Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет»
(Национальный исследовательский университет)

Институт естественных и точных наук
Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра математического анализа и методики преподавания математики

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент,
к.п.н., доцент
______________ / Н.Н. Овчинникова /
«_____» ________________ 2019 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой,
д.ф.-м.н., доцент
_______________ / В.Л. Дильман /
«_____» _______________ 2019 г.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

ЮУрГУ – 01.03.01–2019–129-06–118. ВКР

Руководитель работы
к.ф.-м.н., доцент
___________/ М.А.Корытова/
«_____» ________________ 2019 г.

Автор
Студент группы ИЕТН-415
_________/И.К. Кобяков /
«_____» ________________ 2019 г.

Нормоконтролер, ассистент
_______________ / А.Н. Пермина /
«_____» ________________ 2019 г.

Челябинск
2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

В настоящее время основной задачей перестройки школьного образования является переориентация на приоритет развивающей функции обучения. Это означает, что на первый план выходит задача интеллектуального развития личности, т.е. развитие учебно-познавательной деятельности. Пожалуй, ни один школьный предмет не может конкурировать с возможностями математики в воспитании мыслящей личности.

Линия развития алгебры упрочила положение уравнения как ведущего понятия, которое связалось с тремя главными областями своего возникновения и функционирования:

- уравнение как средство решения текстовых задач;
- уравнения как особого рода формула, служащая в алгебре объектом изучения;
- уравнение как формула, которой косвенно определяются числа или координаты точек, служащие его решением.

Каждое из этих представлений оказалось в том или ином отношении полезным.

Таким образом, уравнения, как общематематические понятия, многоаспектны причем, ни один из аспектов нельзя исключить из рассмотрения, особенно если идет речь о проблемах школьного математического образования.

Многие математические задачи сводятся к решению уравнений и неравенств.

Обучение методам решения уравнений и неравенств традиционно является важнейшей частью школьного курса математики. При решении уравнений и неравенств помимо технических приходится преодолевать и логические трудности и, в частности, отвечать на вопрос, почему выполненные преобразования не приводят к потере корней или приобретению посторонних корней.

Ввиду важности и обширности материала, связанного с понятием уравнения, его изучения в современной методике математики организовано в содержательно-методическую линию – линию уравнений. Здесь рассматриваются вопросы формирования понятий уравнений, общих и частных методов их решения.

Поэтому, тема требует дальнейшей разработки.

Значит, выбранная проблема актуальна.

Объект исследования: алгебраические уравнения в систематическом курсе алгебры основной школы.

Предмет исследования: методика изучения алгебраических уравнений в систематическом курсе алгебры средней школы.

Цель исследования: глубоко изучить теорию и методику решения алгебраических уравнений и некоторых видов задач с параметрами связанных с уравнениями.

Задачи исследования:

- глубоко изучить теорию алгебраических уравнений;
- рассмотреть оптимальное использование формул решения уравнений;
- рассмотреть различные методы и приемы решения уравнений.
- рассмотреть некоторые методы решения задач с параметрами;

В ходе исследовательской деятельности были использованы следующие методы:

- экспериментально-теоретические;
- теоретические.

Решению задач с параметрами в школе уделяется очень мало внимания. Поэтому трудно рассчитывать на то что учащиеся без подготовки смогут справиться, например на ЕГЭ, с подобными задачами. Совершенно очевидно, что к ним надо специально готовиться, причем включать такие задачи во все разделы алгебры. В предлагаемой работе большое внимание уделяется разбору некоторых классов задач с параметрами, связанных с алгебраическими уравнениями. Предлагаемые задачи с параметрами являются базовыми для развития умения решать более сложные задачи, с которыми ученик может столкнуться при подготовке к ЕГЭ.

1. Понятие и история уравнения

Уравнение – одно из самых важных понятий математики. В большинстве научных и практических задач, где неизвестную величину нельзя непосредственно измерить или вычислить по готовой формуле, всегда удается составить соотношение (или несколько соотношений), которым она удовлетворяет. Таким образом, получается уравнение (или система уравнений для определения неизвестной величины), как математическая модель данной задачи. Открытие, развитие и совершенствование методов решения различных видов уравнений, начиная с истоков математики как науки, долгое время было основным предметом изучения алгебры. Привычная и удобная для нас буквенная запись уравнений сложилась только в XVI веке.

Еще в древние времена ученые пытались найти способы решения задач, составляя уравнения различных видов, а затем искали способы решения подобных уравнений. Уравнения до сих пор широко используются в различных разделах математики, а также в решении важных прикладных задач.

Среди задач, которые с давних пор приходилось решать людям, много было похожих: вычисление площадей, деление доходов, вычисления стоимости товара, измерение массы с помощью различных единиц и др.

Для однотипных задач в разное время, в разных странах пытались отыскать общие способы, правила решения. В этих правилах раскрывалось, как найти неизвестную величину через данные числа для группы похожих задач. Так возникла алгебра – один из разделов математики, в котором вначале в основном рассматривалось решение различных уравнений.

Корнем (или решением) уравнения называют такое число, при подстановке которого в уравнение на место неизвестной переменной, уравнение превращается в верное равенство.

Решить уравнения – значит найти все его корни или установить, что их нет.

Некоторые алгебраические понятия и общие приемы решения задач знали уже в Древнем Вавилоне и Египте более 4000 лет назад. Большой вклад в создание алгебры внес выдающийся древнегреческий математик Диофант, которого по праву называют «отцом алгебры». Диофант умел решать очень сложные уравнения, применял для неизвестных буквенные обозначения, ввел специальный символ для вычитания, использовал сокращение слов.

В 825г. Арабский ученый аль – Хорезми написал книгу «Китаб аль-джебр валь-мукабала», что означает «книга о восстановлении и противопоставлении». Это был первый в мире учебник алгебры. С этого момента алгебра становится самостоятельной наукой. В дальнейшем большой вклад в развитие алгебры внесли европейские ученые Франсуа Виет и Рене Декарт, которые ввели в алгебру буквы и разработали правила действия с буквенными выражениями.

Квадратные уравнения умели решать еще вавилоняне. Это было связано с решением задач о нахождении площадей земельных участков, а также с развитием астрономии.

Однако у вавилонян еще не было понятия отрицательного числа, и поэтому корни квадратного уравнения могли быть только положительными.

В «Арифметике» греческого математика из Александрии Диофанта (III в.) нет систематического изложения алгебры, однако в ней содержится ряд задач, решаемых при помощи составления уравнений. Есть в ней и такая задача.

Найти два числа по их сумме 20 и произведению 96.

Если обозначим одно из неизвестных через у, то придем к квадратному уравнению

$$y\,(20 - y) = 96.$$

Чтобы избежать решения квадратного уравнения общего вида, Диофант обозначил неизвестные числа 10+х и 10-х.

Их сумма равна:

$$10+x+(10-x) = 20.$$

Составим уравнение и решим его:

$$(10+x)\,(10-x) = 96$$

$$100 - x^2 = 96$$

$$x^2 = 4$$

Во времена Диофанта еще не знали отрицательных чисел, поэтому Диофант указал лишь один корень х = 2. Тогда неизвестные числа равны 10+2 = 12 и 10 — 2 = 8.

Только в XVI в. Благодаря главным образом исследованиям французского математика Ф. Виета (1540—1603) впервые уравнения 2-й степени, впрочем, как 3-й и 4-й степени, стали рассматривать в буквенных обозначениях. Именно Виет ввел буквенные обозначения не только для неизвестных величин, но и для данных, т. Е. коэффициентов уравнений. Особенно ценил Виет открытые им формулы, которые теперь называются формулами Виета. Однако сам Виет признавал только положительные корни.

Необходимость классификации уравнений вызывается невозможностью найти общий метод их решения. Известно, что целые алгебраические уравнения со времен Декарта (1596-1650) классифицируются по степени уравнения. Чем выше степень таких уравнений, тем сложнее взаимная связь неизвестного с коэффициентами уравнения и тем труднее выразить это неизвестное через коэффициенты.

Для развития творческой деятельности учащихся большую пользу приносят решение учащимися на уроках алгебры решение упражнений на линейные уравнения и неравенства. Так как они позволяют пройти все этапы решения учебной задачи, кроме того позволяет формированию у учащихся умений анализировать. Сравнивать, обобщать полученные решения и наконец исследовать различные случаи, найти рациональный путь решения и сделать самостоятельные выводы.

2. Линейные и сводящиеся к ним уравнения

Линейным уравнением с одним неизвестным называют уравнение, левая и правая часть которого есть многочлены первой степени. Члены многочленов, находящиеся в левой и правой частях уравнения, называют членами уравнения.

Линейные уравнения представляют в таком виде:

- в общей форме: $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = 0$

- в канонической форме: $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$.

Общий вид линейного уравнения:

$k x + b=0 \ (k \neq 0)$

где k и b – заданные числа. Число k называют коэффициентом при неизвестном в этом уравнении. А число b – свободным членом этого уравнения.

Так в уравнении

$5x-3 = 0$ (1)

5 – коэффициент при неизвестном, а (-3) –свободный член.

В уравнении

$3x = 0$ (2)

3 – коэффициент при неизвестном. А 0 – свободный член.

Исследуем уравнение $k x + b = 0$:

1. При $k\neq0$ имеет единственный корень (-b)
2. При $k=0$ и $b\neq0$ не имеет корней

3. При $k=0$ и $b=0$ имеет бесконечное много корней – любое действительное число является его корнем.

Алгоритм решения линейного уравнения включает в себя следующие шаги:

1. упрощение вида уравнения
2. группировка членов уравнения, так чтобы члены с неизвестными располагались в одной стороне, а постоянные члены в другой части
3. приведение подобных членов; при необходимости делим обе части уравнения на постоянное число при переменной
4. найдем решение и запишем ответ

Попробуем решить уравнения (1) и (2):

$5x-3 = 0$

Делаем группировку: $5x = 3$

Делим на число при переменной x и получаем ответ: $x = \frac{3}{5}$

$3x = 0$

Упрощать и группировать это уравнение не нужно, ответ очевиден: $x = 0$

Рассмотрим еще несколько простых примеров:

1. $3x + 2 =11$

   Перенесем 2 из левой части уравнения в правую, изменив при этом знак перед 2 на противоположный, получим
   $3x = 11 – 2$

Выполним вычитание, тогда

$3x = 9$

Чтобы найти x надо разделить произведение на известный множитель, то есть

$x = 9 : 3$

Значит, значение $x = 3$ является решением или корнем уравнения.

