Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет»
(национальный исследовательский университет)

Институт естественных и точных наук
Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра математического анализа и методики преподавания математики

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент,
д.ф.-м.н., профессор
______________/В.И. Ухоботов/
«______» ________________ 2019 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой,
д.ф.-м.н., доцент
_______________ / В.Л. Дильман /
«______» _______________ 2019 г.

О ХАРАКТЕРИСТИКЕ ПОДПРОСТРАНСТВА СОПРЯЖЕННОГО ПРОСТРАНСТВА

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
ЮУрГУ – 01.03.01-2019-129-06-112. ВКР

Руководитель работы
к.ф.-м.н., профессор
______________(Заляпин В.И.)
«______» __________ 2019 г.

Автор
студент группы ЕТ-415
______________ / Г.А. Шефер /
«______» ________________ 2019 г.

Нормоконтролер, ассистент
_______________ / А.Н. Пермина /
«______» ________________ 2019 г.

Челябинск
2019

Содержание

1. Введение **2**

1.1. Основные понятия 2

1.2. Операторы и функционалы 6

1.3. Сопряженное пространство. Слабая топология 7

1.4. Сопряженный оператор 9

1.5. Универсальность пространства $C_{[0;1]}$ 10

2. Постановка задачи **10**

2.1. Вложения и шкалы 11

2.2. Характеристика подпространства в сопряженном пространстве 12

3. Построение подпространства промежуточной характеристики в C^* **16**

3.1. Основные конструкции. Разбиение отрезка . . 16

3.2. Основные леммы 18

3.3. Вычисление характеристики подпространства . 24

4. Заключение **27**

5. Список литературы **30**

1. Введение

1.1. Основные понятия

Пусть E – некоторое множество, обладающее структурой линейного пространства. Пусть дополнительно на E задана хаусдорфова топология. Если операции сложения и умножения на скаляр непрерывны относительно этой топологии, то множество E называется линейным топологическим пространством.

Линейная топология в E полностью определяется базой окрестностей нуля.

Одним из основных способов задания топологии является метрика. Если в пространстве E задана метрика $\rho(x, y)$, инвариантная относительно сдвигов $\rho(x + h, y + h) = \rho(x, y)$ и такая, что

$$\forall |\lambda| \leq 1 \quad \rho(\lambda x, 0) \leq \rho(x, 0), \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \rho(\varepsilon x, 0) = 0,$$

то пространство E, снабженное такой метрикой, будет линейным топологическим пространством.

Не всякое линейное топологическое пространство является метрическим. Однако, если в нем можно ввести метрику, то оно называется метризуемым.

Пространства, удовлетворяющие первой аксиоме счетности — метризуемы. (теорема Биркгофа-Какутани)

Метризуемое линейное топологическое пространство называется пространством Фреше, если оно полно относительно любой метрики, порождающей топологию в E.

Частными случаями этой конструкции являются нормированные и гильбертовы пространства.

Важный вопрос о нормируемости линейных топологических пространств (т.е. вопрос о возможности введения в линейном топологическом пространстве нормы, согласованной естественным образом с топологией) решается теоремой Колмогорова А.Н.

Для того, чтобы линейное топологическое пространство было нормируемым, необходимо и достаточно существования выпуклой ограниченной окрестности нуля.

Любое линейное топологическое пространство можно стандартным образом пополнить. При этом пополнение метрического пространства – это пространство Фреше, пополнение нормированного пространства – пространство Банаха, пополнение предгильбертова пространства – гильбертово пространство.

Подмножество линейного топологического пространства является подпространством, если оно замкнуто топологически и замкнуто алгебраически (т.е., относительно линейных операций). Любое подпространство линейного топологического пространства является линейным топологическим пространством.

Пусть $L \subset E$ – подпространство. Фактор-пространство E/L в стандартной топологии является линейным топологическим пространством. Если пространство E метризуемо, то и фактор-пространство E/L метризуемо посредством естественной инвариантной метрики

$$\forall X, Y \in E/L: \ \hat{\rho}(X,Y) = \inf \rho(x,y), \ x \in X, \ y \in Y.$$

Фактор-пространство полно.

