет заданную постоянную величину, а на γ , γ' скорость движения в кольцах совпадает со скоростью основного потока, обтекающего пластинку, дополненную линиями γ , γ' .

Для обтекания пластинки и выпуклых плоских тел (симметричных относительно горизонтальной оси) рассматривается также модель отрывного течения идеального газа (рис.5), когда область течения разбивается на три зоны, в двух из которых течение имеет постоянную завихренность $\pm\omega$, а в третьей-

потенциально. Линии γ , γ' и величина ω подбираются из условий обтекания и непрерывности поля скоростей вне контура Γ . При заданной скорости в бесконечности для однозначного определения решений нужно задать еще размеры завихренных зон (например, положение точек α и α' срыва струи с обтекаемого контура). Доказательство существования и единственности решения этой задачи еще не получено. Однако для ряда тел проведено численное решение задачи (М.А. Гольдштик), которое дало хорошее совпадение с экспериментальными данными.

В газовой динамике и гидромеханике наиболее важным является визуализация полной картины течения и особенности течения в спутном следе за телом, так же визуализация течений играла важную роль в исследовательской работе и позволяет обрести качественное понимание явлений, а в последнее время получить количественные результаты.

На Рис.6 представлены картины обтекания тел потоком газа продемонстрированные в работе [6].

На теневой фотографии (рис.6 а) показан шар диаметром 1/2 дюйма, схваченный при его движении в воздухе. За тем участком головной волны, который находится непосредственно перед телом вдоль его поверхности вплоть до угла 45° , течение дозвуковое. На угле примерно 90° ламинарный пограничный слой отрывается, создавая косую ударную волну, и быстро становится турбулентным. Флюктуирующий след порождает систему слабых возмущений, постепенно сливающихся во вторую ударную волну.

Картина течения при обтекании потоком газа осесимметричного тела (рис.6 б) в аэродинамической трубе практически схожа с симметричным телом, разница лишь в том, что расстояние отхода головной ударной волны примерно вдвое меньше при том же числе Маха. Во всех остальных отношениях структура течения остается такой же – видна точка отрыва и косая ударная волна в месте обратного присоединения. Головная волна пересекает пристеночные пограничные слои по двум кривым линиям справа.

На теневой фотографии (рис.6 в) показан круговой цилиндр в свободном полете при небольшом отрицательном угле атаки. Видно, что косая ударная волна, идущая от точки обратного присоединения пограничного слоя, сливается с волной, идущей от следа. На больших расстояниях эти волны образуют хвостовую часть всплеска давлений от N-образной волны.

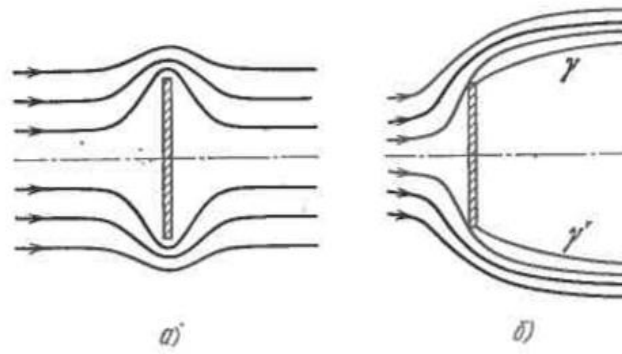


Рис.2. а) схема безотрывного обтекания; б) схема Кирхгофа.

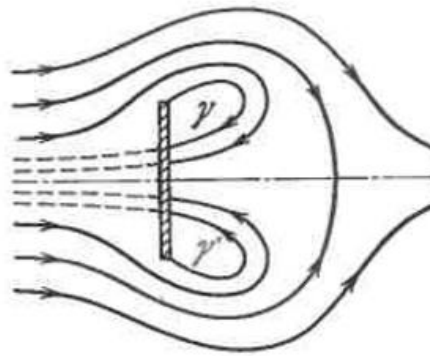


Рис.3. Схема обтекания пластинки конечной ширины Эфроса.

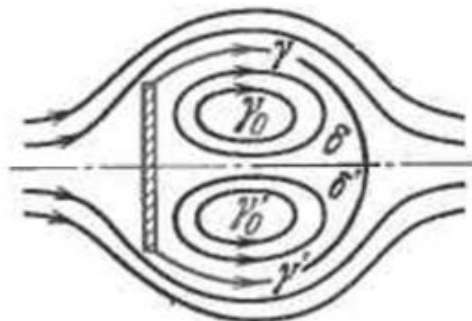


Рис.4. Схема обтекания пластинки конечной ширины Лаврентьева.

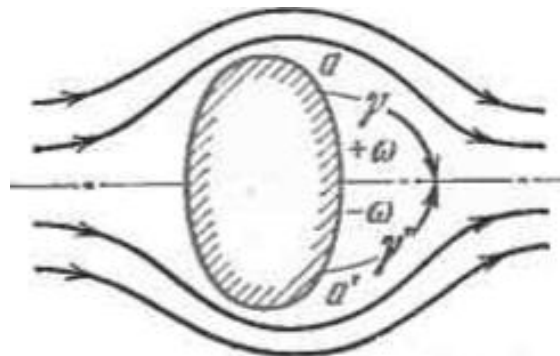
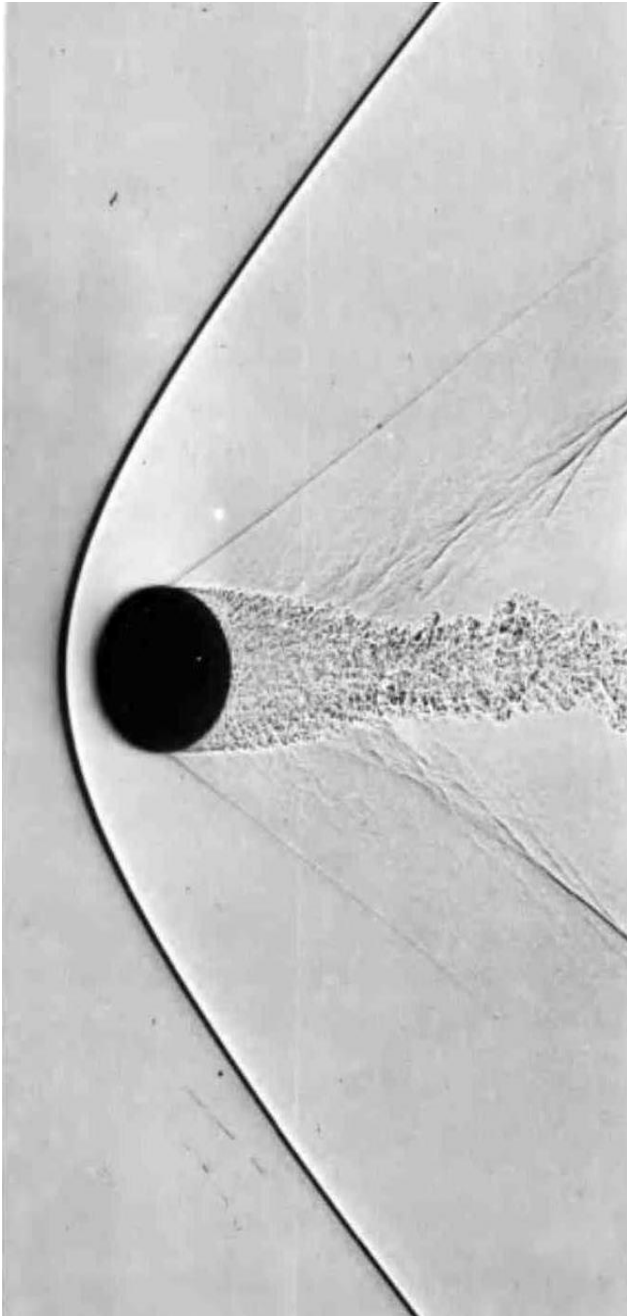
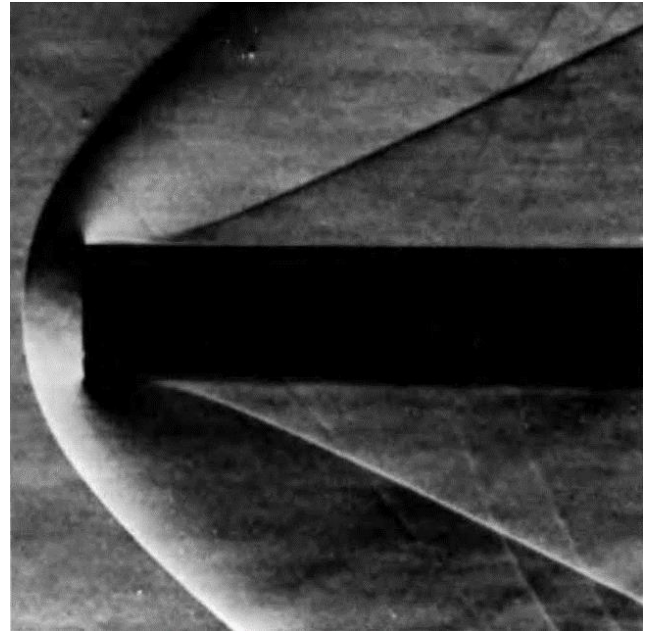


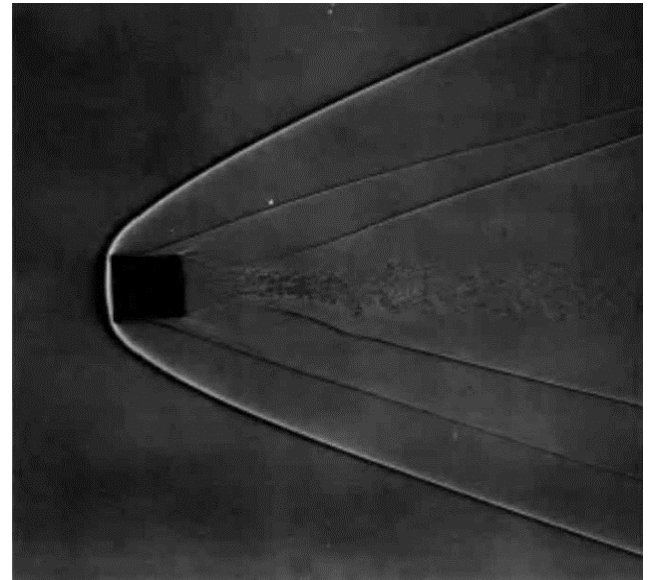
Рис.5 Схема обтекания выпуклых тел



а) Шар, движущийся при $M=1.53$



б) Цилиндр с плоской передней частью в при $M=2.0$



в) Цилиндр, движущийся при $M=3.6$ в воздухе

Рис.6

2. Постановка задачи.