2. $5(x – 3) + 2 = 3 (x – 4) + 2x – 1$

   Раскроем скобки:

   $5x – 15 + 2 = 3x – 12 + 2x – 1$

   Сгруппируем в левой части члены, содержащие неизвестные, а в правой – свободные члены:

   $5x – 3x – 2x = – 12 – 1 + 15 – 2$

   Приведем подобные члены:

   $0x = 0$

   Ответ: x - любое число.

   Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то получим уравнение $0x = - b$. Это уравнение решений не имеет, так как при умножении любого числа на 0 мы получаем 0, но $b \neq 0$

Не все линейные уравнения с первого взгляда являются линейными. Существуют так называемые скрытые линейные уравнения. К общему виду линейное уравнение можно привести такими преобразованиями как перенос частей влево-вправо и умножение (деление). Такие преобразования называются тождественными или равносильными. Важно помнить что при переносе через знак равенства, знаки при слагаемых меняются на противоположные. Также важно помнить что при делении, либо умножении на какое-либо число, действие совершается как в левой, так и в правой части уравнения.

Например:

$$(x-6)^2+(x+3)^2=2x^2$$

Глядя на него, не скажешь, что данное уравнение является линейным, но нам необходимо раскрыть скобки и осуществить тождественные преобразования.

$$x^2+36-12x+x^2+9+6x=2x^2$$

Приведем подобные слагаемые.

$$-6x=\ -45$$

Иксы в квадрате исчезли и осталось совершенно обычное линейное уравнение. Его корень $x=7.5$

3. **Квадратные уравнения**

3.1. Понятие и методы решения квадратного уравнения

Если левая часть уравнения – есть квадратный трехчлен, а правая – число нуль. Такие уравнения называют *квадратными уравнениями*.

Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x – переменная, a, b и c – некоторые числа, причем $a \neq 0$.

Уравнения

$2x^2 + 5x + 1 = 0;$

$x^2 – x + 9 = 0$;

$3x^2 – 7x = 0$;

$-0.5x^2 = 0$

являются квадратными уравнениями,

так как каждое из них имеет вид $ax^2 + bx + c = 0$.

В первом уравнении a = 2, b = 5 и c = 1;

во втором a = 1, b = -1 и c = 9;

в третьем a = 3, b = -7 и c = 0;

в четвертом a = -0.5, b= 0 и c = 1.

Числа a, b и c называют коэффициентами квадратного уравнения. Число a называют первым коэффициентом, число b — вторым коэффициентом, число c — свободным членом.

Заметим, что квадратное уравнение относится к уравнениям второй степени, так как его левая часть представляет многочлен второй степени.

Квадратные уравнения – это фундамент, на котором покоится величественной здание алгебры. Квадратные уравнения находят широкое применение при решении тригонометрических, логарифмических, иррациональных уравнений. На уроках по теме «Квадратные уравнения» учитель ставит следующие задачи:

а) образовательные: отработка способов решения и выработка умений выбрать научный, рациональный способ решения;

б) развивающие: развитие логического мышления, памяти, внимания, умение сравнить и обобщать;

в) воспитательные: воспитание трудолюбия, взаимопомощи, математической культуры.

Для осуществления поставленных задач учителю следует правильно отработать методы и формы обучения. На уроках по изучению данной темы можно использовать следующие методы: наглядный, практический, словесный, частично-поисковый, – и следующие формы обучения: классический, индивидуальный, парный, групповой.

Можно выделить следующие этапы при изучении темы «Квадратные уравнения»:

I этап – «Решение неполных квадратных уравнений».

II этап – «Решение полных квадратных уравнений и приведенных квадратных уравнений».

III этап - «Решение задач с помощью квадратных уравнений»

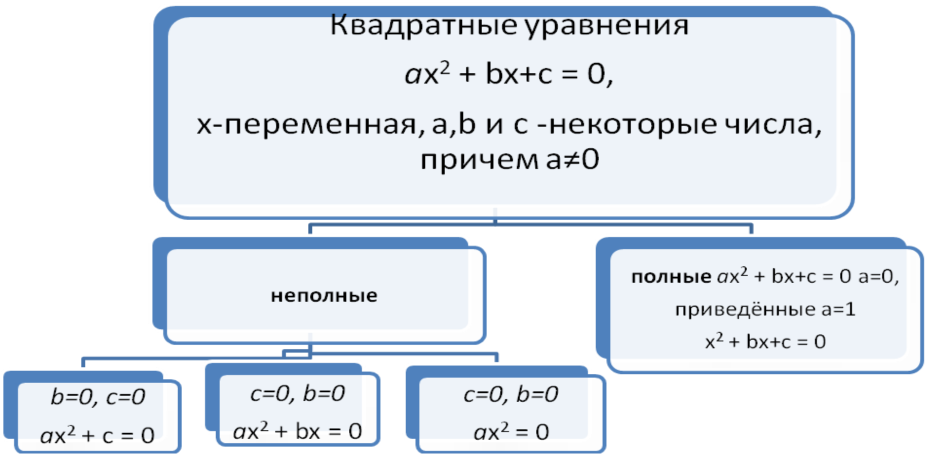


Рисунок 1.

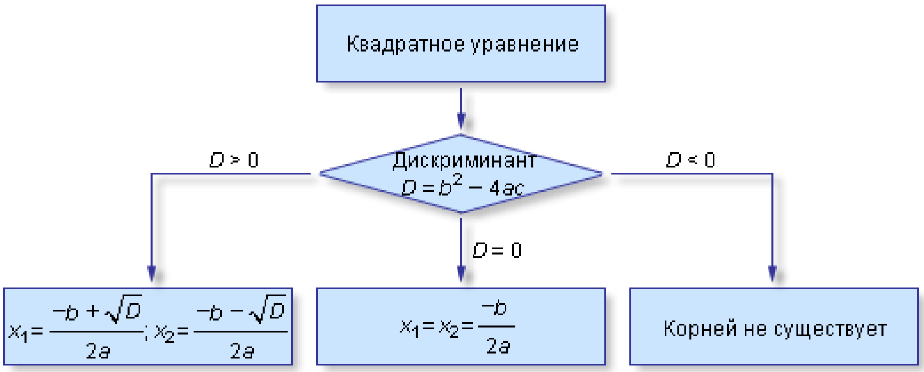
Обучение решению уравнений начинается с простейших их видов, с постепенным их накапливанием и «фонда» тождественных и равносильных преобразований, с помощью которых можно привести произвольное уравнение к простейшим. На первом этапе рассматриваются неполные квадратные уравнения.

Решение неполных квадратных уравнений

$a\neq0$, $b=0$, $c\neq0$	$a\neq0$, $b\neq0$, $c=0$	$a\neq0$, $c=0$, $b=0$
$ax^2 + c= 0$	$ax^2 + bx = 0$	$ax^2 = 0$
1.Перенос свободного члена ***c*** в правую часть уравнения: $ax^2 =-c$. 2. Деление обеих частей уравнения на ***a***: $x^2=-c/a$. 3.Если ***-c/a<0*** , то $x^2 = - c/a$ не имеет корней. Если **–** ***c/a>0***, т.е.-с/а =к, то уравнение $x^2=$ к имеет два корня $x=-\sqrt{k}$ $x=\sqrt{k}$.	Метод разложения на множители $x(ax + b) =0$. $x = 0$ или $ax + b= 0$, решением уравнения являются два корня $x = 0$; $x = -b/a$.	Равносильно уравнению $x^2=0$, имеет единственный корень $x=0$.

На втором этапе осуществляется переход к решению полного квадратного уравнения. Это уравнения вида

$ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c – некоторые числа, a, b, c $\neq$ 0, x – переменная. Сначала рассматривается решения полного квадратного уравнения способом выделения квадрата двучлена. Далее с помощью математических преобразований, учащиеся приходят к понятию «дискриминант D» и рассматривают различные случаи в зависимости от значения D.



Даётся краткая запись $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, где D = b^2-4ac, которую называют формулой корней квадратного уравнения.

Вывод этой формулы осуществляется следующим образом:

$a x^2 + b x + c = 0$

$a x^2 + b x = - c$ (перенесем c в правую часть)

$(2ax)^2 + 4a b x = - 4ac$ (умножаем уравнение на 4a)

$(2ax)^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$ (добавим b^2 к обеим частям)

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$ (в левой части выделим полный квадрат)

$2ax + b = \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}$ (извлечем квадратный корень)

$2ax = - b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}$ (перенесем b в правую часть)

И разделим уравнение на 2a:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Из этой формулы получают другую формулу, которой удобно пользоваться при решении квадратных уравнений с четным вторым коэффициентом. Эта формула называется Дискриминант на 4.

Формула дискриминанта, деленного на 4 —

$$\frac{D}{4} = (\frac{b}{2})^2 - ac$$

Как и для случая с обычным дискриминантом, количество корней квадратного уравнения зависит от знака D/4.

- Если D/4>0, квадратное уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$$

- Если D/4=0, квадратное уравнение имеет один корень

$$x = \frac{-b}{2a}$$

- Если D/4<0, квадратное уравнение не имеет действительных корней.

Рассмотрим примеры решения квадратных уравнений с помощью формулы четверти дискриминанта.