Для случая банаховых пространств предыдущая метризация приводит к нормировке фактор-пространства, задаваемой аналогом приведенного выше соотношения:

$$\forall X \in E \quad \|X\| = \inf_{x \in X} \|x\|.$$

Следует отметить, что конечномерные подпространства в линейном топологическом пространстве (не обязательно полном), всегда полны.

Важным качеством, характеризующим банахово пространство является сепарабельность.

Нормированное пространство E называется сепарабельным, если в нем есть счетное всюду плотное множество, т.е. в любой окрестности каждого элемента пространства E имеются элементы из указанного счетного множества.

1.2. Операторы и функционалы

Пусть даны два банаховых пространства B_1 и B_2. Оператор $A(x)$, определенный на B_1 и с областью значений, расположенной в B_2, называется линейным, если

1. Область его определения есть плотное в B_1 множество.

2. $A(\lambda x) = \lambda A(x)$.

3. $A(x + y) = A(x) + A(y)$.

Оператор $A(x)$ называется непрерывнвым, если для всякой сходящейся последовательности $\{x_n\}$ в B_1 сходится последовательность их образов $\{A(x_n)\}$ в B_2.

Оператор $A(x)$ называется ограниченным, если он отображает ограниченное множество в ограниченное. При этом существует такая константа $C > 0$, что $\forall x \in B_1$ $\|A(x)\|_{B_2} \leq C\|x\|_{B_1}$. Оператор $A(x)$ ограничен тогда и только тогда, когда он непрерывен.

Если областью значений оператора являются числа, то оператор называется функционалом. При этом функционал называется линейным, если дополнительно к сформулированным выше требованиям он обладает свойством ограниченности (или, что то же, непрерывности).

1.3. Сопряженное пространство. Слабая топология

Сопряженным к линейному нормированному пространству E называется пространство всех линейных непрерывных функцоналов, определенных на E. Обычно оно обозначается символом E^*.

Сопряженное пространство является нормированным с нормой

$$\|f(x)\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Сходимость последовательности элементов пространства E относительно нормы называется *сильной.*

Говорят, что последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ элементов пространства E *слабо сходится* к элементу $x_0 \in E$, если

$$\forall f \in E^* : \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Сильная сходимость влечет за собой слабую. Обратное, вообще говоря, неверно. Однако, в некоторых случаях оба эти вида сходимости эквивалентны. Например, в пространствах конечной размерности из слабой сходимости следует сильная. Аналогично и в бесконечномерном пространстве l^1.

Для того, чтобы последовательность слабо сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена и сходилась для плотного в сопряженном пространстве множества функционалов.

Для дальнейшего важно, что в пространстве $C_{[a;b]}$ слабая сходимость означает равномерную ограниченность последовательности функций и сходимость в каждой точке отрезка $[a;b]$.

Так как E^* линейное нормированное пространство, то можно построить $E^{**} = (E^*)^*$ и т.д. Пространство E^{**} называется вторым сопряженным к пространству E. Очевидно, что всякий элемент из E порождает линейный непрерывный функционал на E^*. Таким образом, всякому $x \in E$ ставится в соответствие функционал $F_x \in E^{**}$, причем это соответствие между E и множеством $\{F_x\} \subset E^{**}$ взаимно однозначно, изоморфно и изометрично, т.е. $E \subset E^{**}$. В случае, когда при таком соответствии оказывается $E = E^{**}$, пространство E называется *рефлексивным.*