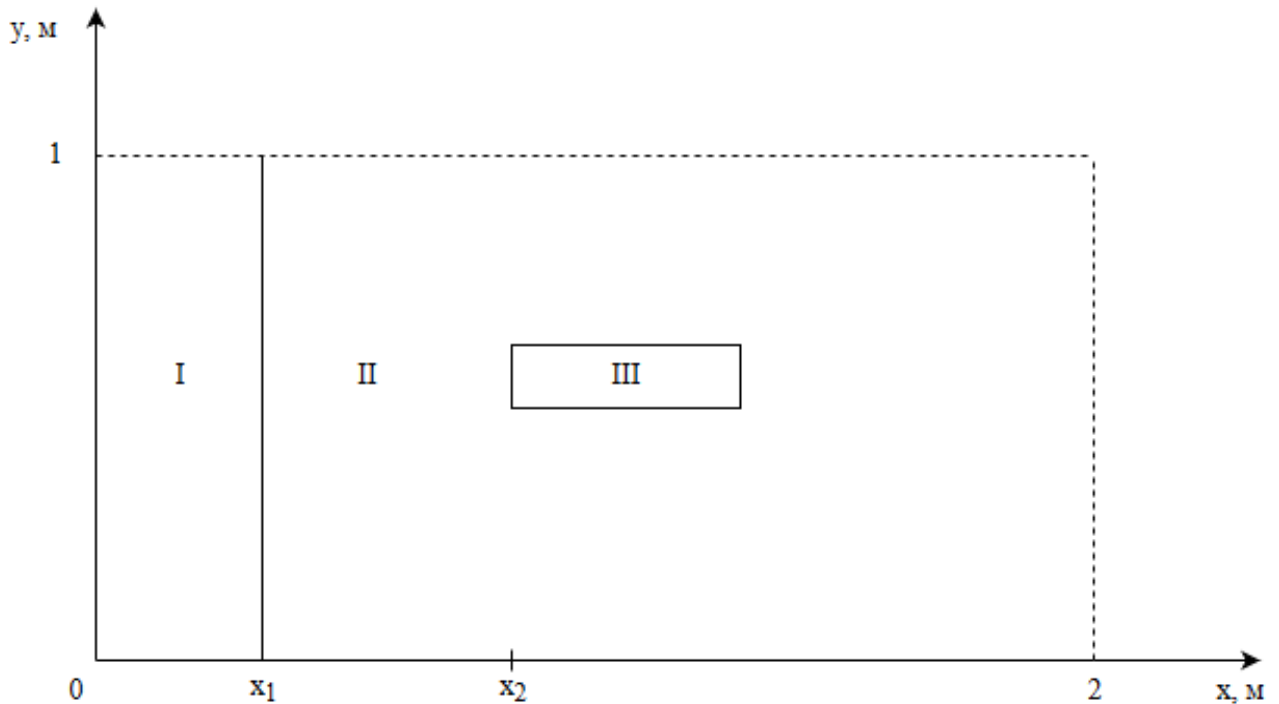


Рис.7. Расчетная область

Пусть в некоторый момент времени сформировалась плоская ударная волна (область I на рис.7), давление на фронте которой составляет $20 \cdot 10^5$ Па. На расстоянии x_2 от начала координат находится пластинка размерами $a \times b$ (область III на рис.7). Область II-невозмущенный газ с параметрами $p = 10^5$ Па, $\rho = 1.21 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $W = 0$. Плотность и скорость за УВ рассчитывались из соотношений Ренкина-Гюгонио:

$$\rho_+ = \rho_- \left(\frac{(\gamma + 1)p_+ + (\gamma - 1)p_-}{(\gamma + 1)p_- + (\gamma - 1)p_+} \right)$$

$$u_+ = u_- + \sqrt{(p_+ - p_-) \left(\frac{1}{\rho_-} - \frac{1}{\rho_+} \right)}$$

Граничные условия: на всех границах области задается условия свободного протекания. На пластинке вводится слой фиктивных ячеек, для того, чтобы не нарушать единообразия вычислений и не применять особые формулы для граничных ячеек, в фиктивном слое задаются условия непротекания (нормальная к пластине компонента скорости меняет знак на противоположный, а остальные параметры сносятся туда без изменения).

В качестве математической модели была взята система дифференциальных уравнений Эйлера в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{W}) &= 0, \\
\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u \mathbf{W}) + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v \mathbf{W}) + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\
\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho E \mathbf{W}) + \operatorname{div}(p \mathbf{W}) &= 0.
\end{aligned}
\tag{1}$$

где, ρ – плотность, u, v – компоненты вектора скорости \mathbf{W} , E – удельная полная энергия, p – давление.

Систему (1) замыкает уравнение состояния для идеального газа:

$$p = \rho e(\gamma - 1).$$

где e – внутренняя энергия, γ – показатель адиабаты.

2.1 Метод расчета.

На основе метода «частиц в ячейках» Харлоу, Белоцерковским О.М и Давыдовом Ю.М ([5]) был предложен метод «крупных частиц». Разница между методами в том, что вместо совокупности частиц в ячейках рассматривается масса целой ячейки, поэтому на основе конечно-разностных представлений законов сохранения рассматриваются нестационарные и непрерывные потоки масс ячейки через Эйлерову сетку. При таком подходе используются законы сохранения, записанные в форме уравнения баланса для ячейки конечных размеров.

Данный метод, является промежуточным между методов дискретных частиц в ячейках и обычными конечно-разностными подходами, так как вычисления проводятся аналогично методу «частиц в ячейках», но на всех этапах сохраняется структура конечно-разностных схем. В методе используется расщепление начальной системы уравнений по физическим процессам. На каждом из этапов расчета временного цикла, в зависимости от характера решения, рассматриваются различные виды аппроксимаций.

Как было отмечено выше, особенностью данного метода является расчет каждого шага по времени разбивается (по принципу Харлоу) на три этапа:

1) *Эйлеров этап*. На данном этапе расчета жидкость подразумевается «замороженной», а изменения претерпевают только величины, относящиеся к ячейке в целом. Следовательно, члены уравнений вида $div(\rho W) = 0$.

Из уравнения неразрывности, следует, что поле плотности будет постоянным («замороженным»), поэтому в системе уравнений (1), можно вынести ρ из-под знака дифференциала и решить (1) относительно производных u, v, E .

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \rho \frac{\partial E}{\partial t} + div(\rho W) &= 0,\end{aligned}$$

Запишем полученную систему дифференциальных уравнений в виде конечно-разностных уравнений первого порядка аппроксимации по времени и второго порядка по пространству:

$$\tilde{u}_{i,j}^n = u_{i,j}^n - \frac{p_{i+1/2,j}^n - p_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}^n},$$

$$\tilde{v}_{i,j}^n = v_{i,j}^n - \frac{p_{i,j+1/2}^n - p_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}^n},$$

$$\tilde{E}_{i,j}^n = E_{i,j}^n - \left[\frac{p_{i+1/2,j}^n u_{i+1/2,j}^n - p_{i-1/2,j}^n u_{i-1/2,j}^n}{\Delta y} + \frac{p_{i,j+1/2}^n v_{i,j+1/2}^n - p_{i,j-1/2}^n v_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} \right] \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}^n}.$$

Величины с дробными индексами относятся к границам ячеек.

$$u_{i+1/2,j}^n = \frac{(u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n)}{2}$$

$$v_{i,j+1/2}^n = \frac{(v_{i,j}^n + v_{i,j+1}^n)}{2}$$

Промежуточные значения параметров потока $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{E}$, получены на временном слое $t^n + \Delta t$ в предположение, что поля плотности неизменны.

2) Лагранжев этап. На этом этапе рассчитываются потоки массы ΔM через границы ячеек, на $t^n + \Delta t$ временном слое. При этом предполагается, что масса переносится только за счет скорости направленной по нормали.

$$\Delta M_{i+1/2,j}^n = \langle \rho_{i+1/2,j}^n \rangle \langle u_{i+1/2,j}^n \rangle \Delta y \Delta t$$

Угловыми скобками обозначены плотность и скорость на границе ячейки. Выбор этих величин сильно влияет на устойчивость и точный расчет, поэтому их выбор важен. Для формул нахождения ΔM^n любого порядка точности необходимо учитывать направление потока на границе.

Формулы для нахождения ΔM^n второго порядка точности.

Если $\tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n > 0$ и

$$\tilde{u}_{i+1/2,j}^n = \tilde{u}_{i,j}^n + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right)_{i,j}^n \frac{\Delta x}{2} = \tilde{u}_{i,j}^n + \frac{\tilde{u}_{i+1,j}^n - \tilde{u}_{i-1,j}^n}{4} > 0,$$

то

$$\Delta M_{i+1/2,j}^n = \left(\tilde{u}_{i,j}^n + \frac{\tilde{u}_{i+1,j}^n - \tilde{u}_{i-1,j}^n}{4} \right) \left(\rho_{i,j}^n + \frac{\rho_{i+1,j}^n - \rho_{i-1,j}^n}{4} \right) \Delta y \Delta t.$$

Если $\tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n < 0$ и

$$\tilde{u}_{i+1/2,j}^n = \tilde{u}_{i+1,j}^n - \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right)_{i+1,j}^n \frac{\Delta x}{2} = \tilde{u}_{i+1,j}^n - \frac{\tilde{u}_{i+2,j}^n - \tilde{u}_{i,j}^n}{4} < 0,$$

то

$$\Delta M_{i+1/2,j}^n = \left(\tilde{u}_{i+1,j}^n - \frac{\tilde{u}_{i+2,j}^n - \tilde{u}_{i,j}^n}{4} \right) \left(\rho_{i+1,j}^n + \frac{\rho_{i+2,j}^n - \rho_{i,j}^n}{4} \right) \Delta y \Delta t.$$

В противном случае $\Delta M_{i+1/2,j}^n = 0$.

Использование в описанных выше вычислениях скоростей на предыдущем временном слое приводит к неустойчивости. Во избежание этого, важен порядок вычислений: сначала Эйлеров этап (вычисление \tilde{u}, \tilde{v}), следом Лагранжев этап для расчета ΔM^n .

Формулы для нахождения ΔM^n первого порядка точности

$$\Delta M_{i+1/2,j}^n = \begin{cases} \rho_{i,j}^n \frac{\tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n}{2} \Delta y \Delta t, & \text{если } \tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n > 0, \\ \rho_{i+1,j}^n \frac{\tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n}{2} \Delta y \Delta t, & \text{если } \tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n < 0. \end{cases}$$

$$\Delta M_{i,j+1/2}^n = \begin{cases} \rho_{i,j}^n \frac{\tilde{v}_{i,j}^n + \tilde{v}_{i,j+1}^n}{2} \Delta x \Delta t, & \text{если } \tilde{v}_{i,j}^n + \tilde{v}_{i,j+1}^n > 0, \\ \rho_{i,j+1}^n \frac{\tilde{v}_{i,j}^n + \tilde{v}_{i,j+1}^n}{2} \Delta x \Delta t, & \text{если } \tilde{v}_{i,j}^n + \tilde{v}_{i,j+1}^n < 0. \end{cases}$$

Расчеты и аналитические исследования показали, что формулы первого порядка точности дают более устойчивый счет, чем формулы второго порядка. В данном случае, возможно использование значений скорости на предыдущем временном слое, без потери устойчивости. Поэтому порядок вычислений не важен.

3) Заключительный этап. На этом этапе рассчитываются окончательные поля Эйлеровых параметров потока на временном слое t^{n+1} . Уравнения этого этапа представляют собой законы сохранения массы M , импульса P и полной энергии E .

$$M^{n+1} = M^n + \sum \Delta M_{\Gamma P}^n,$$

$$P^{n+1} = P^n + \sum \Delta P_{\Gamma P}^n,$$

$$E^{n+1} = E^n + \sum \Delta E_{\Gamma P}^n,$$

Эти уравнения показывают, что внутри поля течения нет источников и стоков M , P и E . Изменения этих параметров осуществляется только за счет их взаимодействия на внешней границе области течения. Исходя из этого окончательные значения параметров потока ρ и $X = (u, v, E)$ на следующем временном слое t^{n+1} вычисляются по формулам:

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n + \frac{\Delta M_{i-1/2,j}^n + \Delta M_{i,j-1/2}^n - \Delta M_{i+1/2,j}^n - \Delta M_{i,j+1/2}^n}{\Delta x \Delta y},$$

$$X_{i,j}^{n+1} = \tilde{X}_{i,j}^n + \frac{\tilde{X}_{i-1,j}^n \Delta M_{i-1/2,j}^n + \tilde{X}_{i,j-1}^n \Delta M_{i,j-1/2}^n}{\rho_{i,j}^{n+1} \Delta x \Delta y} - \frac{\tilde{X}_{i,j}^n \Delta M_{i,j+1/2}^n - \tilde{X}_{i,j}^n \Delta M_{i+1/2,j}^n}{\rho_{i,j}^{n+1} \Delta x \Delta y}$$

На каждом этапе внутри области течения имеет место строгое сохранение массы, импульса и энергии. Общее изменение этих величин за время Δt равно

сумме их изменений на Эйлеровом этапе и заключительном этапе, поэтому и в целом разностная схема является консервативной.

В данной работе используется модифицированный метод «крупных частиц». Модификация заключается в использование псевдовязкости которая представляет собой сумму линейной и квадратичной искусственной вязкости. Такой подход обусловлен тем, что при использовании линейной вязкости появляется эффект “размазывания” фронта ударной волны, чего лишена квадратичная вязкость, но существует и недостаток квадратичной вязкости, положение ударной волны, посчитанной численно отличается от положения реальной ударной волны. Исходя из выше описанных недостатков для усреднения и улучшения результата в работе используется сумма квадратичной и линейной вязкости.