$1) 5x^2 + 16x + 3 = 0$

$a = 5; b = 16; c = 3$

Так как b = 16 — чётное число, вместо обычного дискриминанта вычислим дискриминант, делённый на 4 (иногда его еще обозначают через D1):

$$\frac{D}{4} = (\frac{b}{2})^2 - ac = (\frac{16}{2})^2 - 5 \cdot 3 = 64 - 15 = 49$$

Так как D/4>0, уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a} = \frac{-\frac{16}{2} \pm \sqrt{49}}{5} = \frac{-8 \pm 7}{5}$$

$$x_1 = \frac{-8+7}{5} = -\frac{1}{5} = -0,2;$$

$$x_2 = \frac{-8-7}{5} = -\frac{15}{5} = -3$$

Ответ: -0,2; -3.

$$2) 3x^2 - 28x + 9 = 0$$

$$a = 3; b = -28; c = 9$$

$$\frac{D}{4} = (\frac{b}{2})^2 - ac = (\frac{-28}{2})^2 - 3 \cdot 9 =$$

$$= 196 - 27 = 169$$

Поскольку D/4>0, уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a} = \frac{-\frac{-28}{2} \pm \sqrt{169}}{3} =$$

$$= \frac{14 \pm 13}{3}$$

$$x_1 == \frac{14 + 13}{3} = \frac{27}{2} = 9;$$

$$x_2 = \frac{14 - 13}{3} = \frac{1}{3}$$

Ответ: 9; 1/3.

Учащиеся после изучения алгоритма решения квадратного уравнения, приступают к решению задач с помощью квадратных уравнений. На этом этапе учащиеся прослеживают практическую связь данной темы, когда им предлагаются задачи из других областей (физика, техника), а также геометрические задачи, которые решаются с помощью квадратных уравнений.

3.2. Теорема Виета для квадратных уравнений.

Важным моментом в изучении квадратных уравнений является рассмотрение и доказательство теоремы Виета и обратной ей. Сложность освоения теоремы Виета связана с несколькими обстоятельствами. Прежде всего, требуется учитывать различие прямой и обратной теоремы. В прямой теореме Виета даны квадратное уравнение и его корни; в обратной — только два числа, а квадратное уравнение появляется в заключение теоремы.

Формулировка:

Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

В частном случае, если $a = 1$ (приведенная форма $x^2 + px + q = 0$), то

$x_1 + x_2 = -p$

$x_1 x_2 = q$

Доказательство.

Пусть числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$.

Тогда $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$.

Имеем $x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$;

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = -\frac{(\sqrt{D}+b)(\sqrt{D}-b)}{4a^2} = -\frac{(\sqrt{D})^2-b^2}{4a^2} =$$
$$\frac{b^2-D}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Обратная Теорема Виета

Если числа m и n таковы, что

$$\begin{cases} m + n = -\frac{b}{a} \\ m \cdot n = \frac{c}{a} \end{cases},$$

то эти числа — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Доказательство

Пусть имеется система $\begin{cases} m+n=-\frac{b}{a} \\ m\cdot n=\frac{c}{a} \end{cases}$

Из первого равенства $n=-m-\frac{b}{a}$.

Подставляя это значение во второе равенство, получим $m\cdot(-m-\frac{b}{a})=\frac{c}{a}$, откуда $am^2+bm+c=0$.

Значит, число m является корнем квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Аналогично доказывается, что n— также корень этого уравнения.

Рассмотрим решение некоторых уравнений с помощью теоремы Виета.

Пример 1. $x^2-9+14=0$

Решение. Попробуем найти два числа x_1 и x_2 , такие что

$$x_1+x_2=9$$

$$x_1x_2=14$$

Такими числами являются числа 7 и 2, согласно теореме Виета они и являются корнями этого уравнения.

Пример 2. $x^2+3x-28=0$

Попробуем найти два числа x_1 и x_2 , такие что

$$x_1+x_2=-3$$

$$x_1x_2=-28$$

Нетрудно заметить, что такими числами будут -7 и 4. Они и являются корнями заданного уравнения.

В итоге изучения материала по запоминанию темы учащиеся должны не только овладеть применением алгоритмических предписаний к решению конкретных заданий, но и научится использовать логические средства для обоснования решения. В целом освоение темы «Квадратные уравнения» поднимает учащихся на качественно новую ступень овладения содержанием школьной математики.

На уроках по теме «Квадратные уравнения» учитель ставит следующие задачи: а) образовательные: отработка способов решения и выработка умений выбрать научный, рациональный способ решения; б) развивающие: развитие логического мышления, памяти, внимания, умение сравнить и обобщать; в) воспитательные: воспитание трудолюбия, взаимопомощи, математической культуры.

3.3. Применение теоремы Виета для решения задач с параметрами

Пример 1.

$x^2 - (2a + 1)x + a^2 + 2 = 0$, при каком значении a один корень в 2 раза больше другого.

Решение.

Выпишем коэффициенты данного уравнения $a = 1$, $b = -(2a + 1)$, $c = a^2 + 2$. Применим теорему Виета для данного уравнения

$$\begin{cases} D>0; \\ x_1+x_2 = 2a + 1; \\ x_1x_2 = a^2 + 2. \end{cases}$$

Пусть $x_1 = 2x_2$. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} (2a + 1)^2 - 4(a^2 + 2) > 0; \\ 2x_2 + x_2 = 2a + 1; \\ 2x_2 \cdot x_2 = a^2 + 2; \end{cases}$$

$(2a + 1)^2 - 4(a^2 + 2) > 0;$

$4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 - 8 > 0;$

$4a - 7 > 0;$

$4a > 7;$

$a > \frac{7}{4};$

$a > 1\frac{3}{4}.$

$2x_2 + x_2 = 2a + 1;$

$3x_2 = 2a + 1;$

$2x_2 \cdot x_2 = a^2 + 2;$

$2x_2^2 = a^2 + 2.$

Получаем систему:

$$\begin{cases} a > 1\frac{3}{4}; \\ 3x_2 = 2a + 1; \\ \end{cases}$$

$2x_2^2$ = $a^2 + 2$;
$3x_2 = 2a + 1$;
$x_2 = \frac{2a+1}{3}$.
$2\cdot(\frac{2a+1}{3})^2 = a^2 + 2$;
$2 \cdot \frac{4a^2+4a+1}{9} = a^2 + 2;| \cdot \frac{9}{2}$
$4a^2 + 4a + 1 = \frac{9}{2} a^2 + 9$;
$4a^2 + 4a + 1 – 4{,}5a^2 – 9 = 0$;
$– 0{,}5a^2 + 4a – 8 = 0; | \cdot (–2)$
$a^2 – 8a + 16 = 0$;
$(a – 4)^2 = 0$;
$a – 4 = 0$;
$a = 4$.
Подставим и найдём корни уравнения $x_2 = \frac{2a+1}{3}$;
$x_2 = \frac{2\cdot4+1}{3} = 3$.
$x_1 = 2x_2$;
$x_1 = 2 \cdot 3 = 6$.
Вернёмся к системе

$$\begin{cases} a > 1\frac{3}{4}; \\ a = 4; \\ x_2 = 3; \\ x_1 = 6. \end{cases}$$ Отсюда получаем, что $a = 4$.

Ответ. $a = 4$

Пример 2.

При каком значении *a* сумма кубов корней уравнения $x^2 – x – a = 0$ будет равна 19?

Решение.
Пусть x_1 и x_2 корни квадратного уравнения, тогда теореме Виета имеем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1x_2 = -a. \end{cases}$$

Тогда $(x_1 + x_2)^3 = 1^3$,
$x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 = 1$,
$x_1^3 + x_2^3 = – 3x_1x_2(x_1 + x_2) + 1$,
$19 = 3a + 1$,
$a = 6$.
Ответ: $a=6$.

Пример 3.

Не решая уравнения $x^2-(2a+1)x+a^2+2=0$ найти, при каком значении *a* один из корней в 2 раза больше другого.

Решение.
По условию $x_1=2x_2$. По теореме Виета имеем $x_2+2x_2=2a+1$.
$x_2=\frac{2a+1}{3}$;
$2x_2^2=a^2+2; x_2^2=\frac{a^2+2}{2}$.
Значит, $\frac{a^2+2}{2}=\frac{4a^2+4a+1}{9}$; $a^2-8a+16=0, a=4$. При a = 4 уравнение $x^2-9x+18=0$ имеет корни 6 и 3.
Ответ: 4.

Пример 4.

Найдите все значения *a*, для которых разность корней уравнения $2x^2-(a+1)x+a+3=0$ равна 1.
Решение.
$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$
По теореме Виета $x_1+x_2=\frac{a+1}{2}$; $x_1\cdot x_2=\frac{a+3}{2}$. Следовательно, $(x_1-x_2)^2=$ $\left(\frac{a+1}{2}\right)^2-4\,\frac{a+3}{2}=\frac{a^2-6a-23}{4}$.
По условию $\frac{a^2-6a-23}{4}$=1. Значит, a_1=9, a_2=-3. При данных значениях параметра *a* дискриминант исходного уравнения больше нуля.
Ответ: 9, -3.

Пример 5.
При каком значении параметра *m* сумма квадратов корней уравнения $x^2+(m-1)x+m^2-1{,}5=0$ наибольшая?
Решение.
По теореме Виета имеем x_1+x_2= -*m*+1, $x_1\cdot x_2$ = m^2-1,5.
$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$=$(-m+1)^2-2(m^2-1{,}5)=-m^2-2m+4=-(m+1)^2+5$
При *m*= -1 выражение $-(m+1)^2+5$ принимает наибольшее значение. При *m* = -1 уравнение $x^2-2x-0{,}5=0$ имеет корни.
Ответ: -1.

Пример 6.

В уравнении $(a^2-5a+3)x^2+(3a-1)x+2=0$ определить a так, чтобы отношение корней равнялось 2.

Решение.

Пусть x - корень уравнения. Тогда второй корень $2x$.

$$x+2x=\frac{1-3a}{a^2+3-5a};3x=\frac{1-3a}{a^2-5a+3};\quad x=\frac{1-3a}{(a^2-5a+3)\cdot 3}$$

$$x\cdot 2x=\frac{2}{a^2-5a+3};2x^2=\frac{2}{a^2-5a+3}.$$

$$\frac{(1-3a)^2}{9(a^2-5a+3)^2}=\frac{1}{a^2-5a+3};a=\frac{2}{3}.$$

При a=$\frac{2}{3}$ получим уравнение $x^2+9x+18=0$, корни которого -3 и -6.

Ответ: $\frac{2}{3}$

Пример 7.