1.4. Сопряженный оператор

Рассмотрим линейный ограниченный оператор $A(x)$, отображающий банахово пространство B_1 в банахово пространство B_2. Пусть $\varphi(y)$ - линейный непрерывный функционал, определенный на B_2. Тогда $\varphi(y)$ определен для $y = A(x)$, где x произвольный элемент B_1, и мы имеем

$$\varphi(y) = \varphi(A(x)) = f(x), \tag{1.1}$$

где $f(x)-$ функционал, определенный на B_1. Очевидно, что $f(x)$ линеен и непрерывен. Тем самым мы получили, что всякому функционалу $\varphi(y) \in B_2^*$ ставится в соответствие функционал $f(x) \in B_1^*$. Таким образом, построен оператор с областью определения в B_2^* и областью значений, лежащей в B_1^*. Этот оператор A^* называется сопряженным к оператору A. Равенсто $\varphi(y) = f(x)$ записывается в виде

$$f = A^*(\varphi) \tag{1.2}$$

1.5. Универсальность пространства $C_{[0;1]}$

Согласно теореме Банаха-Мазура, пространство $C[0,1]$ непрерывных на отрезке функций с чебышевской метрикой обладает фундаментальным свойством универсальности — оно содержит части, изометричные любому сепарабельному нормированному пространству.

Точнее, справедлива теорема:

Всякое сепарабельное банахово пространство E изоморфно и изометрично некоторому подпространству пространства $C_{[0;1]}$.

Эта теорема дает возможность исследователю изучать свойства сепарабельных нормированных пространств на их моделях — специальным образом подобранных подпространствах пространства $C_{[0;1]}$.

2. Постановка задачи

Одной из важных задач в функциональном анализе является задача классификации функциональных пространств. Существуют разные классификации, среди которых не последнее место занимает классификация подпространств в пространстве, сопряженном к нормированному.

2.1. Вложения и шкалы

Будем говорить, что банахово пространство E_1 вложено в банахово пространство E_0, если:

1. Из $x \in E_1$ следует, что $x \in E_0$.
2. Существует константа C_{01} такая, что

$$\|x\|_{E_0} \leq C_{01}\|x\|_{E_1} \tag{2.1}$$

Пространство E_1 плотно вложено в пространство E_0, если кроме 1. и 2. выполнено

3. E_1 плотно в E_0.

Семейство банаховых пространств $E_\alpha(\alpha_0 \leq \alpha \leq \beta_0)$ с нормами $\|x\|_\alpha(x \in E_\alpha)$ называется шкалой пространств, если:

1. Пространство E_β плотно вложено в пространство E_α, если $\beta > \alpha$, причем

$$\|x\|_\alpha \leq C(\alpha, \beta)\|x\|_\beta. \tag{2.2}$$

2. Существует функция $C(\alpha, \beta, \gamma)$, конечная во всех точках области $\alpha_0 \leq \alpha < \beta < \gamma \leq \beta_0$ такая, что

$$\|x\|_\beta \leq C(\alpha, \beta, \gamma) \|x\|_\alpha^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} \|x\|_\gamma^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}. \tag{2.3}$$

для любого $x \in E_\gamma$.

Пространства $L^p[0,1]$ образуют шкалу. Действительно, пространство $L^p[0,1]$ вложено в $L^q[0,1]$, если $p > q$, в силу неравенства Гельдера:

$$\|x(t)\|_{L^q[0,1]} = (\int\limits_0^1 |x(t)|^q \, dt)^{\frac{1}{q}} \leq (\int\limits_0^1 |x(t)|^{q\frac{p}{q}} \, dt)^{\frac{q}{pq}} = \|x(t)\|_{L^p[0,1]},$$

и $L^p[0,1]$ плотно в $L^q[0,1]$.

2.2. Характеристика подпространства в сопряженном пространстве

Пусть E — нормированное пространство, E^* — сопряженное к нему, и пусть $M \subset E^*$ — линейное многообразие. Все такие многообразия распадются на два класса:

1. Тотальные линейные многообразия: из условия $f(x) = 0$ для любого $f \in M$ следует, что $x = 0$.

2. Нетотальные линейные многообразия - те, которые не попали в первый класс.

Однако, такая классификация линейных многообразий (подпространств) E^* является слишком грубой. Действительно, два тотальных многообразия могут сильно отличаться друг от друга по набору функционалов, и, как следствие, по своим свойствам. Поэтому желательна более тонкая классификация многообразий $M \subset E^*$.