Для расчета ударной волны без явного выделения на сетке ее фронта применяется метод “размазывания” фронта за счет введение в систему разностных уравнений диссипативных членов (псевдовязкость или искусственная вязкость). Эти члены моделируют действие реальной вязкости, т.е преобразуют кинетическую энергию колебательных движений в тепловую энергию.

$$q_{i+1/2,j}^n = \begin{cases} 0.5\rho_{i+1/2,j}^n \left(a \sqrt{\frac{\gamma p_{i+1/2,j}^n}{\rho_{i+1/2,j}^n}} + b u_{i+1/2,j}^n \right) u_{i+1/2,j}^n, & u_{i+1/2,j}^n > 0 \\ 0, & u_{i+1/2,j}^n \leq 0 \end{cases}$$

$$q_{i-1/2,j}^n = \begin{cases} -0.5\rho_{i-1/2,j}^n \left(a \sqrt{\frac{\gamma p_{i-1/2,j}^n}{\rho_{i-1/2,j}^n}} + b u_{i-1/2,j}^n \right) u_{i-1/2,j}^n, & u_{i-1/2,j}^n > 0 \\ 0, & u_{i-1/2,j}^n \leq 0 \end{cases}$$

$$q_{i,j+1/2}^n = \begin{cases} 0.5\rho_{i,j+1/2}^n \left(a \sqrt{\frac{\gamma p_{i,j+1/2}^n}{\rho_{i,j+1/2}^n}} + b v_{i,j+1/2}^n \right) v_{i,j+1/2}^n, & v_{i,j+1/2}^n > 0 \\ 0, & v_{i,j+1/2}^n \leq 0 \end{cases}$$

$$q_{i,j-1/2}^n = \begin{cases} -0.5\rho_{i,j-1/2}^n \left(a \sqrt{\frac{\gamma p_{i,j-1/2}^n}{\rho_{i,j-1/2}^n}} + b v_{i,j-1/2}^n \right) v_{i,j-1/2}^n, & v_{i,j-1/2}^n > 0 \\ 0, & v_{i,j-1/2}^n \leq 0 \end{cases}$$

Коэффициенты а и в подбираются эмпирическим путем.

Псевдовязкость участвует в вычислениях лишь на фронте ударной волны, поэтому на волнах разрежения вязкость полагается равной нулю.

Таким образом, псевдовязкость есть искусственный механизм, позволяющий осуществить сквозной расчет ударных волн без явного их выделения на сетке, а разностная схема газовой динамики с псевдовязкостью является однородной. Под областью фронта в этом случае принимается зона резкого изменения параметров течения.

Недостаток псевдовязкости связан с шириной ударного перехода, обусловленного действием искусственной вязкости, не имеет никакого отношения к реальной ширине фронта ударной волны, которая составляет несколько длин свободного пробега молекул.

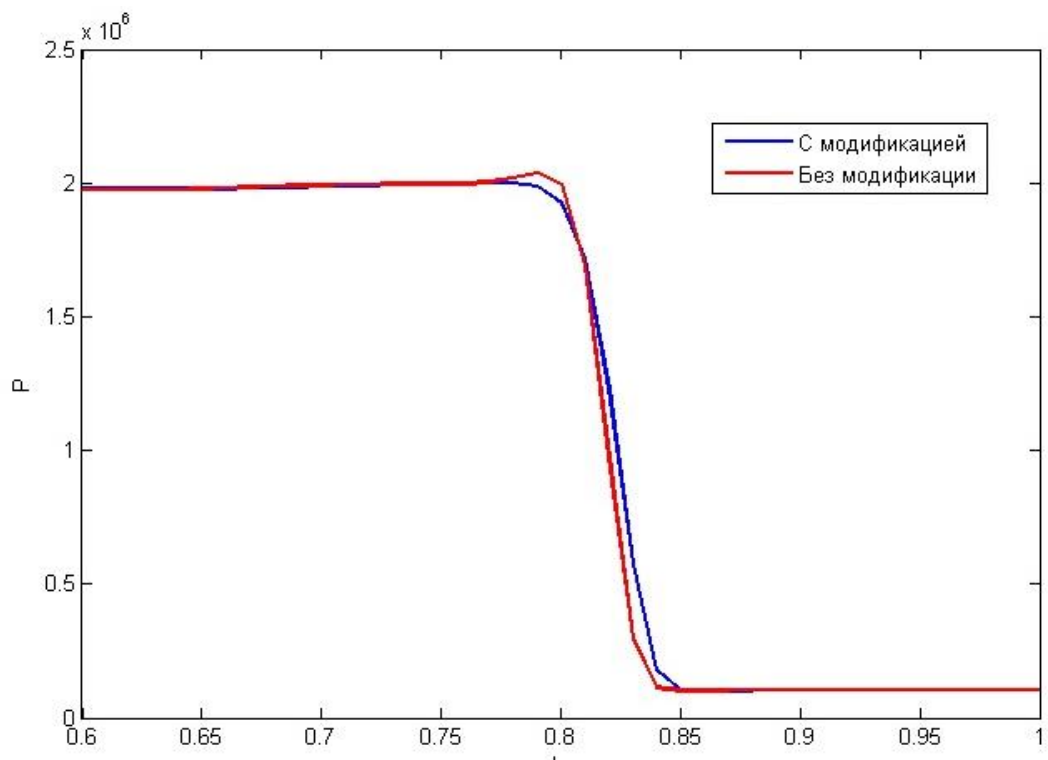


Рис.8 Распределения давления на момент времени 0.00023 с.

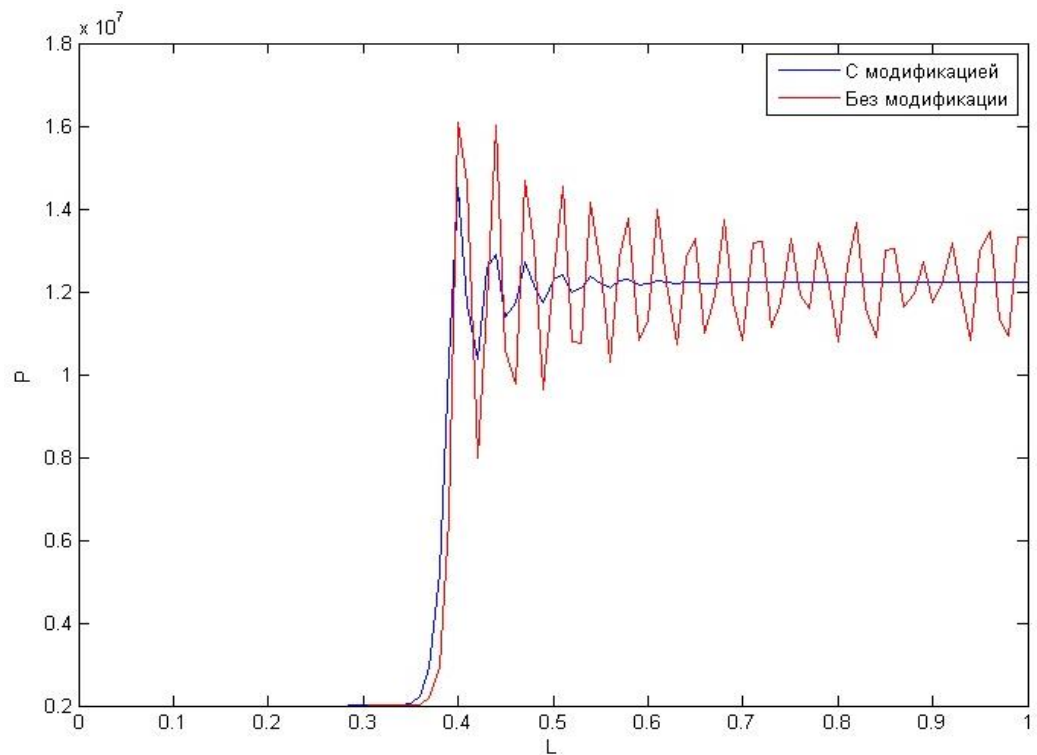


Рис.9 Распределение давления после отражения ударной волны от стенки, момент времени 0.0015 с.

2.2 Исследование сеточной сходимости.

При численном решении задач механики сплошной среды важно учитывать размер, вид и количество ячеек расчетной сетки, чтобы качественно описать решение поставленной задачи. Размер и количество ячеек влияют на точность и время счета программы, чем меньше разбиение сетки, тем меньше время расчета, однако при этом теряется точность счета программы, что в свою очередь влияет на качественную картину и характерные особенности задачи. При увеличении разбиения сетки время счета увеличивается, но полученные результаты более точно описывают характерные особенности задачи. Вид ячеек, позволяет описать более реалистично полученное решение. Сетка может быть подвижной или не подвижной в пространстве, это зависит от конкретной постановки задачи. Таким образом, выбор сетки является важной задачей при моделировании газодинамических процессов, который осуществляется исследованием на сеточную сходимость.

Существуют несколько способов исследования сеточной сходимости основными являются: алгоритм адаптации расчетной сетки и исследование путем дробления сетки. В работе [7] исследуется класс адаптивно-подвижных расчетных сеток, состоящих из фиксированного числа узлов, которые по ходу решения перераспределяются и собираются в зонах с быстрым изменением газодинамических переменных. Среди наиболее распространенных подходов в области динамической адаптации сеток выделяется вариационный метод, который основывается на идеи минимизации функционала, включающего меры гладкости, ортогональности линий сетки и объема ячеек, и подразумевает решение специальных уравнений для генерации сетки на каждом расчетном шаге одновременно с поиском самого решения. Основное преимущество метода заключается в возможности получения невырожденной гладкой почти ортогональной сетки со сгущением узлов в тех областях, где необходимо высокое разрешение.

В данной работе рассматривается неподвижная ортогональная сетка. Разбиение сетки проводилось простым исследованием сеточной сходимости с помощью численной реализации задачи в двумерной постановке. Путем дробления сетки было найдено оптимальное разбиение, после которого изменение параметров на ударной волне практически не меняется (рис.10).

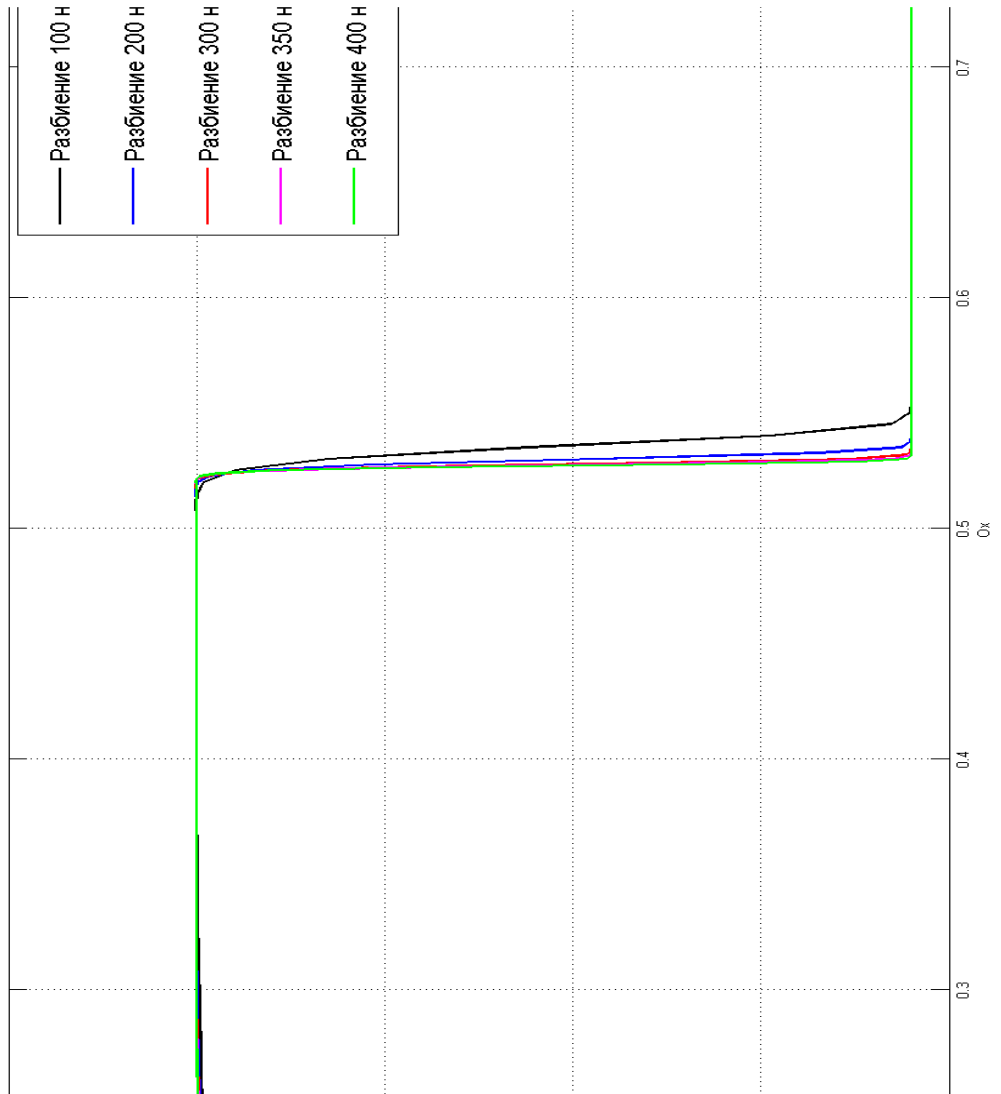


Рис.10 Распределение давления на один момент времени, для различных разбиений сетки.