Известно, что корни уравнения $x^2-5x+a=0$ на 1 меньше корней уравнения $x^2-7x+3a-6=0$. Найдите а и корни каждого из этих уравнений.

Решение.

Пусть x_1 и x_2 - корни уравнения $x^2-5x+a=0$.

По условию x_1+1 и x_2+1 корни уравнения $x^2-7x+3a-6=0$.

По теореме Виета имеем $\begin{cases} x_1+x_2=5 \\ x_1\cdot x_2=a \\ (x_1+1)\cdot(x_2+1)=3a-6 \end{cases}$

Отсюда a+5+1=3a-6, a=6.

При a = 6 уравнение $x^2-5x+6=0$ имеет корни 2 и 3, а уравнение $x^2-7x+12=0$ имеет корни 3 и 4.

Ответ: a = 6, 2 и 3 - корни первого уравнения, 3 и 4 - корни второго уравнения.

Пример 8.

Найдите все значения a, при которых сумма квадратов корней уравнения $x^2-ax+a+7=0$ равна 10.

Решение.

Для того, чтобы сумма квадратов корней уравнения равнялась какой-либо величине, эти корни должны существовать. Значит, дискриминант нашего уравнения должен быть неотрицательным, т.е. a^2-4(a+7)≥ 0. При таких *a* у исходного уравнения найдутся (возможно, совпадающие) корни x_1 и x_2. Запишем для них теорему Виета: $x_1 + x_2 = a$, $x_1 \cdot x_2 = a+7$. Теперь, не вычисляя корней, можно найти сумму их квадратов через *a*:

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2(a+7)$ Согласно условию, эта сумма квадратов равна 10, откуда получаем квадратное уравнение $a^2-2(a+7)=10$, корнями которого являются числа 6 и -4. При *a* = 6 дискриминант исходного уравнения отрицательный, а при *a* = -4 положительный.

Ответ: *a* = -4.

3.4. Расположение корней квадратного трехчлена

Многие задачи с параметрами сводятся к поиску и исследованию корней квадратного трехчлена $ax^2+bx+c=0$ относительно точки или заданного промежутка (интервала, отрезка или луча).

Рассмотрим схему решения таких задач:

1. Если коэффициент *a* отличен от константы, то решение задачи следует начинать с исследования случая, когда $a=0$.

При этом уравнение (или неравенство) получится с конкретными числовыми коэффициентами, решая которое, легко проверить выполнение условия задачи.

2. Считая $a \neq 0$, найти дискриминант D = b^2-4ac квадратного трехчлена. Если дискриминант есть полный квадрат некоторого выражения (т.е. извлекается корень из D), то лучше найти корни x_1 и x_2 квадратного трехчлена и подчинить их условиям задачи.

3. Если же $\sqrt{D}$ не извлекается, то также можно найти корни x_1, x_2 и подчинить их условиям задачи, но при этом, как правило, приходится решать непростые иррациональные неравенства, которые приводят к большим и

утомительным вычислениям. В этом случае лучше использовать графический метод, включающий в себя следующие операции.

1) Графический анализ задачи – это выбор положений параболы $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ относительно изучаемых точек, для которых выполняются все условия задачи. При этом следует опираться на рисунки:

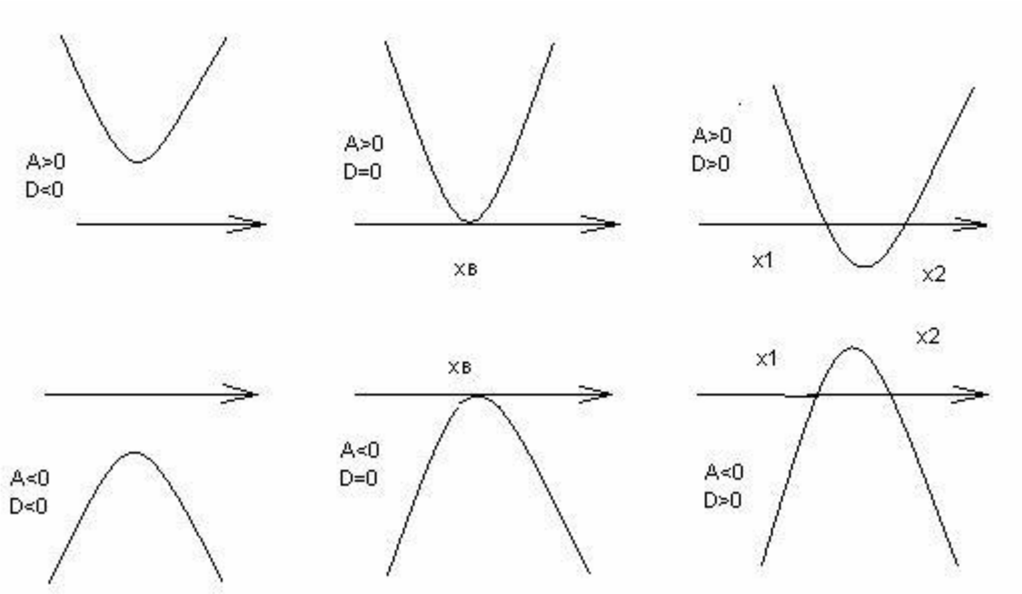


Рисунок 3.

Удовлетворяющие условиям задачи положения параболы можно получить, перемещая ее вправо и влево, вверх и вниз, т.е. рассматривая параболу, как «плавающую» фигуру, в силу чего данный метод называют еще методом «плавающей параболы». Иногда для получения более полной информации полезно рассматривать также некоторые случаи расположения параболы, когда часть условий задачи не выполняется.

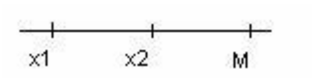
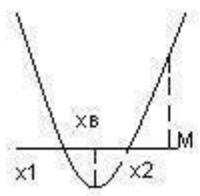
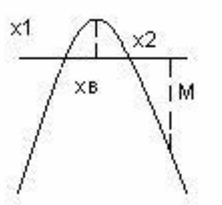
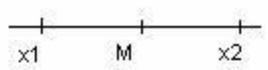
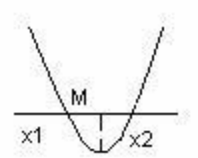
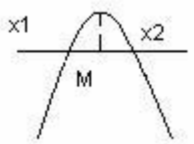
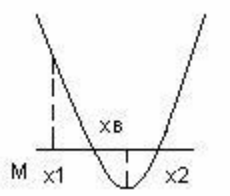
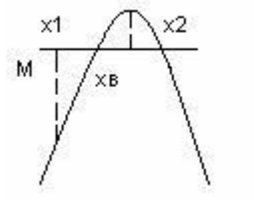
2) Аналитическое описание подходящих по условиям задачи случаев расположения параболы, которое включает в себя следующие пункты (все или только некоторые):

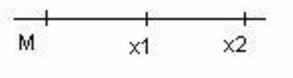
- описание знака, а иногда и значения коэффициента *a*;
- описание знаков, а иногда и значения дискриминанта D;

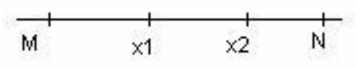
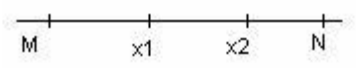
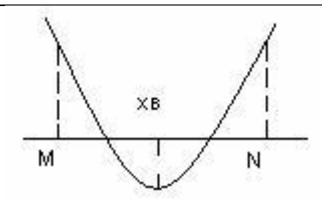
- описание знаков, а иногда и значения квадратичной функции $f(x)=ax^2+bx+c$ в точках, относительно которых исследуется расположение корней функции;
- наложение условий на расположение вершины параболы относительно изучаемых точек.

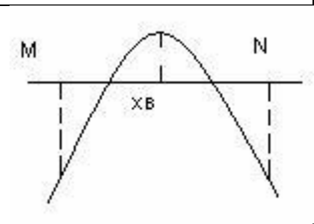
В прилагаемой таблице приведены условия, описывающие наиболее часто встречаемые на практике случаи расположения корней квадратного трехчлена относительно одной и двух точек.

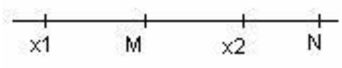
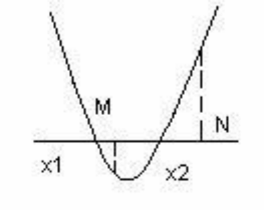
Таблица 1.

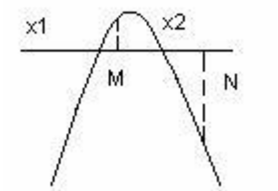
Условия на корни	Ветви параболы направлены вверх	Ветви параболы направлены вниз	Объединенные условия
$x_1<M$ $x_2<M$  	 $a>0$ $D\geq 0$ $f(M)>0$ $x_{в}<M$	 $a<0$ $D\geq 0$ $f(M)<0$ $x_{в}<M$	$D\geq 0$ $af(M)>0$ $x_{в}<M$
$x_1<M$ $x_2>M$  	 $a>0$ $f(M)<0$	 $a<0$ $f(M)>0$	$af(M)<0$
$x_1>M$ $x_2>M$	 	 	$D\geq 0$ $af(M)>0$ $x_{в}>M$

<table>
<tr>
<td>

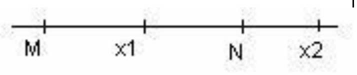
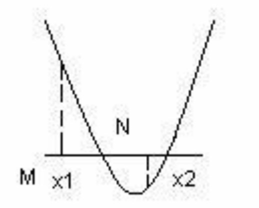
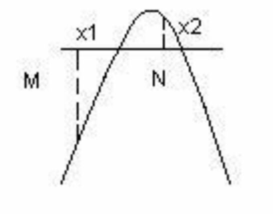
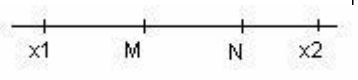
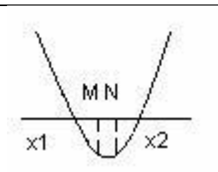
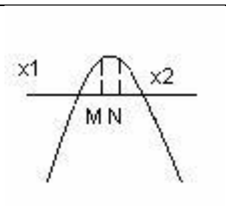
$M < x_1 < N$
$M < x_2 < N$