Характеристикой $r(M)$ тотального линейного мноогообразия $M \subset E^*$ называется число, обратное к $sup\|x\|_E$, где x пробегает замыкание единичного шара $S^1 \subset E$ по топологии $\sigma(E, M)$.

Данное определение эквивалентно следующему:

Характеристикой $r(M)$ тотального линейного мноогообразия $M \subset E^*$ называется максимальное число t такое, что замыкание множества $S^1(M) = S^1 \cap M$, где $S^1 \subset E^*$, в слабой топологии $\sigma(E^*, E)$ содержит шар $S^t \subset E^*$.

Важно отметить, что характеристика $r(M)$ любого линейного многообразия лежит между нулем и единицей.

Примеры. **1.** Пусть $E = C[0, 1]$. Согласно теореме Ф. Рисса, пространство $E^* = C^*[0, 1]$ изометрично и изоморфно пространству функций ограниченной вариации на отрезке $[0, 1]$.

Рассмотрим в пространстве функций ограниченной вариации, на отрезке $[0,1]$ множество M функций вида $x(t) = \lambda t, \lambda \in R$. Это множество является тотальным многообразием. Действительно, M замкнуто относительно линейных операций и общий корень системы уравнений $\{\lambda t = 0, \lambda \in R\}$ относительно t есть только $t_0 = 0$.

Характеристика такого многообразия равна 0. Действительно, воспользуемся определением характеристики многообразия. В $S^1(M)$ попадут лишь функции вида $x(t) = \lambda t, \lambda \in [-1,1]$. Далее, всякая последовательность функций из M в каждой точке (слабая сходимость) может сходится лишь к функции из M. Т.е., в слабом замыкании $S^1(M)$ могут содержаться только функции из M. Следовательно, в соответствии с определением характеристики, $r(M) = 0$.

2. Рассмотрим в пространстве функций ограниченной вариации, определенных на отрезке $[0,1]$ множество M, состоящее из всех функций пространства, за исключением функций вида $x(t) = \lambda t, \lambda \in R$. Это множество является тотальным многообразием. Действительно, M замкнуто относительно линейных операций и общий корень системы уравнений $x(t) = 0, x(t) \in M$ относительно t есть только $t_0 = 0$.

Характеристика такого многообразия равна 1. Действительно, В $S^1(M)$ попадут все функции из единичного шара, за исключением функций вида $x(t) = \lambda t, \lambda \in [-1, 1]$. В замыкание $S^1(M)$ по слабой топологии входит весь единичный шар. Рассмотрим последовательность функций из M вида $\{\frac{\lambda t}{e^{t/n}}\}_{n=1}^{\infty}, \lambda \in R$. Она сходится к функции $x(t) = \lambda t$ в каждой точке (слабая сходимость), т.е. каждая функция $x(t) = \lambda t$ является предельной для M в слабой топологии. С другой стороны, в каждой ε-окрестности единичного шара находится по крайней мере одна функция, не являющаяся для него предельной относительно слабой топологии, потому что в противном случае мы нашли бы такую ε-окрестность единичного шара, все функции которой были бы предельными по слабой топологии, но в таком случае , $r(M) = 1 + \varepsilon$, что противоречит свойству характеристики $0 \leq r(M) \leq 1$. Следовательно, в соответствии с определением характеристики, $r(M) = 1$.

Построенные линейные многообразия имеют соответственно характеристики 0 и 1. Гораздо сложнее построить подпространства промежуточной характеристики, что и является целью настоящей работы.