2.3 Тестирование численного алгоритма.

Тестирование численного алгоритма проводилось на решении одномерных задач. Полученные решения сравнивались с аналитическими решениями, представленными в работе [8]. В качестве тестовых задач были взяты задача о распространении сильной ударной волны в одноатомном газе и задача о распространении сильной ударной волны в многоатомном газе.

Рассмотрим первую задачу.

В области $0 \leq x_0 \leq 1$ в момент $t = 0$ находится одноатомный идеальный газ с уравнением состояния $p = \rho e(\gamma - 1)$, где e – внутренняя энергия, и параметрами $\gamma=5/3$, $P=0.0$ Па, $U=0.0$ м/с², $\rho = 1.0$ кг/м³. Величина x_0 – это эйлерова координата в момент $t = 0$. При расчётах по разностной схеме в лагранжевых координатах величина x_0 является лагранжевой координатой. При $t > 0$ на левой границе ($x_0 = 0$) задана скорость $U_g(t) = 1$, на правой границе ($x_0 = 1$) задана скорость $U = 0$.

Величины за фронтом ударной волны, и скорость фронта W определяются из уравнений:

$$P = \frac{(\gamma + 1)(U - U_0)^2}{2V_0}, \quad U = U_0 \pm \sqrt{\frac{2PV_0}{(\gamma + 1)}}, \quad (2)$$

$$W = P/(U - U_0), \quad (3)$$

$$V = V_0 - (U - U_0)^2/P, \quad E = 0.5(U - U_0)^2. \quad (4)$$

$P=1.33333$ Па, $U=1.0$ м/с², $\rho = 4.0$ кг/м³, число Куранта равно 0.1.

Рассмотрим вторую задачу.

Многоатомный идеальный газ (этилен) с $\gamma=1.25$. Все остальные параметры взяты, как в первой задаче: $P=0.0$ Па, $U=0.0$ м/с², $\rho = 1.0$ кг/м³. Граничные условия взяты такие же, как в первой задаче $U(x_0 = 0, t) = 1$, $U(x_0 = 1, t) = 0$. Величины за фронтом ударной волны и скорость фронта определяются из уравнений (2)-(4): $P=1.125$ Па, $U=0.0$ м/с², $\rho = 9.0$ кг/м³, число Куранта равно 0.1.

Для сравнения показаны рисунки, на которых изображены два графика распределения давления (Рис.11, Рис.12), один из них получен аналитическим путем, другой получен в ходе реализации численного алгоритма.

Из графиков видно, что фронт ударной волны размазан, это связано с тем, что метод крупных частиц имеет осцилляции. Поэтому для более гладкого

решения в систему уравнений вводилась псевдовязкость (искусственная вязкость).

Протестировав численный алгоритм на основе аналитического решения, мы пришли к выводу, что данное решение достаточно хорошо согласуется с аналитическим решением и его можно использовать для решения конкретных реальных задач.

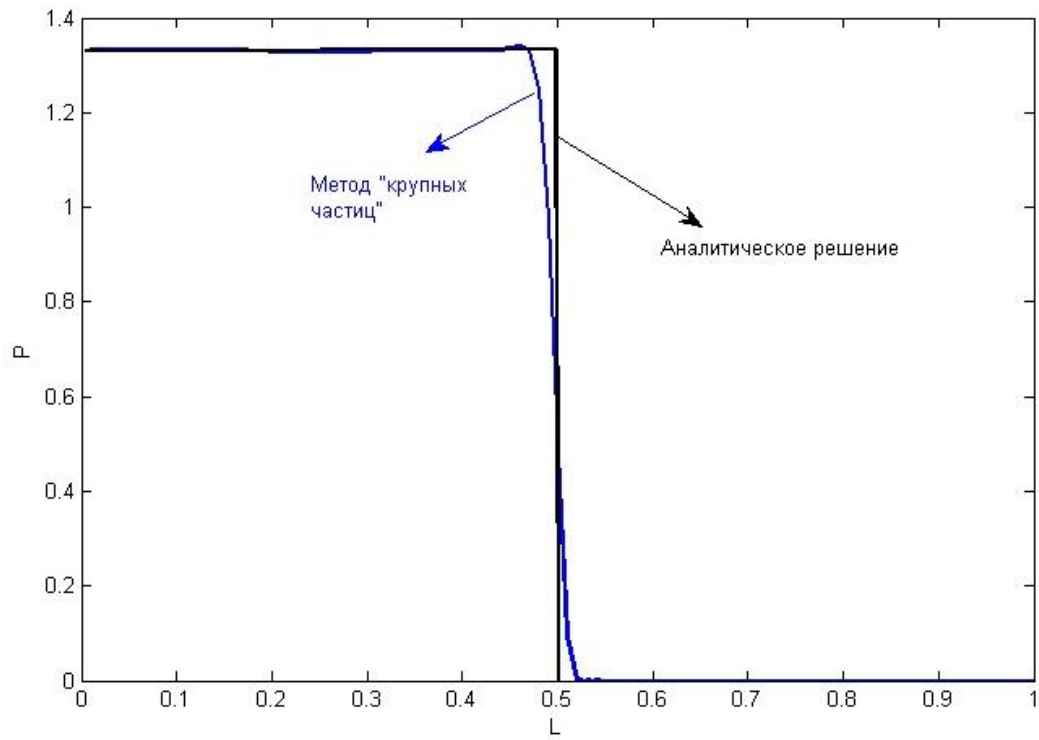


Рис.11 Сравнение аналитического и численного решения для задачи 1, на момент времени $t=0.375$ с.

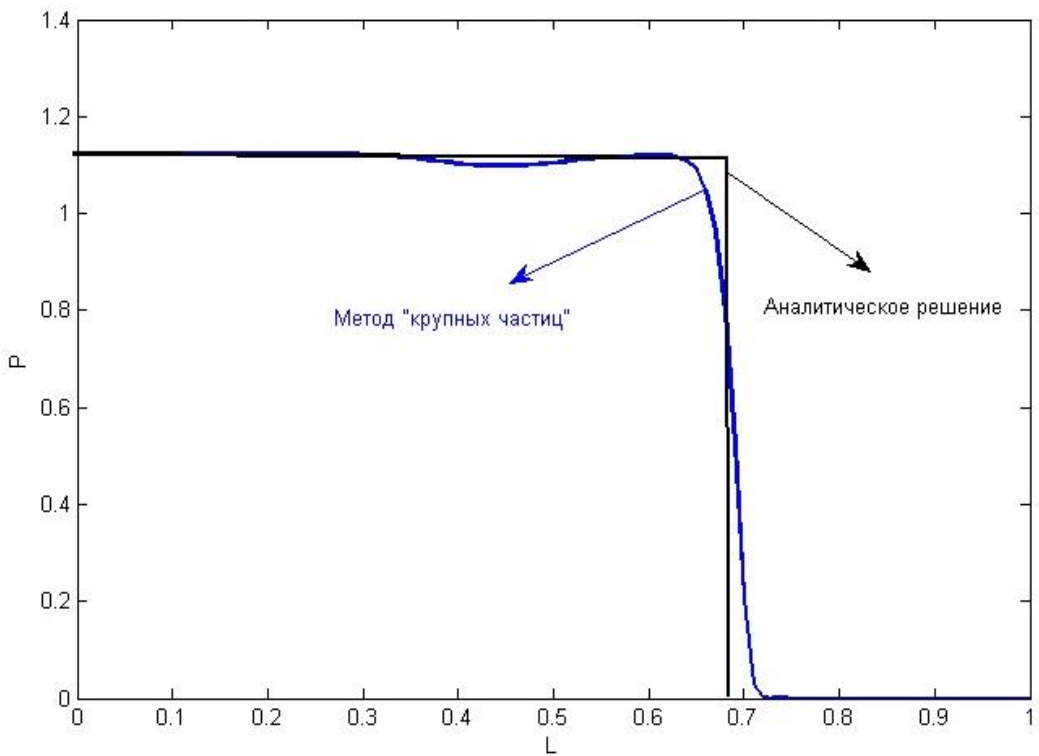


Рис.12 Сравнение аналитического и численного решения для задачи .2, на момент времени $t=0.44$ с.

3. Анализ результатов.

3.1 Численное моделирование обтекания пластины.

Результаты численного моделирования обтекания вертикальной пластины сверхзвуковым потоком газа представлен на Рис.13-16.

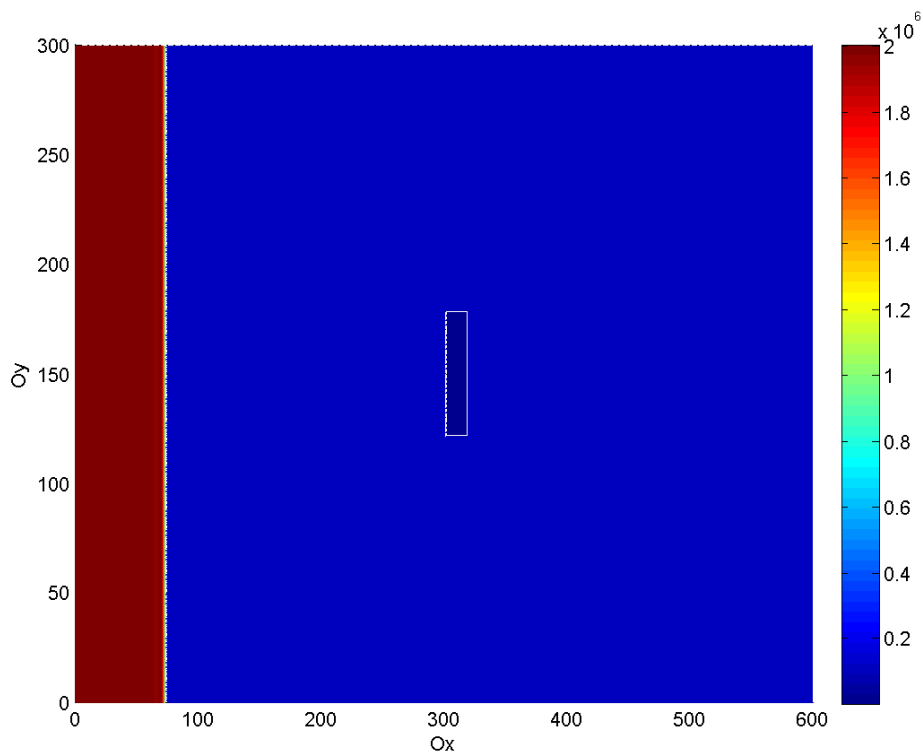
Видно, что картину течения можно разбить на три этапа [9]. Первый этап (рис.14,18) характеризуется образованием головного скачка в результате резкого торможения набегающего сверхзвукового потока газа на пластинку. В результате перед пластинкой формируется зона повышенного давления.

На втором этапе (рис.15, 19) формируется поджатие струек газа у краев пластинки, что приводит к образованию области пониженного давления за пластинкой.