</td>
<td>$a > 0$
$D \geq 0$
$f(M) > 0$
$x_{в} > M$</td>
<td>$a < 0$
$D \geq 0$
$f(M) < 0$
$x_{в} > M$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$M < x_1 < N$
$M < x_2 < N$

</td>
<td>

$a > 0$
$D \geq 0$
$f(M) > 0$
$f(N) > 0$
$M < x_{в} < N$</td>
<td>

$a < 0$
$D \geq 0$
$f(M) < 0$
$f(N) < 0$
$M < x_{в} < N$</td>
<td>$\mathbf{D > 0}$
$\mathbf{af(M) > 0}$
$\mathbf{af(N) > 0}$
$\mathbf{M < x_{в} < N}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$x_1 < M$
$M < x_2 < N$

</td>
<td>

$a > 0$
$f(M) < 0$
$f(N) > 0$</td>
<td>

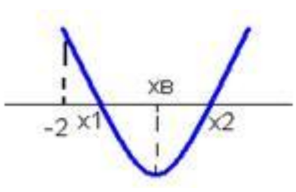
$a < 0$
$f(M) > 0$
$f(N) < 0$</td>
<td>$\mathbf{af(M) < 0}$
$\mathbf{af(N) > 0}$</td>
</tr>
</table>

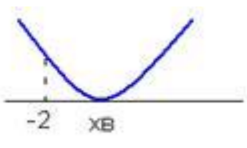
<table>
<tr>
<td>$M < x_1 < N$
$x_2 > N$
</td>
<td>
$a > 0$
$f(M) > 0$
$f(N) < 0$</td>
<td>
$a > 0$
$f(M) < 0$
$f(N) > 0$</td>
<td>$af(M) > 0$
$af(N) < 0$</td>
</tr>
<tr>
<td>$x_1 < M$
$x_2 > N$
</td>
<td>
$a > 0$
$f(M) < 0$
$f(N) < 0$</td>
<td>
$a < 0$
$f(M) > 0$
$f(N) > 0$</td>
<td>$af(M) < 0$
$af(N) < 0$</td>
</tr>
</table>

Пример 1. При каких значениях параметра а корни уравнения
$x^2 + 2(a+1)x + a^2 + a + 1 = 0$ лежат на луче $(-2;+\infty)$.

Сделаем графический анализ задачи. По условию задачи возможны лишь следующие два случая расположения графика функции

$f(x) = x^2 + 2(a+1)x + a^2 + a + 1$ относительно точки $x = -2$.





хв = -а - 1

Эти оба случая аналитически описываются условиями

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ f(-2))0, \\ x_в) - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a \geq 0, \\ (-2)^2 + 2(a+1)(-2) + a^2 + a + 1)0, \\ -a - 1) - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ a^2 - 3a + 1)0, \\ a(0. \end{cases}$$

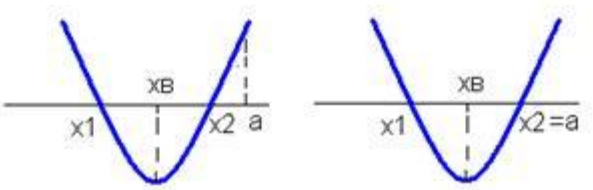
Отсюда следует, что $0 \leq a < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

Пример 2. Найти все значения параметра а, при которых корни квадратного трехчлена $x^2 + x + a$ различны и не больше а.

Решение.

Найдем дискриминант D = 1 - 4а. учитывая, что $\sqrt{D}$ не извлекается, решим пример графически.

Сделаем графический анализ. Так как корни x1, x2 функции $f(x) = x^2 + x + a$ различны и $x1 \le a$, $x2 \le a$, то ее график может иметь лишь следующие расположения.



xв= -1/2

Опишем эти графики аналитически:

$$\begin{cases} D>0, \\ f(a) \ge 0, \\ x_в < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4a>0, \\ a^2+2a \ge 0, \\ -\frac{1}{2} < a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<\frac{1}{4}, \\ a \le -2 \quad \text{или } a \ge 0, \\ a > -\frac{1}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \quad 0 \le a < \frac{1}{4}$$

Ответ: а Є [0; ¼)

Пример 3. Найти значения параметра, при которых один корень уравнения $(2a+1)x^2 - ax + a - 2 = 0$ больше единицы, а другой меньше единицы.

Решение.

Введем новую переменную $z = x - 1$ и перепишем через нее исходное уравнение. Тогда исходную задачу можно переформулировать в виде:

«при каких значениях параметра корни уравнения $(2a+1)z^2+(3a+2)z+2a-1 = 0$

Имеют разные знаки».

Ответ на этот вопрос легко получаем из теоремы Виета.

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{2a-1}{2a+1} < 0, \quad \Rightarrow a \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Рассмотрим так же другой способ:

Обозначая (2a+1)x^2-ax+a-2=f(x), запишем условия расположения корней уравнения в виде следующих систем неравенств:

$\begin{cases} 2a+1>0, \\ f(1)=2a-1<0, \end{cases} \Rightarrow a \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ (парабола с ветвями вверх)

$\begin{cases} 2a+1<0, \\ f(1)=2a-1>0, \end{cases} \Rightarrow a \in \varnothing$ (парабола с ветвями вниз).

Из этого решения находится не только значение параметра, но положение графика квадратичной функции, при котором условие задачи выполняется.

Ответ. $a \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

4. Уравнения высших степеней

Для начала сформулируем такое утверждение про рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами.

Если многочлен с целыми коэффициентами имеет целый корень, то это число является делителем свободного члена.

Если рациональное число $x = \frac{m}{n}$ (где m и n взаимно простые числа) является корнем многочлена P(x) с целыми коэффициентами, то m является делителем свободного члена, а n делителем старшего коэффициента.

4.1. Теорема Безу

Формулировка теоремы Безу:

Остаток от деления многочлена P(x) на двучлен (x – a) равен P(a).

Следствия из теоремы Безу:

1. Число a есть корень многочлена P(x) тогда и только тогда, когда P(x) делится без остатка на двучлен (x – a).

Отсюда, в частности, следует, что множество корней многочлена P(x) тождественно множеству корней соответствующего уравнения P(x) = 0.

2. Свободный член многочлена делится на любой целый корень многочлена с целыми коэффициентами (если старший коэффициент равен 1, то все рациональные корни являются и целыми).

Теорема Безу дает возможность, найдя один корень многочлена, искать далее корни многочлена, степень которого уже на единицу меньше:

если P(a) = 0, то заданный многочлен P(x) можно представить в виде:

P(x) = (x – a)Q(x)

Таким образом, один корень найден и далее находятся уже корни многочлена Q(x), степень которого на единицу меньше степени исходного многочлена. Иногда этим приемом - он называется понижением степени - можно найти все корни заданного многочлена.

Пример №1: Решим уравнение $x^3 + 2x^2 - 1 = 0$

Решение №1: Если это уравнение имеет целый корень, то он является делителем свободного члена (-1), т.е. равняется одному из чисел: ± 1. Проверка показывает, что корнем уравнения является число -1. Значит, многочлен

$P_3(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ можно представить в виде произведения $P_3(x) = (x + 1)P_2(x)$, т.е. многочлен $P_3(x)$ можно без остатка разделить на двучлен (x+1). Выполним такое деление “углом”:

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 2x^2 - 1 & x+1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3 + \;\; x^2} & x^2+x-1 \\ 0x^3 + x^2 - 1 & \\ \qquad \underline{x^2 + x} & \\ \qquad 0x^2 - x - 1 & \\ \qquad\quad \underline{-x - 1} & \\ \qquad\qquad\quad 0 & \end{array}$$

Таким образом, мы фактически разложили левую часть уравнения на множители: $(x+1)(x^2 + x - 1) = 0$.

Произведение множителей равно нулю, если один из множителей равен нулю. Получаем два уравнения:

$x + 1 = 0 \qquad x^2 + x - 1 = 0$

$x_1 = -1 \qquad D = 1 + 4 = 5$

$$x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Ответ: $x_1 = -1$; $x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Пример №2: Решим уравнение $x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 12x + 9 = 0$

Решение №2: Если это уравнение имеет целый корень, то он является делителем свободного члена (9), т.е. равняется одному из чисел: $\pm1; \pm3; \pm9$.

Проверим:

$x = 1$; $P_4(1) = -16$

$x = -1$; $P_4(-1) = 0$ (т.е. $P_n(x):(x + 1)$)

Значит, многочлен $P_4(x) = x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 12x + 9$ можно представить в виде произведения $P_4(x) = (x + 1)P_3(x)$, т.е. многочлен $P_4(x)$ можно без остатка разделить на двучлен $(x + 1)$. Выполним такое деление "углом":

$x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 12x + 9 \;\; | \; \underline{x + 1}$

$\underline{x^4 + x^3} \qquad\qquad\qquad\qquad x^3 + 3x^2 - 21x + 9$

$0x^4 + 3x^3 - 18x^2$

$\underline{3x^3 + 3x^2}$

$0x^3 - 21x^2 - 12x$

$\underline{-21x^2 - 12x}$

$0x^2 + 9x + 9$

$\underline{9x + 9}$

0

Таким образом, мы разложили левую часть уравнения на множители:

$(x + 1)(x^3 + 3x^2 - 21x + 9) = 0$.

Аналогичным образом поступим и с многочленом $P_3(x) = x^3 + 3x^2 - 21x + 9$.

Если это уравнение $x^3 + 3x^2 - 21x + 9 = 0$ имеет целый корень, то он является делителем свободного члена, т.е. равняется одному из чисел: $\pm1; \pm3; \pm9$.