3. Построение подпространства промежуточной характеристики в C^*

3.1. Основные конструкции. Разбиение отрезка

На отрезке $[0;1]$ для произвольного значения целочисленного параметра $k = 1, 2, 3\dots$ зададим точки

$$t_{0k} = \frac{2^k-1}{2^k}, t_{1k} = \frac{2^{k+2}-3}{2^{k+2}}, t_{2k} = \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}, t'_k = \frac{t_{1k}+t_{2k}}{2}$$

и определим подотрезки отрезка $[0;1]$ соотношениями (рис.1)

$$I_k^- = [t_{0k}, t_{1k}),\ I_k^+ = [t_{1k}, t_{2k}],\ I_k = I_k^- \cup I_k^+,\ k = 1, 2, ...,$$

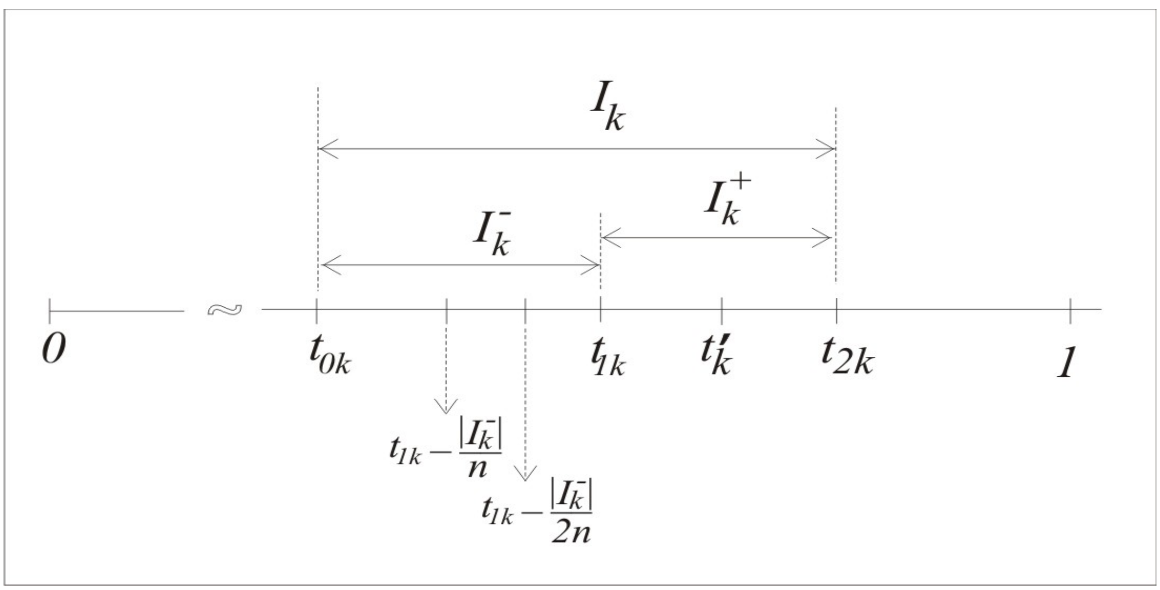

Рис. 1: Разбиение отрезка $[0;1]$.

Пусть $\{a_s\},\ s = 1, 2, 3, \dots$ некоторая последовательность положительных чисел.

Для фиксированного значения парметра k введем в рассмотрение функции:

- $\alpha_k(t)$ (рис.2) соотношениями:

  $\alpha_k(t) = 0$ при $t \in [0,1] \backslash I_k^+$, $\alpha_k(t'_k) = \frac{a_k - 1}{a_k + 1}$, $\alpha_k(t)$ непрерывна на $[0,1]$ и линейна на промежутках