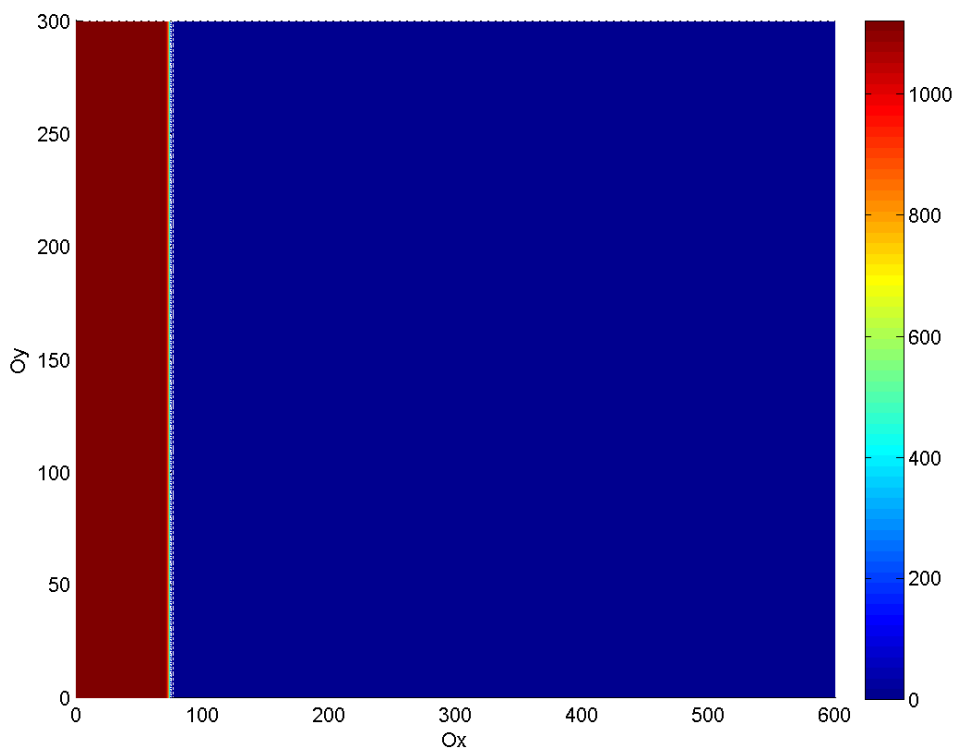
Третий этап обтекания пластинки сверхзвуковым потоком газа представлен на рис.16, 20. Характерной особенностью данного этапа, является значительное увеличение области повышенного давления перед пластинкой и увеличение области пониженного давления за пластинкой. Это приводит к образованию больших вихрей у краев пластинки, которые с течением времени заполняют всё пространство за пластинкой, где формируется спутная струя.

Картина течения при обтекании пластинки расположенной горизонтально к сверхзвуковому потоку газа (рис.17-20) аналогична, как и при вертикальной, отличием является:

- 1) Зона повышенного давления между головным скачком уплотнения и телом значительно меньше, это связано с площадью кромки пластины, расположенной перпендикулярно набегающему потоку.
- 2) Зона разрежения за пластинкой становится меньше, следовательно, образование вихрей будет в значительно узкой области, чем при вертикальной пластинки.
- 3) На горизонтальной пластине наиболее ярко просматривается срыв потока.

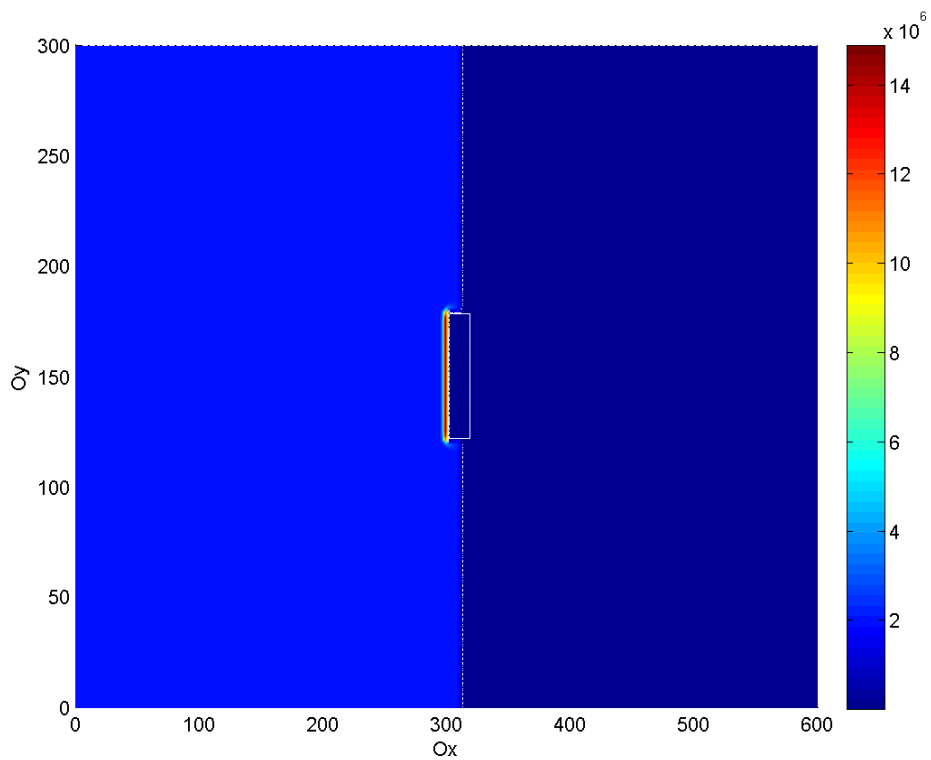


а) Поле давлений

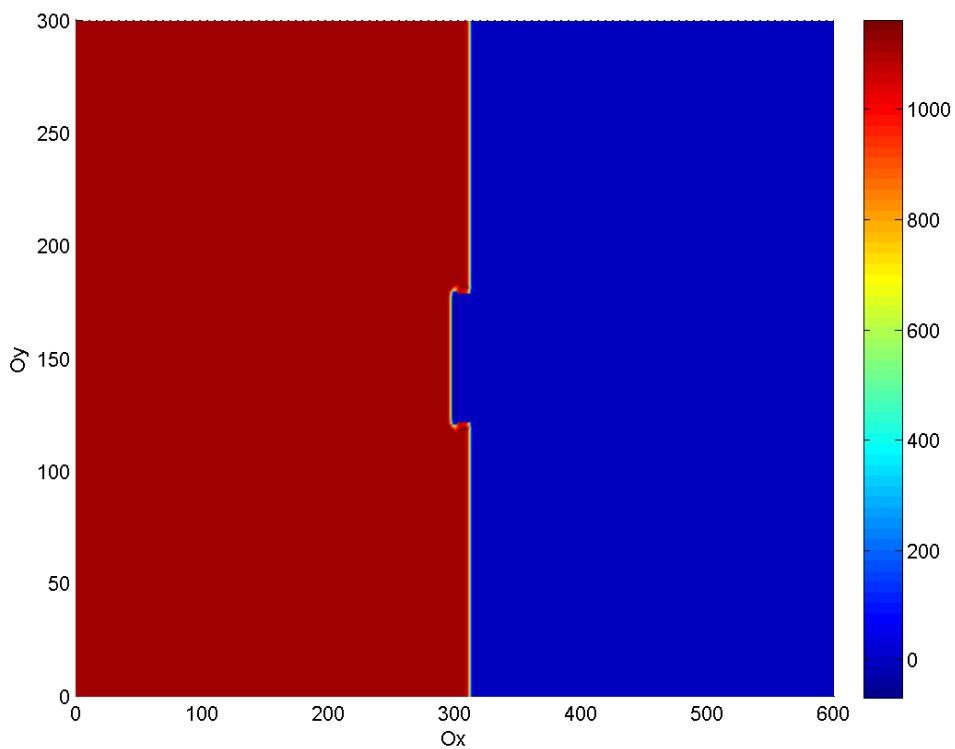


б) Поле скоростей

Рис.13 Картина течения на момент времени $t=0.0$ с.

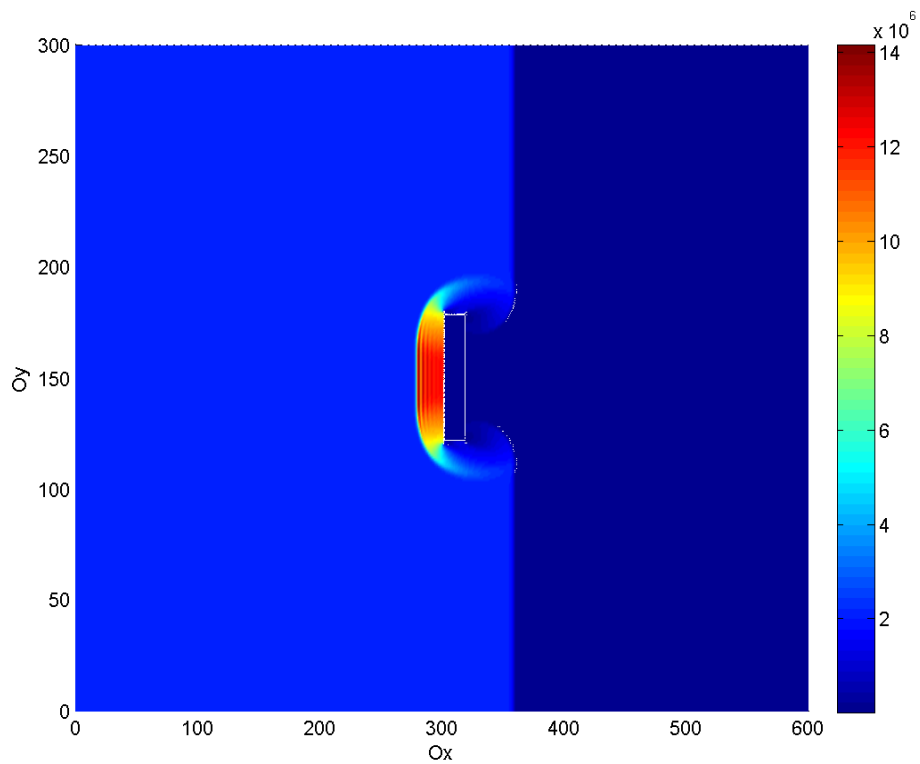


а) Поле давлений

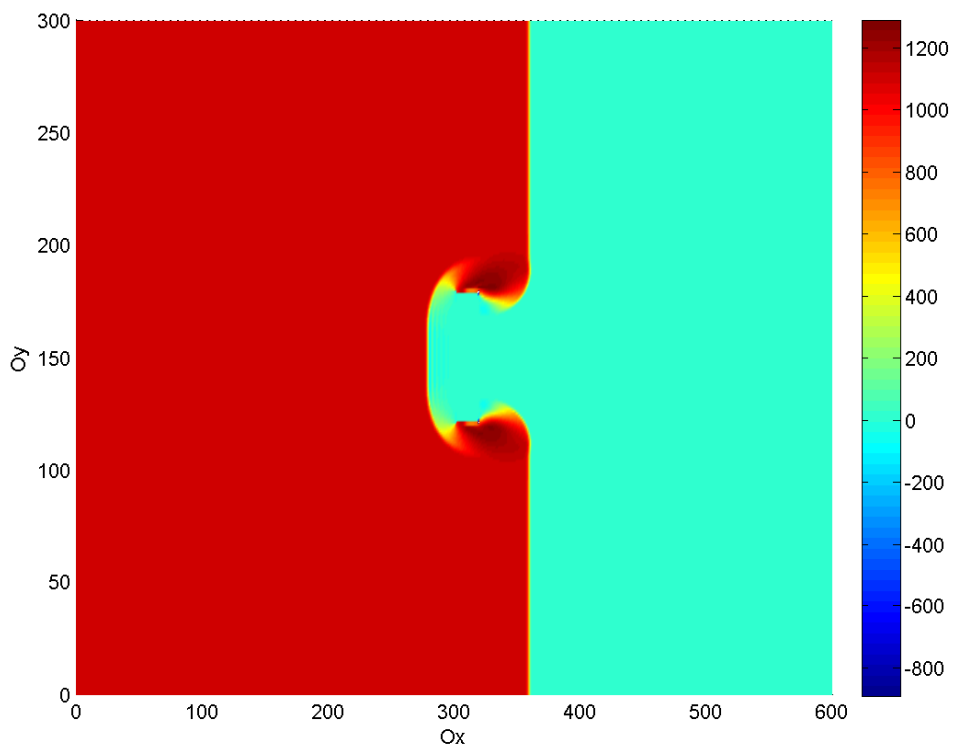


б) Поле скоростей

Рис.14 Картина течения на момент времени $t=0.00287$ с.