Проверим:

$x = 1$; $P_3(1) = -8$

$x = -1$; $P_3(-1) = 32$

$x = 3$; $P_3(3) = 0$ (т.е. $P_n(x):(x - 3)$)

Значит, многочлен $P_3(x) = x^3 + 3x^2 - 21x + 9$ можно представить в виде произведения $P_3(x) = (x - 3)P_2(x)$, т.е. многочлен $P_3(x)$ можно без остатка разделить на двучлен $(x - 3)$. Выполним такое деление “углом”:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + 3x^2 - 21x + 9 & x - 3 \\
\cline{2-2}
\underline{x^3 - 3x^2} & x^2 + 6x - 3 \\
0x^3 + 6x^2 - 21x & \\
\quad \underline{6x^2 - 18x} & \\
\quad 0x^2 - 3x + 9 & \\
\qquad \underline{-3x + 9} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Таким образом, мы разложили левую часть исходного уравнения на множители: $(x + 1)(x - 3)(x^2 + 6x - 3) = 0$

Произведение множителей равно нулю, если один из множителей равен нулю. Получаем три уравнения:

$x + 1 = 0 \quad x - 3 = 0 \quad x^2 + 6x - 3 = 0$

$x_1 = -1 \quad x_2 = 3 \quad D = 36 + 12 = 48$

$$x_{3,4} = \frac{-6 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{3}$$

Ответ: $x_1 = -1$; $x_2 = 3$; $x_{3,4} = -3 \pm 2\sqrt{3}$.

Пример №3: $2x^3 + 5x^2 + 6x + 2 = 0$

Заметим, что делители свободного члена ±1 и ±2 не являются корнями этого уравнения, зато число $x = -\frac{1}{2}$, где m = -1 – делитель свободного члена, n = 2 делитель старшего коэффициента, будет корнем. Поделим уравнение на $\frac{1}{2}$ и решим самостоятельно.

4.2. Обобщенная теорема Виета.

Пусть x_1; x_2… x_n – корни многочлена $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_{n-1}x + a_n$ тогда рациональные корни многочлена находятся следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n = \dfrac{a_2}{a_0} \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -\dfrac{a_3}{a_0} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 x_2 \ldots (-1)^n \dfrac{a_n}{a_0} \end{cases}$$

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_{n-1}x + a_n$ с целыми коэффициентами имеют вид $x = \frac{m}{p}$, где m – делитель свободного члена a_n , p – делитель старшего коэффициента a_0

- приведенный многочлен с целыми коэффициентами ($a_0 = 1$) не может иметь дробных корней. Целые корни такого многочлена являются делителями его свободного члена.

Докажем теорему Виета для кубического уравнения.

Пусть дано уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ и x^1, x^2, x^3 – корни данного уравнения. Тогда левую часть уравнения можно разложить на множители:

$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x – x_1)(x – x_2)(x – x_3)$ | : a;

$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x – x_1)(x – x_2)(x – x_3)$;

$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x^2 – x_1x – x_2x + x_1x_2)\ (x – x_3)$;

$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 – x_1x^2 – x_2x^2 + x_1x_2x – x_3x^2 + x_1x_3x + x_2x_3x – x_1x_2x_3$;

$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 – (x_1x^2 + x_2x^2 + x_3x^2) + (\ x_1x_2x + x_1x_3x + x_2x_3x) – x_1x_2x_3$;

$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 – (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x – x_1x_2x_3$.

Но два многочлена тождественно равны в том и только в том случае, когда коэффициенты при одинаковых степенях равны. Отсюда следует, что выполняется равенство

$$\begin{cases} -(x_1 + x_2 + x_3) = \dfrac{b}{a}; \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a}; \\ x_1x_2x_3 = -\ \dfrac{d}{a}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}; \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a}; \\ x_1x_2x_3 = -\ \dfrac{d}{a}. \end{cases}$$

Рассмотрим пример применения теоремы.

Пример:

Напишите кубическое уравнение, корни которого являются квадратами корней уравнения $x^3 – 3x^2 + 7x + 5 = 0$.

Решение.

Обозначим корни заданного уравнения через x_1, x_2 и x_3. Тогда по формулам Виета имеем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 7, \\ x_1x_2x_3 = – 5. \end{cases}$$

Корни искомого уравнения обозначим буквами y_1, y_2, y_3, а его коэффициенты — буквами b_1, b_2, b_3, положив коэффициент при y_3 равным 1. По условию должны выполняться равенства $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$, $y_3 = x_3^2$ и поэтому

$b_1 = – (y_1 + y_2 + y_3) = – (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$,

$b_2 = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2$,

$b_3 = – y_1y_2y_3 = – x_1^2x_2^2x_3^2$.

Но имеем

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 – 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 9 – 2\cdot 7 = – 5$,

$x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 = (x^1x^2 + x^1x^3 + x^2x^3)^2 – 2x^1x^2x^3(x^1 + x^2+x^3)= 49 – 2\cdot 3\cdot(– 5) = 79$,

$x_1^2x_2^2x_3^2 = (x^1x^2x^3)^2 = (– 5)^2 = 25$.

Значит, $b_1 = 5$, $b_2 = 79$, $b_3 = – 25$, и потому искомое уравнение имеет вид

$y^3 + 5y^2 + 79y – 25 = 0$.

Ответ: $y^3 + 5y^2 + 79y – 25 = 0$.

Приведем также для ознакомления без вывода формулу Кардано для решения одного из видов кубических уравнений.

4.3. Формула Кардано.

Так называется формула для нахождения корней кубического многочлена – решений уравнения

$x^3 + px + q = 0$, (*)

где значения x и коэффициенты p, q – комплексные (в частности, действительные) числа.

Эта формула имеет вид

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad (**)$$

Выражение $D = -4p^3 - 27q^2$ называется *дискриминантом* уравнения (*). Как известно, в области комплексных чисел кубический корень имеет три различных значения. В формуле (*) значение первого корня можно выбрать произвольно, а значение второго надо выбрать из трёх возможных таким, чтобы произведение этого корня на первый, произвольно выбранный, дало $\left(-\frac{p}{3}\right)$. Таким образом получают все три корня уравнения (*).

Если коэффициенты p, q уравнения (*) – действительные числа, от дискриминанта, как и в случае корней квадратного уравнения, зависит (но гораздо более сложным образом) количество и «качество» корней. Именно:

- При $D < 0$ уравнение (*) имеет один действительный корень и два комплексных, сопряжённых (см.) между собой.
- При $D = 0$ все три корня действительны, причём, по крайней мере, два из них равны.
- При $D > 0$ уравнение (*) имеет три различных действительных корня. Формула Кардано даёт один из них, скажем, x_1, а два других даёт квадратное уравнение, полученное приравниванием нулю квадратного

трёхчлена – частного от деления левой части (*) на двучлен-разность ($x - x_1$).

Заметим что существуют замены специального вида, которые позволяют сводить некоторые другие виды кубических уравнений к виду (*)

4.4. Возвратные уравнения.

Уравнения четвертой степени вида $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$,

где $\frac{e}{a} = \frac{d^2}{b^2}$ и a, b, c $\neq 0$, называются возвратными.

Заменой $t = bx + \frac{d}{x}$ они сводятся к квадратному уравнению $\frac{a}{b^2} t^2 + t + c - 2a\frac{d}{b} = 0$.

Пример 1) $x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0$, здесь a = 1, b = 2, c = - 11, d = 4, e = 4.

Решение**:** $x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0$

Так как x = 0 не является корнем данного уравнения, то разделим обе его части на x^2.

$x^2 + 2x - 11 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} = 0$,

$(x^2 + \frac{4}{x^2}) + (2x + \frac{4}{x}) - 11 = 0$,

$(x + \frac{2}{x})^2 - 4 + 2(x + \frac{2}{x}) - 11 = 0$.

Пусть $t = x + \frac{2}{x}$, тогда

$t^2 + 2t - 15 = 0$, D = 64,

$t = \frac{-2 \pm 8}{2}$,

$t_1 = -5$, $t_2 = 3$.

Значит, $x + \frac{2}{x} = -5$ или $x + \frac{2}{x} = 3$

$x^2 + 5x + 2 = 0$ $\qquad$ $x^2 - 3x + 2 = 0$

D = 17 $\qquad$ D = 1

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2} \qquad x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

Ответ: $\frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$; 1; 2.

Пример 2) $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x + 1 = 0$.

Решение:

Т.к. $x = 0$ не является корнем уравнения, то обе части уравнения разделим на $x^2 \neq 0$.

$$x^2 - 4x - 2 + 4\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x - \frac{1}{x}\right) - 2 = 0$$

Пусть $x - \frac{1}{x} = t$. Тогда $x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = t$

Значит, $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$

$t^2 + 2 - 4t - 2 = 0$

$t^2 - 4t = 0$

$t(t-4) = 0$

$t = 0$; $t = 4$

Имеем два уравнения с переменной x:

$x - \frac{1}{x} = 0$	$x - \frac{1}{x} = 4$
$x^2 - 1 = 0$	$x^2 - 4x - 1 = 0$
$x_1 = \pm 1$	$D = 16 + 4 = 20$
	$x_2 = 2 \pm \sqrt{5}$

Ответ: $x_1 = \pm 1$; $x_2 = 2 \pm \sqrt{5}$.

5. Некоторые другие виды алгебраических уравнений.

5.1. Дробно - рациональные уравнения

В 8 классе ученики впервые встречаемся с дробно-рациональными уравнениями и знакомятся с этим понятием.

1) Рациональное уравнение, в котором левая и правая части являются целыми выражениями, называется целым рациональным уравнением.

2) Рациональное уравнение, в котором хотя бы одна из частей уравнения содержит переменную в знаменатели дроби, называется дробно-
рациональным уравнением.

Заметим, что допускается либо проверка полученных корней, которая является частью решения, либо ОДЗ.

Можно рассмотреть решение таких уравнений на следующем примере:

$$\frac{3}{y+2}-\frac{4}{y^2-2y+4}=\frac{2}{y^3+8}$$

$$\frac{3}{y+2}-\frac{4}{y^2-2y+4}=\frac{2}{(y+2)(y^2-2y+4)}$$ ОДЗ: $(y+2)(y^2-2y+4)\neq 0$

$$3(y^2-2y+4)-4(y+2)=2$$ $y\neq -2$

$3y^2-6y+12-4y-8=2$, $3y^2-10y+2=0$,

$D_1=25-3\cdot 2=19$ $y_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{19}}{3}$

Ответ: $\frac{5\pm\sqrt{19}}{3}$

Рассмотрим алгоритмы решения дробно-рациональных уравнений:

I способ

1. Найди общий знаменатель всех дробей.
2. Заменить данное уравнение целым, умножая обе его части на общий знаменатель.