$$[t_{1k}, t'_k], \ [t'_k, t_{2k}].$$

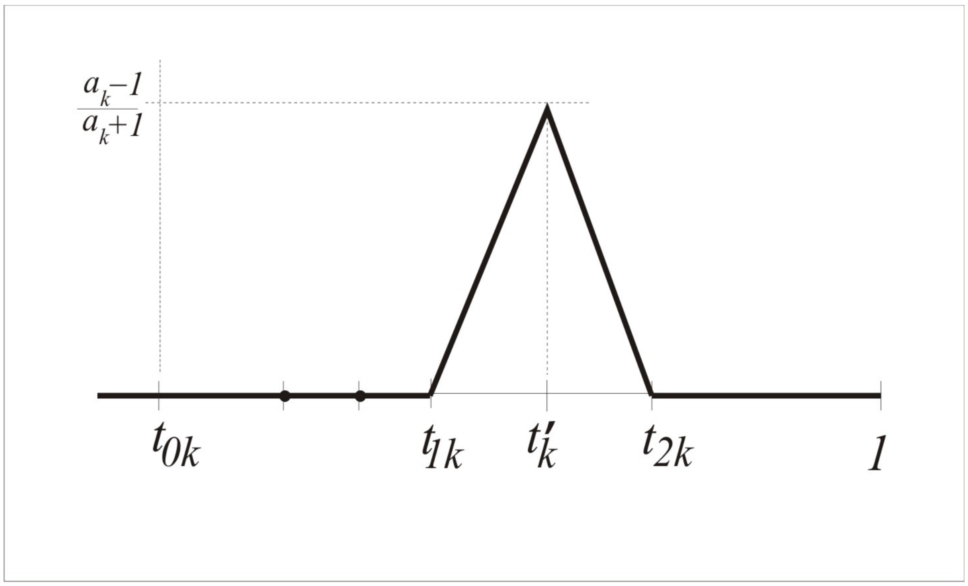

Рис. 2: Функци $\alpha_k(t)$.

- $\beta_k(t)$ соотношениями (рис.3):

  $\beta_k(t) = 0$ при $t \in [0,1] \backslash I_k^-$, линейна на I_k^-, непрерывна в t_{0k} и

$$\lim_{t \to t_{1k}-} \beta_k(t) = \frac{1}{(a_k + 1)^2}.$$

- $x_{kn}(t)$ соотношениями: $\forall n, k \in \mathbb{N}$ $x_{kn}(t) = 0$ при $t \in [0,1] \backslash I_k$,

$$x_{kn}(t) = a_k(a_k + 1)\beta_k(t) \text{ при } t \in [t_{0k}, t_{1k} - \tfrac{|I_k^-|}{n}],$$

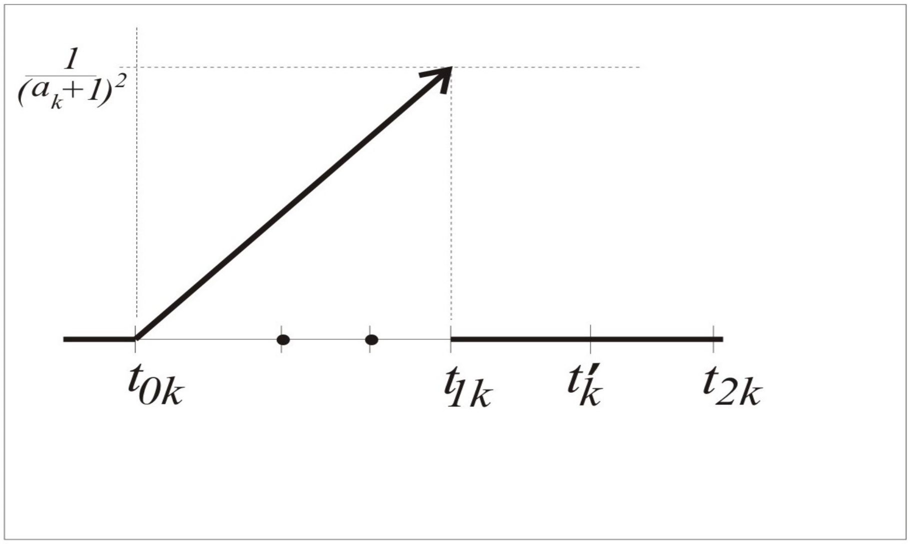

Рис. 3: Функци $\beta_k(t)$.