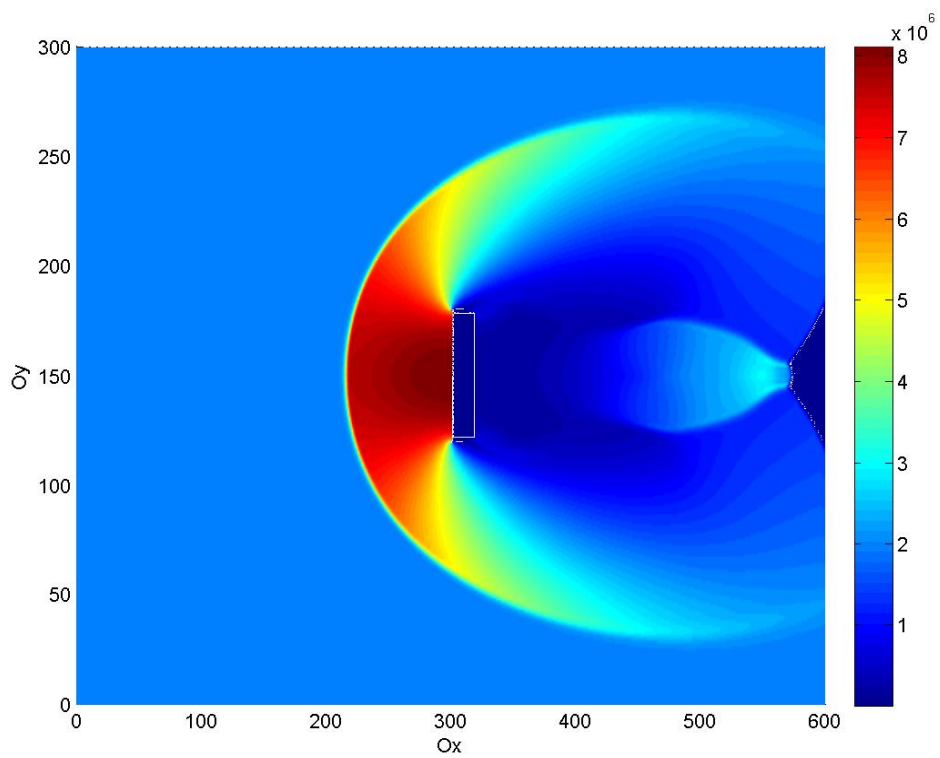


а) Поле давлений

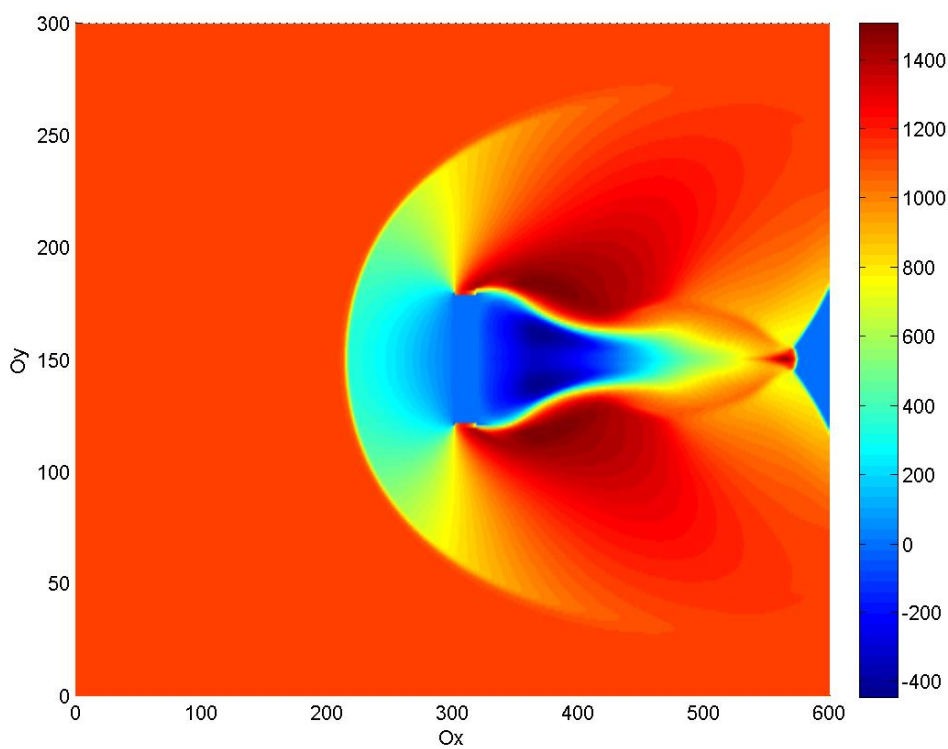


б) Поле скоростей

Рис.15 Картина течения на момент времени $t=0.00343$ с.

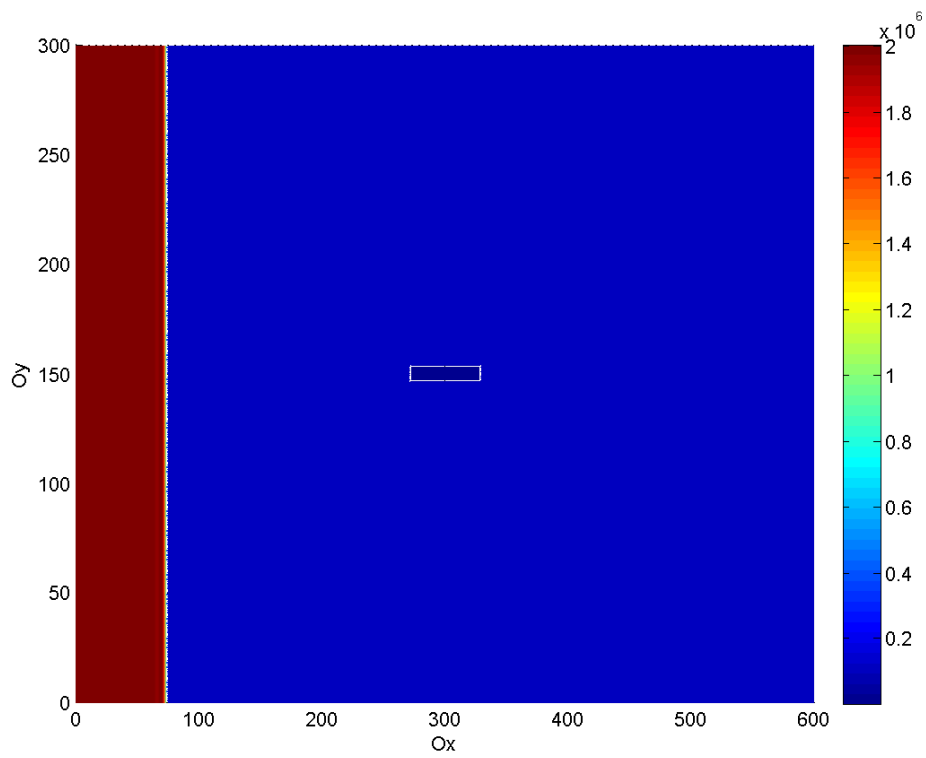


а) Поле давлений

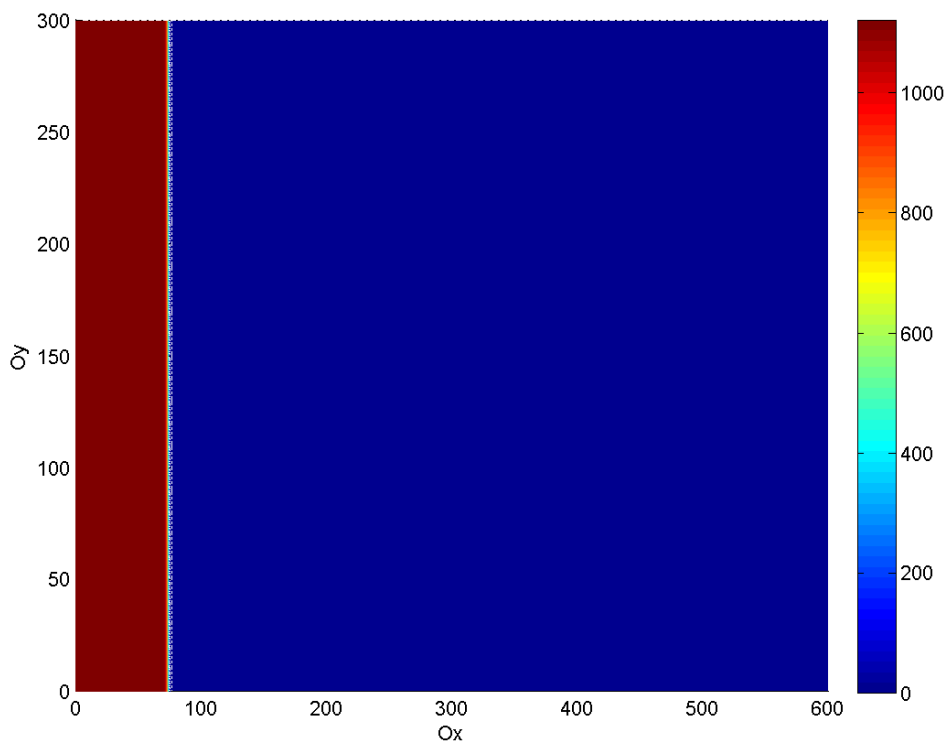


б) Поле скоростей

Рис.16 Картина течения на момент времени $t=0.00651$ с.

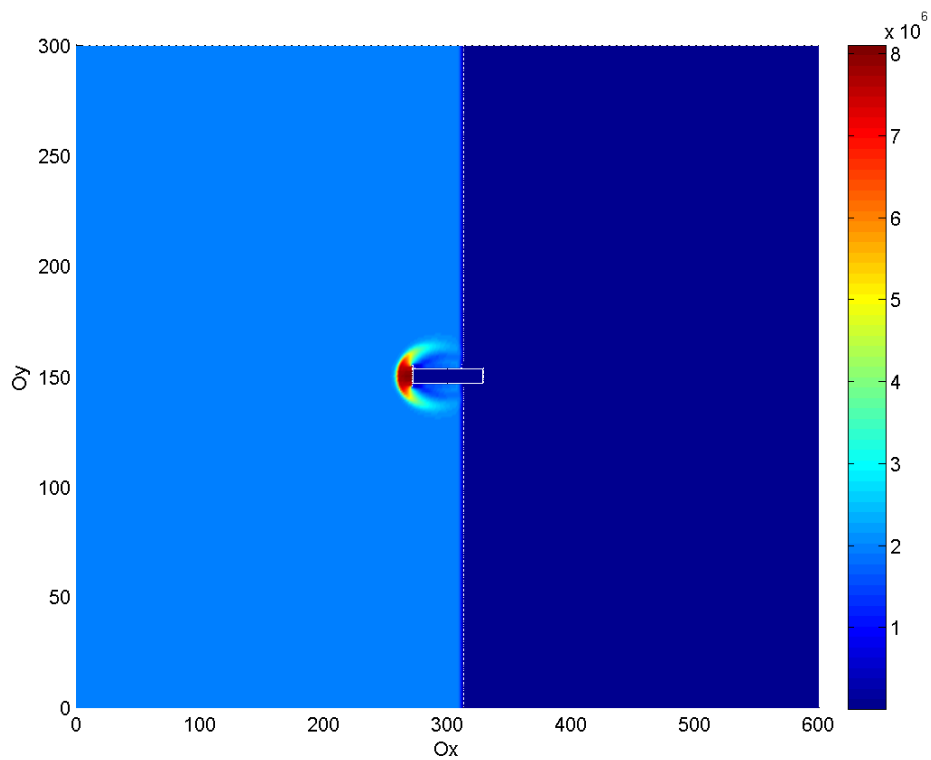


а) Поле давлений

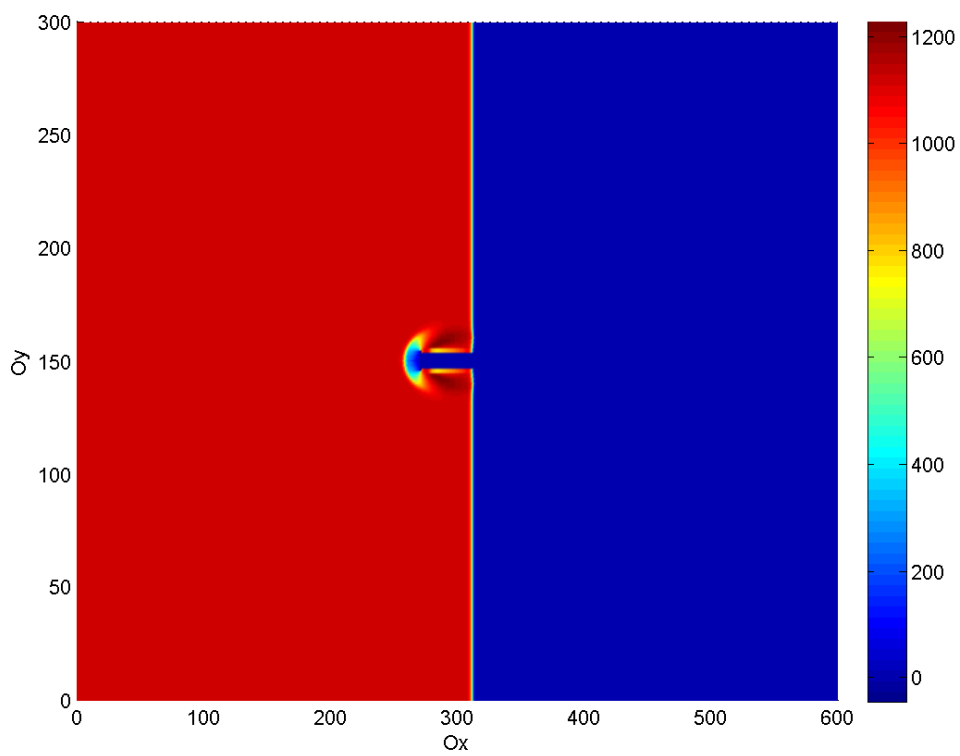


б) Поле скоростей

Рис.17 Картина течения на момент времени $t=0.0$ с.