3. Решить полученное целое уравнение.

4. Исключить из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель.

5. Записывают ответ.

II способ

1. Все члены собираются в одной части уравнения.
2. Выражения заменяются одной дробью.
3. От равенства дроби нулю переходят к смешанной системе и решают ее.
4. Записывают ответ.

Например, решение уравнения будет следующим:

$$\frac{3}{y+2}-\frac{4}{y^2-2y+4}-\frac{2}{(y+2)(y^2-2y+4)}=0,$$

$$\frac{3y^2-6y+2-4y-8-2}{(y+2)(y^2-2y+4)}=0,$$

отсюда

$$\begin{cases}3y^2-10y+2=0,\\(y+2)(y^2-2y+4)\neq 0,\end{cases} \qquad \begin{cases}y_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{19}}{3},\\(y+2)(y^2-2y+4)\neq 0,\end{cases}$$

$$y_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{19}}{3}$$

Ответ: $\frac{5\pm\sqrt{19}}{3}$

Так же, как и в предыдущих классах применяют уравнения при решении задач, тождественных преобразованиях выражений, еще раз показывают, что уравнения есть средство для решения более сложных задач.

Желательно решать с учащимися 9 класса более сложные уравнения, которые сводятся к квадратным различными способами. Рассмотрим наиболее интересные.

Пример 1. Решить уравнение

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0.$$

Решение.

Если уравнение имеет корни, то они содержаться среди делителей свободного члена. Однако, это уравнение допускает более простое и изящное решение.

Запишем исходное уравнение в виде:

$x^4-10x^3+25x^2+10x^2-50x+24=0$,

$(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24=0$,

откуда, по теореме, обратной теореме Виета находим:

$x^2 - 5x=-4$ или $x^2 - 5x=-6$.

Если $x^2 - 5x = -4$, то $x^2 - 5x+4=0$, откуда находим $x_1=1$, $x_2=4$;

если $x^2 - 5x=-6$, находим $x^2 - 5x+6=0$, $x_3=2$, $x_4=3$.

Итак, исходное уравнение имеет 4 корня.

Ответ: $x_1=1$, $x_2=4$, $x_3=2$, $x_4=3$.

Пример 2. Решить уравнение

$x(x - 1)(x + 1)(x + 2) = 24$

Решение.

Заметим, что $(x - 1)(x + 2) = x^2+x-2$ и $x(x + 1) = x^2+x$.

$(x^2+x-2)(x^2+x)=24$

Тогда, полагая $x^2+x-1=t$, получим уравнение $(t-1)(t+1)=24$, или $t^2-1=24$, $t^2=25$, откуда $t_{1,2}=\pm 5$.

Если $t=-5$, то $x^2+x+4=0$- нет действительных корней, т.к. $D<0$; если $t=5$, то $x^2+x-6=0$, откуда находим $x_1=-3$, $x_2=2$.

Ответ: $x_1=-3$, $x_2=2$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\frac{13x}{3x^2-5x+2}-\frac{12x}{3x^2+x+2}=5.$$

Решение.

Заметим, что x=0 не является корнем уравнения, тогда, разделив числитель и знаменатель каждой дроби на $x\neq 0$, получим уравнение

$$\frac{13}{3x\;\;-5+\frac{2}{x}}-\frac{12}{3x\;\;+1+\frac{2}{x}}=5. \qquad (1)$$

Пусть $3x+\frac{2}{x}=y$, тогда уравнение (1) примет вид $\frac{13}{y-5}-\frac{12}{y+1}=5$, где $y\neq 5$, $y\neq -1$, следовательно,

13(y+1)-12(y-5) = 5(y-5)(y+1), или

$13y+13-12y+60 = 5y^2-20y-25$,

$5y^2-21y-98 = 0$, $D = 441+1960 = 2401 = 49^2>0$,

$y_{1,2}=\frac{21\pm 49}{10}$, $y_1 = -\frac{14}{5}$, $y_2 = 7$.

Если $y = -\frac{14}{5}$, то учитывая подстановку, получим $3x+\frac{2}{x} = -\frac{14}{5}$,

или $15x^2+14x+10 = 0$- нет корней, так как $\frac{D}{4}=49-150=-101<0.$

Если y=7, то $3x+\frac{2}{x} = 7$, или $3x^2-7x+2 = 0$, $D = 49-24 = 5^2>0$,

$x_{1,2}=\frac{7\pm 5}{6}$, $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2 = 2$.

Оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2 = 2$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\frac{x^2+18x-7}{x\;\;+6x-7}+\frac{x^2+6x-7}{x}=14.$$

Решение.

Так как $x\neq 0$, то уравнение можно записывать в виде

$$\frac{x+18-\frac{7}{x}}{x+6-\frac{7}{x}}+x+6-\frac{7}{x}=14.$$

Заменой $x-\frac{7}{x}=y$ уравнение (2) приводится к виду $\frac{y+18}{y+6}+y+6=14,$

Или $y+18+(y+6)^2=14(y+6),\ y\neq -6.$ (3)

после упрощения получим:

$y^2-y-30 = 0$, откуда $y_1 = 6$, $y_2 = -5$.

Оба корня удовлетворяют условию (3).

Если $y = 6$,то $x-\frac{7}{x}=6$, или $x^2-6x-7 = 0$, откуда $x_1 =7$, $x_2 = 1$

Эти значения знаменатели дробей в нуль не обращают.

Если $y = -5$, то $x-\frac{7}{x} = -5$, или

$$x^2+5x-7=0, D=25+28=53>0,$$

$$x_{3,4}=\frac{-5\pm\sqrt{53}}{2}.$$

Эти значения знаменатели дробей в нуль не обращают.

Итак, исходное уравнение имеет всего 4 корня.

Ответ: $x_1=7, x_2=-1, x_{3,4}=\frac{1}{2}(-5\pm\sqrt{53}).$

Пример 5. Решить уравнение.

$9x^2(x-1)^2 = 4(2x^2-2x+5)$.

Решение.

Запишем уравнение в виде:

$9x^2(x-1)^2 = 4(2\ (x^2-x)+5)$, или

$9(x(x-1)^2 = 4(2(x^2-x)+5)$

$9(x^2- x)^2 = 4(2(x^2-x) +5)$, (5)

Пусть $x^2 - x = y$, тогда уравнение (5) запишется в виде

$9y^2 = 4(2y+5)$, или $9y^2-8y-20 = 0$,

$$\frac{D}{4} = 16 + 180 = 14^2 > 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{4 \pm 14}{9};$$

$$y_1 = -\frac{10}{9}, y_2 = 2.$$

Учитывая подстановку, получим два квадратных уравнения:

1) $x^2 - x = -\frac{10}{9}$, или $9x^2-9x+10 = 0$,

$D = 81-360 = -279<0$ - нет действительных корней.

2) $x^2-x = 2$, или $x^2-x-2 = 0$, откуда находим

$$x_1 = -1, x_2 = 2.$$

Ответ: $x_1 = -1, x_2 = 2.$

Пример 6. Решить уравнение

$$x^3+x+4\sqrt{3}=0.$$

Решение.

Применение формулы для решения кубического уравнения (формул Кардано) приводит к сложным вычислениям, связанными с иррациональностями.

Решение упростится, если сделать замену в виде $x=y\sqrt{3}$, тогда данное уравнение примет вид:

$3\sqrt{3}y^3+\sqrt{3}y+4\sqrt{3}=0$,

$3y^3+y+4=0$ (6)

Легко заметить, что $y=-1$ есть корень уравнения (6), тогда левую часть можно разделить на $(y+1)$ без остатка.

$(y+1)(3y^2-3y+4) = 0$, откуда $y = -1$ есть единственный корень, т.к. уравнение $3y^3+y+4=0$ не имеет действительных корней ($D<0$).

Если $y=-1$, то $x= y\sqrt{3} =-\sqrt{3}$

Ответ: $x=-\sqrt{3}$.

Пример 7. Решим уравнение:

$x^2(x+2)^2-x(x+2)(2x-1)-6(2x-1)^2=2$

Решение.

Очевидно, что $x=\frac{1}{2}$ не является корнем уравнения, значит $2x-1\neq 0$.

Разделим обе части уравнения на $(2x-1)^2\neq 0$ и получим

$$\frac{x^2(x+2)^2}{(2x-1)^2}-\frac{x(x+2)(2x-1)}{(2x-1)^2}-6\cdot\frac{(2x-1)^2}{(2x-1)^2}=0,$$

$$\left(\frac{x(x+2)}{2x-1}\right)^2-\frac{x(x+2)}{2x-1}-6=0,$$

Пусть, $\frac{x(x+2)}{2x-1}=t$, тогда $t^2-t-6=0$

$t_1=3$, $t_2=-2$

Вернемся к прежней переменной

$$\frac{x(x+2)}{2x-1}=3;$$

$x^2 + 2x= 6x - 3$

$x^2 - 4x + 3 =0$

$x_1=1$, $x_2=3$

$$\frac{x(x+2)}{2x-1}=-2.$$

$x^2+2x=-4x+2$

$x^2+6x-2=0$

$$x_{3,4}=-3\pm\sqrt{9+2}$$

$$x_{3,4}=-3\pm\sqrt{11}$$

Ответ: $x_1=1$, $x_2=3$, $x_{3,4}=-3\pm\sqrt{11}$.

5.2. Метод замены переменной.

Рассмотрим несколько уравнений, которые решаются с помощью данного метода.

Пример №1: $x^6+3x^3-4=0$.

Решение: $x^6+3x^3-4=0$.

Пусть $x^3=t$

Тогда $t^2+3t-4=0$

$t = 1;\ t = -4$

Получаем: $x^3=1$ или $x^3=-4$

$x = 1;\quad x=-\sqrt[3]{4}$

Ответ: $-\sqrt[3]{4}$; 1.

Пример №2: $(x^2-3x)^2+3(x^2-3x)-28=0$

Решение: $(x^2-3x)^2+3(x^2-3x)-28=0$

Пусть $x^2-3x=t$

Тогда $t^2+3t-28=0$. $t = -7$, $t = 4$.

$x^2-3x= -7$ или $x^2-3x=4$

$x^2-3x+7 = 0\qquad x^2-3x-4 = 0$

$D = 9 - 28 = -19\qquad D = 9 + 16 = 25$

корней нет $\qquad x_1=-1;\ x_2=-4$.

Ответ: -1; 4.

Пример №3: $6x^2 + 3x + 1 + \dfrac{2x^2+x-5}{2x^2+x} = 0$.

Решение: $6x^2 + 3x + 1 + \dfrac{2x^2+x-5}{2x^2+x} = 0$

$3(2x^2 + x) + 1 + \dfrac{2x^2 + x - 5}{2x^2 + x} = 0.$

Пусть $t = 2x^2 + x$, $t \neq 0$, тогда

$3t + 1 + \dfrac{t-5}{t} = 0,$

$3t^2 + 2t – 5 = 0,$

$D = 64,$

$t = \dfrac{-2 \pm 8}{6}$ $t_1 = -\dfrac{5}{3}$, $t_2 = 1.$

Следовательно, $2x^2 + x = -\dfrac{5}{3}$ или $2x^2 + x = 1$

$6x^2 + 3x + 5 = 0$

Корней нет, так как $D < 0$.

$2x^2 + x – 1 = 0,$

$D = 9,$

$x = \dfrac{-1 \pm 3}{4},$

$x_1 = -1$, $x_2 = 0{,}5$.

Ответ: -1; $0{,}5$.

Пример №4: $(2x^2 – 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$.

Решение: $(2x^2 – 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$.

Т.к. $x = 0$ не является корнем данного уравнения. Разделим обе части уравнения на x^2.

$(2x - 3 + \dfrac{1}{x})(2x + 5 + \dfrac{1}{x}) = 9.$

Пусть $t = 2x + \dfrac{1}{x}$, тогда

$(t – 3)(t + 5) = 9,$

$t^2 + 2t – 24 = 0,$

$D = 100,$

$t = \dfrac{-2 \pm 10}{2}$,

$t_1 = -6$, $t_2 = 4$.

Значит, $2x + \dfrac{1}{x} = -6$ или $2x + \dfrac{1}{x} = 4$

$2x^2 + 6x + 1 = 0,$

$D = 28,$

$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$.

$2x^2 - 4x + 1 = 0,$

$D = 8,$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2}$; $\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$.

Пример №5: $\frac{16}{(x+6)(x-1)}-\frac{20}{(x+2)(x+3)}=1.$

Решение: $\frac{16}{(x+6)(x-1)}-\frac{20}{(x+2)(x+3)}=1.$

$$\frac{16}{x^2+5x-6}-\frac{20}{x^2+5x+6}=1.$$

Пусть $t = x^2 + 5x - 6$, $t \neq 0$, тогда $x^2+5x+6 = x^2+5x+6+6-6 = x^2+5x-6+12=t+12$

$\frac{16}{t}-\frac{20}{t+12}=1,$

$16(t + 12) - 20t - t(t + 12) = 0,$

$t^2 + 16t - 192 = 0,$

$D = 1024,$

$t=\frac{-16\pm 32}{2}$,

$t_1 = -24$, $t_2 = 8$.

Значит, $x^2 + 5x - 6 = -24$ или $x^2 + 5x - 6 = 8$

$x^2 + 5x + 18 = 0$ $\quad$ $x^2 + 5x - 14 = 0,$

$D = -47 < 0$ $\quad$ $D = 81$

=> корней нет $\quad$ $x_1 = -7$

Пример №6: $\frac{24x}{2x^2-3x+4}=\frac{12x}{x^2+x+2}+5.$

Решение: $\frac{24x}{2x^2-3x+4}=\frac{12x}{x^2+x+2}+5.$

Т.к. x = 0 не является корнем данного уравнения. Разделим числитель и знаменатель каждой дроби на x.

$$\frac{24}{2x-3+\frac{4}{x}}=\frac{12}{x+1+\frac{2}{x}}+5. -1$$

$$2x+\frac{4}{x}=2(x+\frac{2}{x})$$

Пусть $t = x + \frac{2}{x}$, тогда

$\frac{24}{2t-3}-\frac{12}{t+1}-5=0$, $t\neq 1,5$; $t\neq -1$

$\frac{24(t+1)-12(2t-3)-5(2t-3)(t+1)}{(2t-3)(t+1)}=0,$

$-10t^2 + 5t + 75 = 0,$

$$2t^2 - t - 15 = 0,$$
$$D = 121,$$
$$t = \frac{1 \pm 11}{4},\ t_1 = -\frac{5}{2},\quad t_2 = 3.$$

Значит, $x + \frac{2}{x} = 3$ или $x + \frac{2}{x} = -\frac{5}{2}$

$x^2 - 3x + 2 = 0$ $\quad$ $2x^2 + 5x + 4 = 0$

$D = 1$ $\quad$ $D = -7 < 0$

$x = \frac{3 \pm 1}{2}$, $\quad$ => корней нет

$x_1 = 1,\ x_2 = 2.$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.

Пример №7: $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0.$

Решение: $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0$. $x = 0$ не является корнем данного уравнения. Разделим обе части уравнения на x^2:

$$x^2 - 5x + 10 - \frac{10}{x} + \frac{4}{x^2} = 0,$$

$$\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{2}{x}\right) + 10 = 0\ .$$

Пусть $t = x + \frac{2}{x}$, тогда $t^2 = x^2 + 4 + \frac{4}{x^2}$, $x^2 + \frac{4}{x^2} = t^2 - 4$.

$$t^2 - 4 - 5t + 10 = 0,$$
$$t^2 - 5t + 6 = 0,$$
$$D = 1,$$
$$t = \frac{5 \pm 1}{2},\ t_1 = 2,\ t_2 = 3.$$

Значит, $x + \frac{2}{x} = 2$ или $x + \frac{2}{x} = 3$

$x^2 - 2x + 2 = 0$ $\quad$ $x^2 - 3x + 2 = 0$

$D = -4 < 0$ $\quad$ $D = 1$

=> корней нет $\quad$ $x = \frac{3 \pm 1}{2}$

$x_1 = 1,\ x_2 = 2$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.

При работе над этой темой преподавателю необходимо задавать учащимся следующие вопросы: «Какой из способов решения уравнений вам кажется более удачным?», «Можно ли решить данное уравнение другим способом?», «Какой подстановкой удобнее всего воспользоваться для решения данного уравнения?», «Какие условия необходимо учитывать при решении уравнения?», «Требуется ли выписывать ОДЗ или проверять правильность решения, отмечая при этом что именно является предпочтительнее?».

Заключение.

В работе рассмотрены основные методы решения алгебраических уравнений. Кроме этого, для такой важной темы как задача с параметрами, приведена методика решения задач на расположение корней квадратного трехчлена. Подробно изучена теорема Виета с приложением в виде решения некоторых задач с параметрами. Данная работа может быть полезна при проведении занятий по теме «Алгебраические уравнения» в рамках основной школы.

Список использованной литературы.

1. Мочалов В.В., Сильвестров В.В. Уравнения и неравенства с параметрами: Учебное пособие. – 2-е изд., Чебоксары: Изд-во Чувашского ун-та, 2000 г.
2. А.В. Кунгурцева, А.В. Келлер. Математика: Учебное пособие – Часть 2, Челябинск: ЮуРГУ, 2017 г.
3. С.А. Сорокина. Теорема Виета в задачах с параметрами. Кострома, 2006 г.
4. Реализация требований фгос ООО при обучении учащихся 8 класса теме: «Квадратные уравнения»
5. А.Н. Деменева. Решение квадратных уравнений. Материалы конференции «Молодежная научная весна – 2015», Забайкальский государственный университет. Чита 2015 г.
6. Алимов Ш.А. Алгебра 8кл.-М: Просвещение ,2008.
7. Балаян Э.Ф. «Практикум по решению задач». – М.: Дрофа, 2008.
8. Виноградова Л.В. Методика преподавания математики в средней школе. – Ростов н/Д.: Феникс, 2009.
9. Галиева С.А. Методика преподавания математики в восьмилетней школе.- М.: Академия,2008.
10. Галицкий М.Л. «Сборник задач по алгебре 7кл.» М.: Академия, 2011.
11. Исаева З.И. « Особенности в реализации деятельностного подхода в обучении математике в национальной школе ЧР» - Чеченский государственный педагогический университет (Грозный), 2015
12. Глейзер Г. И. «История математики в средней школе».- М.:Просвещение,2009.
13. Дорофеев Г.В. Математика 7кл.-М.: Дрофа, 2010. -107с..Демидова Т.Е. Теория и практика решения текстовых задач. - М.: Академия, 2012.

14. . М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.М. Звавич «Сборник задач по алгебре для 8-9 классов». Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики -Москва «Просвещение», 1999.
15. М.А.Еремин «Уравнения высших степеней» - Арзамас, 2003.
16. Зайкин М.И. Развивающий потенциал математики и его реализация в обучении (сборник научных и методических работ, предоставленных на региональную научно-практичечскую конференцию).М.: Арзамас, 2002.
17. . И.Р. Шафаревич «Популярные лекции по математике. О решении уравнений высших степеней» Вып.15 – М.: Наука, 1954.Ляпин С.Е. Методика преподавания математики. - М.: Просвещение, 2010.
18. Лященко Е.И. Методические рекомендации по формированию ведущих понятий курса математики. Ленинград, 1988.
19. Макарычев Ю.Н. Алгебра 7кл.-М.: Просвещение,2010.
20. Мишин В.И. Методика преподавания математики в средней школе.- М.: Просвещение, 2010.
21. Никольский С.М. Алгебра 7кл.- М.: Просвещение,2010.
22. Никольский С.М. Алгебра 8кл.- М.: Просвещение,2010.
23. Оганесян В.А. «Методика преподавания математики в средней школе». – М.: Просвещение, 2010.