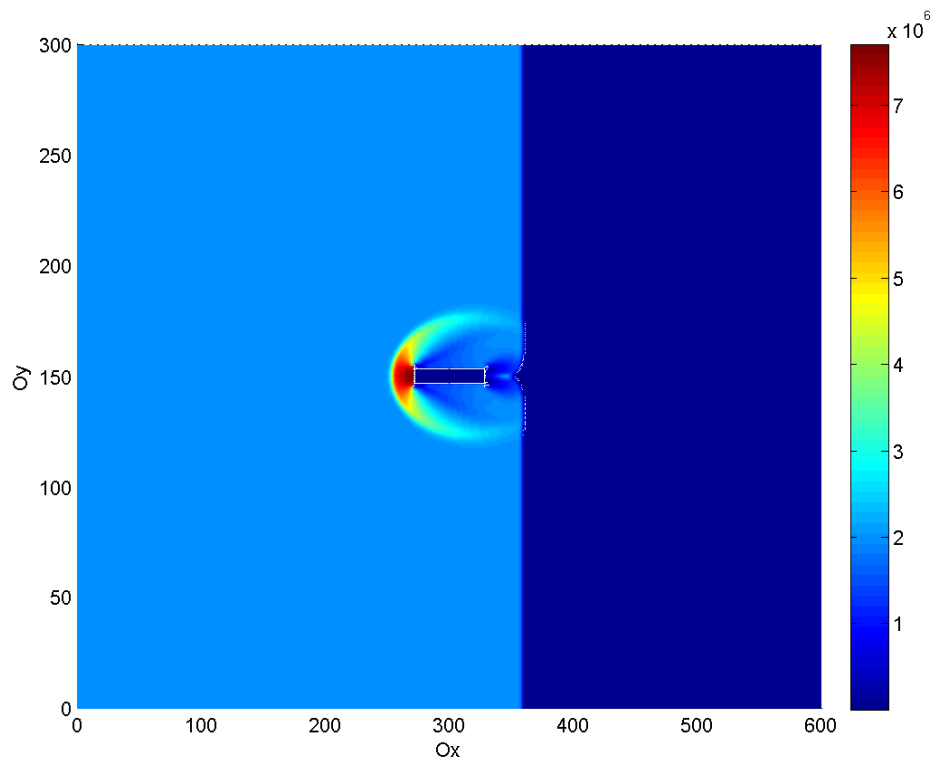


а) Поле давлений

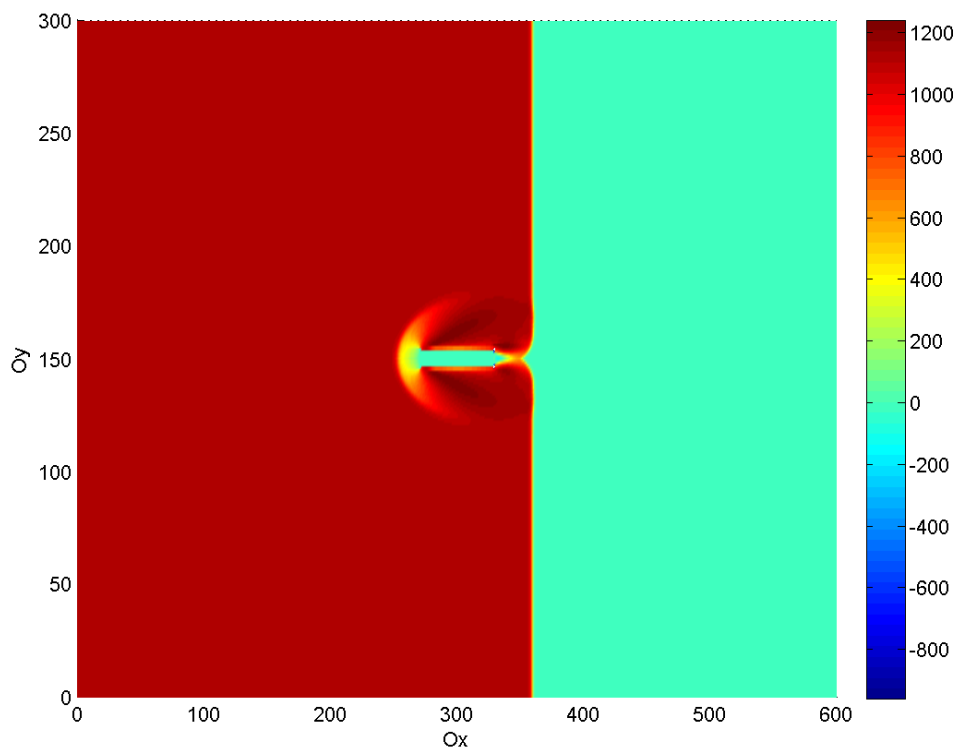


б) Поле скоростей

Рис.18 Картина течения на момент времени $t=0.00287$ с.

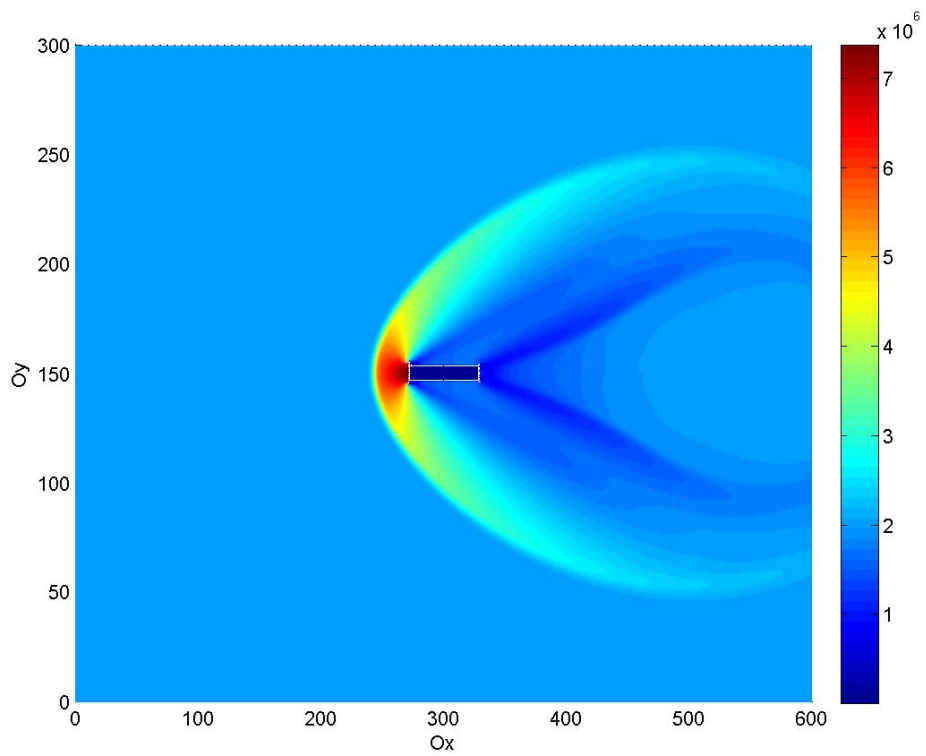


а) Поле давлений

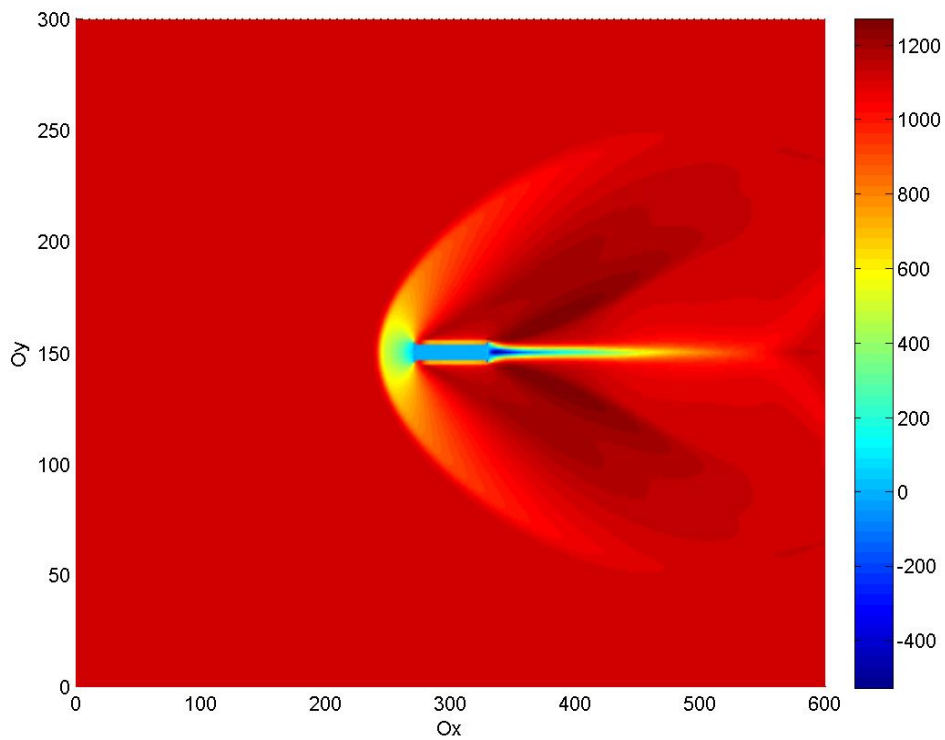


б) Поле скоростей

Рис.19 Картина течения на момент времени $t=0.00343$ с.



а) Поле давлений



б) Поле скоростей

Рис.20 Картина течения на момент времени $t=0.00651$ с.

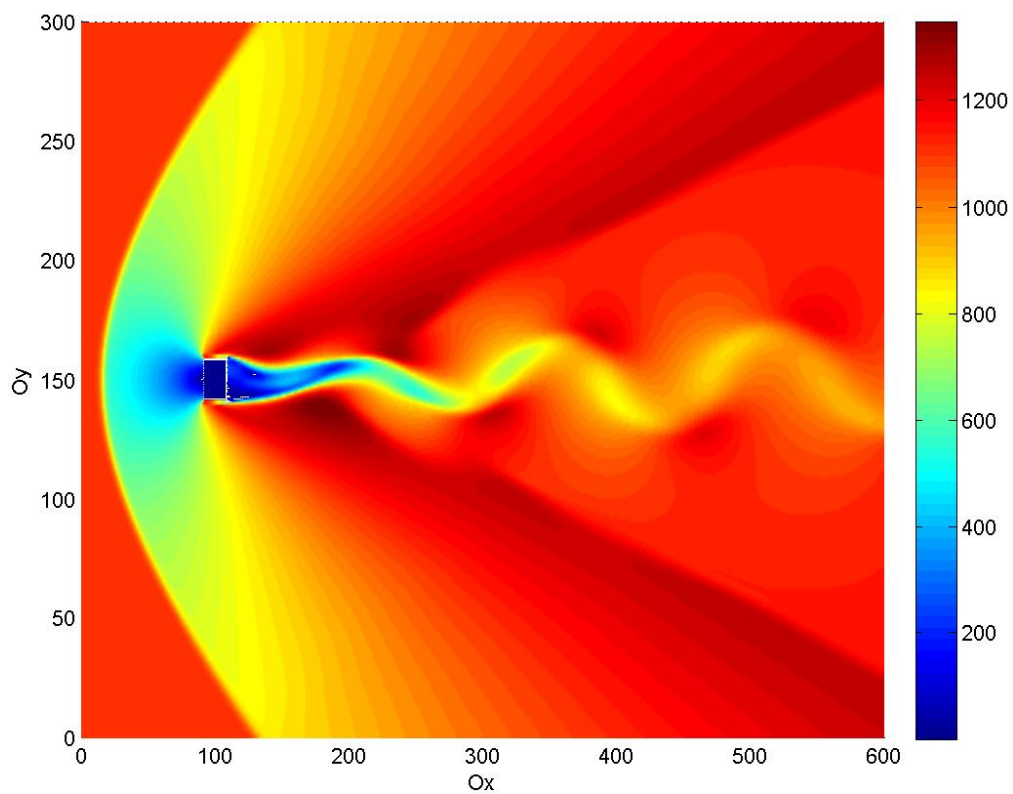
3.2. Дорожка Кармана.

Вихревая дорожка (рис. 21,22) (также дорожка Кармана в честь Теодора Кармана) — цепочки вихрей, которые наблюдаются при обтекании жидкостью или газом протяжённых цилиндрических тел (или других линейно вытянутых плохо обтекаемых профилей) с продольной осью, перпендикулярной направлению движения сплошной среды [10].

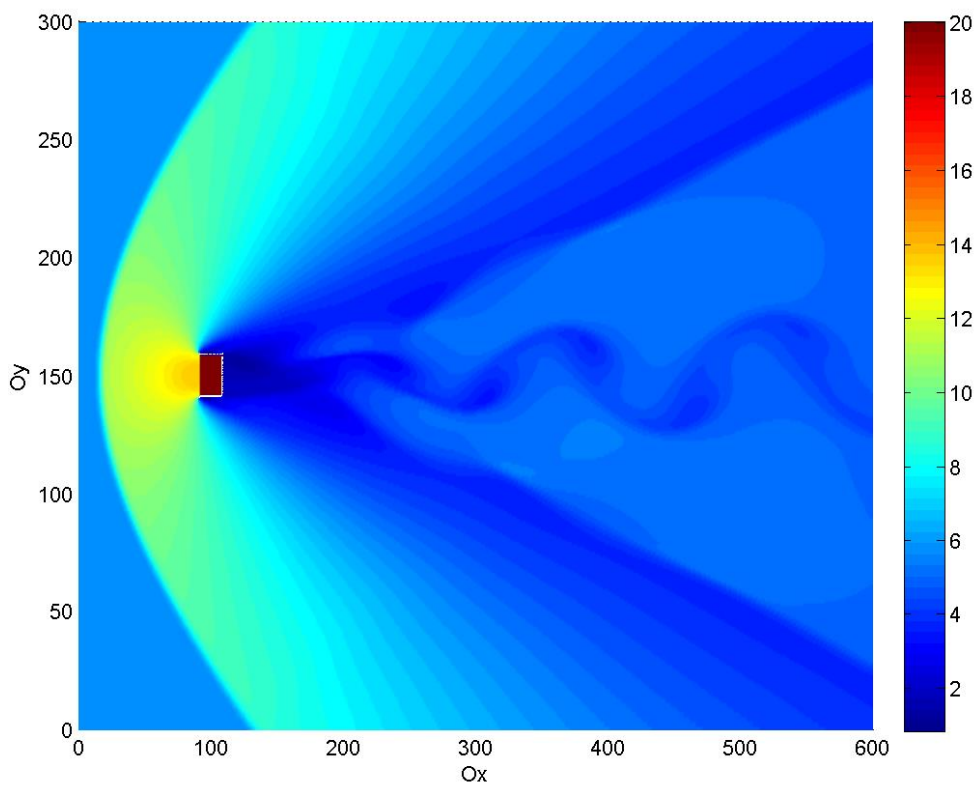
Отрыв вихрей происходит с двух сторон тела поочерёдно; после срыва вихри образуют две цепочки позади тела, направление вращения вихрей в одной цепочке противоположно направлению вращения в другой.

Явление можно наблюдать лишь при ограниченных значениях числа Рейнольдса (например, для цилиндров диапазон простирается от 47 до 10^5). Размеры дорожки зависят от размера обтекаемого тела, при этом существует линейная зависимость между шириной дорожки и расстоянием между соседними вихрями.

Как и при всяком турбулентном обтекании, тело испытывает лобовое сопротивление, которое возрастает с увеличением ширины дорожки.

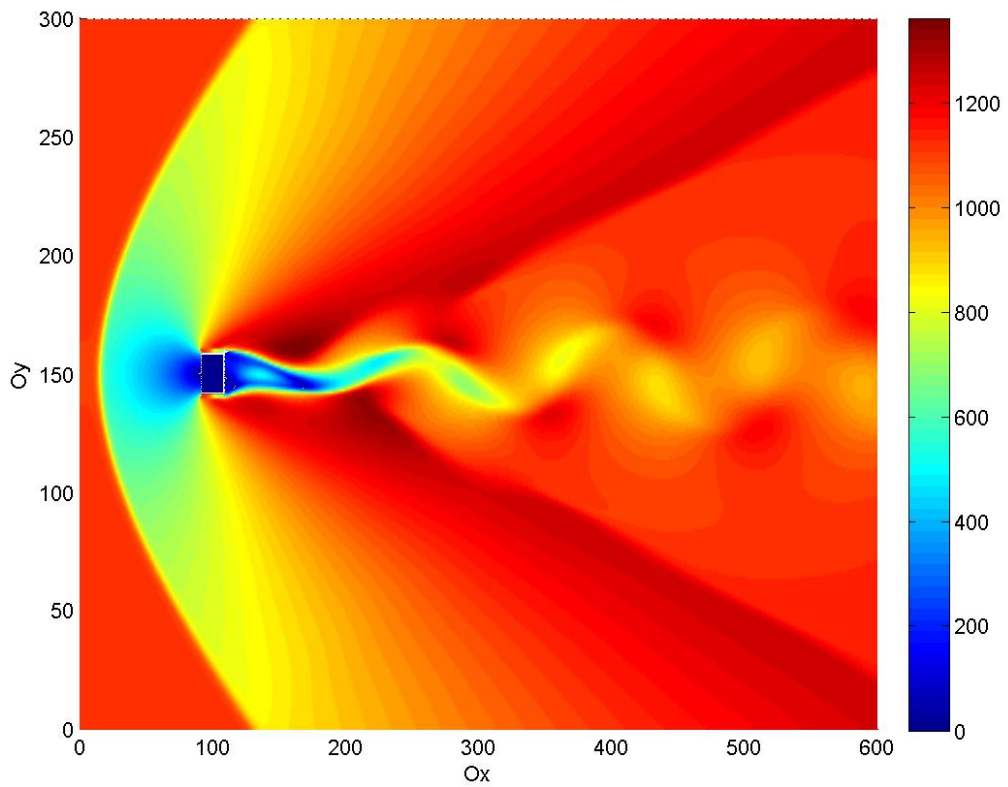


а) Поле скоростей

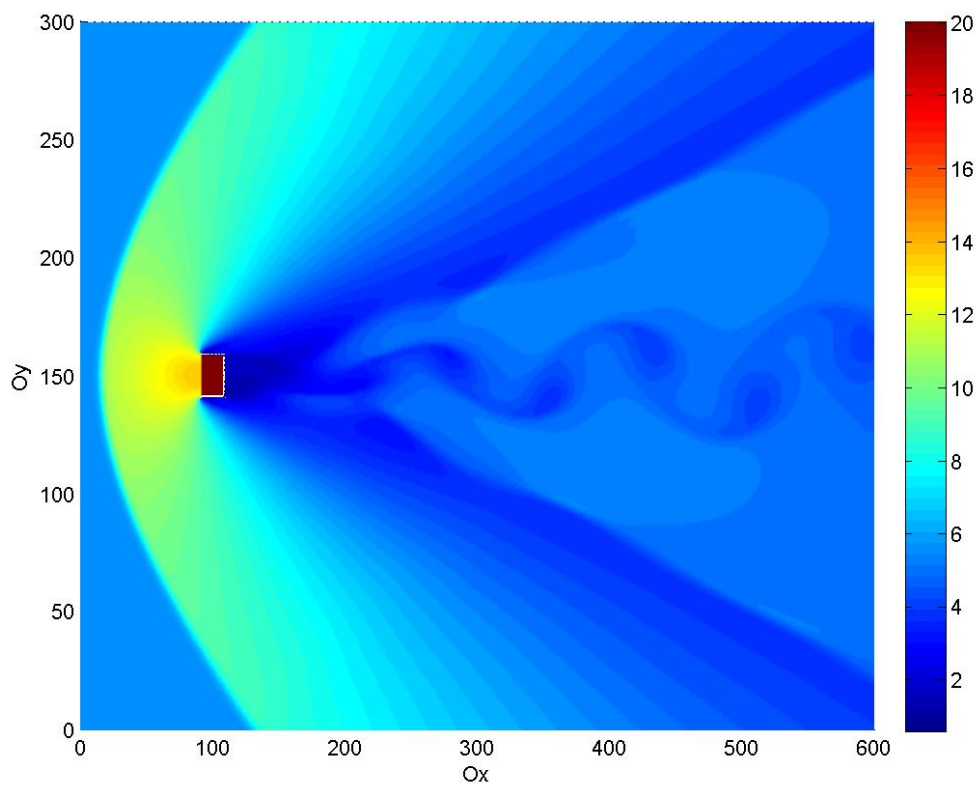


б) Поле плотностей

Рис.21 Дорожка Кармана на момент времени $t=0.476$ с.



а) Поле скоростей



б) Поле плотностей

Рис.22 Дорожка Кармана на момент времени $t=0.7$ с.

Заключение.

В результате проделанной работы был разработан и протестирован численный алгоритм решения одномерной задачи о взаимодействии плоской ударной волны с жесткой стенкой.

Разработан и реализован численный алгоритм в двумерной постановке.

Реализована численная модель обтекания пластины конечной ширины сверхзвуковым потоком газа. Полученные результаты качественно совпадают с результатами экспериментальных данных, представленных в литературе.

Список литературы.

- 1) Н.Н. Федорова, С.А. Вальгер «Моделирование взаимодействия потока воздуха с гибкой пластиной». / Известия вузов. Строительство. / 2015 г., вып. № 4.
- 2) В.М. Фомин, Б.В. Постников, К.А. Ломанович «Изменение режимов обтекания прямого уступа сверхзвуковым потоком введением газопроницаемых вставок». / Письма в ЖТФ/ 2015 г., том 41. вып. № 18.
- 3) Ю.В. Ганиев, О.А. Гобызов, Ю.А. Ложкин, А.С. Рабецкий, М.Н. Рябов, С.Е. Филиппов, В.Н. Шманенков «Исследование сверхзвукового обтекания плоской пластины с расположенными на ней преградами методом люминесцентных преобразователей давления» / Космическая техника и технологии/ 2017 г., вып. №2(17).
- 4) С.М. Босняков, А.Н. Минайло, Н.Х. Ремеев «Исследование пространственного обтекания двухступенчатых клиньев конечной ширины сверхзвуковым потоком газа». /Ученые записки ЦАГИ. / 1980 г., вып. № 1.
- 5) О.М. Белоцерковский, Ю.М. Давыдов «Метод крупных частиц в газовой динамике». /Из-во: Москва «Наука». /1982 г.-393 с.
- 6) М. Ван-Дайк «Альбом течений жидкости и газа», под редакцией: Г.И. Баренблатта, В.П. Шидловского. /Из-во: Москва «Мир»/ 1986 г., - 182 с.
- 7) С.А. Вальгер, Н.Н. Фёдорова. «Применение алгоритма адаптации расчётной сетки к решению уравнений Эйлера». /Вычислительные технологии. / 2012 г., том 17, № 3.
- 8) В.Ф. Куропатенко, Е.С. Шестаковская «Основы численных методов механики сплошной среды». / Издательский центр ЮУрГУ. / 2017 г.-254 с.
- 9) <https://pandia.ru/text/78/368/924.php>
- 10) Милн-Томсон Л.М. «Теоретическая гидродинамика.» /М., Мир, / 1964 г. - 660 с.