где $|I_k^-|$– длина промежутка I_k^-, $k, n = 1, 2, ...,$ $x_{kn}(t_{1k} - \frac{|I_k^-|}{2n}) = 0, x_{kn}(t) = 1$ при $t \in [t_{1k}, t'_k]$, $x_{kn}(t_{2k}) = 0$, непрерывна на $[0, 1]$ и линейна на промежутках

$$[t_{1k} - \frac{|I_k^-|}{n}, t_{1k} - \frac{|I_k^-|}{2n}],\ [t_{1k} - \frac{|I_k^-|}{2n}, t_{1k}],\ [t'_k, t_{k2}].$$

Замечание. Функции $\alpha_k(t)$ и $x_{kn}(t)$ непрерывны на $[0, 1]$, $|x_{kn}(t)| \leq 1$ на $[0, 1]$, $\beta_k(t)$ разрывна на $[0, 1]$ и $|\beta_k(t)| \leq 1$ на $[0, 1]$.

3.2. Основные леммы

Пусть $\delta_k(t) = \alpha_k(t) + \beta_k(t),\ k = 1, 2...$. Обозначим через $M \subset L^2_{[0,1]}$ замкнутое подпространство в $L^2_{[0,1]}$, натянутое на $\{\delta_k(t)_{\}}$. Пусть, далее, $L^2_{[0;1]/M}$ – фактор-пространство $L^2_{[0,1]}$ по M. Рассмотрим канонический оператор $p:\ L^2_{[0,1]} \to L^2_{[0,1]}/M$,

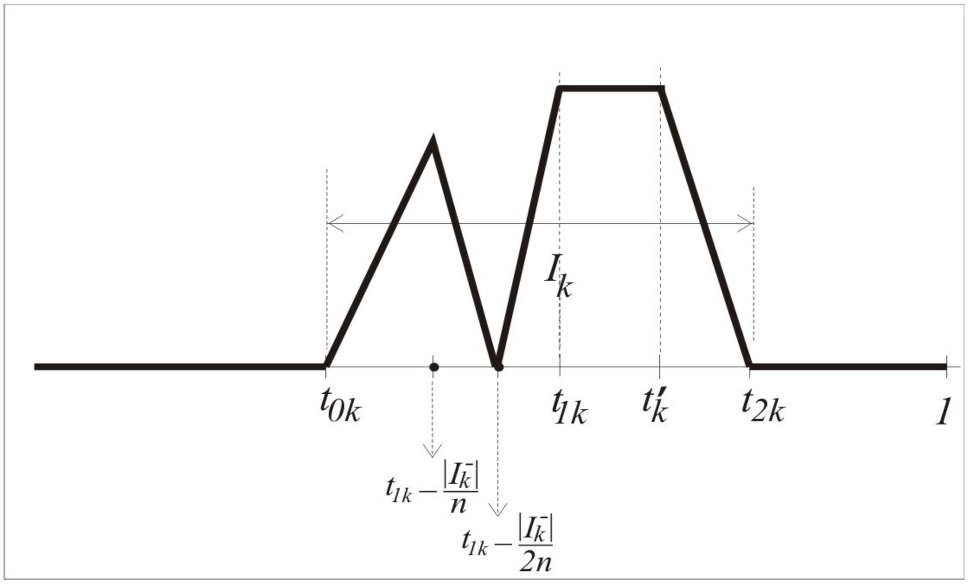

Рис. 4: Функци $x_{nk}(t)$.

который каждому элементу $X \in L^2_{[0,1]}$ ставит в соответствие класс эквивалентности в факторпространстве $L_2[0,1]/M$, которsq содержит X.

Наряду с оператором p рассмотрим оператор $i : C_{[0,1]} \to L^2_{[0,1]}$, ставящий в соответствие каждой непрерывной функции $x(t)$ из $C[0,1]$ соответствующий класс эквивалентных функций в $L^2_{[0,1]}$.

Заметим, что так как в M все функции, кроме тождественного нуля, разрывны, то pi – инъективынй оператор.

Пусть, наконец, $(pi)^*$ – оператор, сопряженный к pi. Рассмотрим образ сопряженного оператора. Это подпространство в $C^*_{[0;1]}$.

Имеют место следующие утверждения

Лемма 1. $(pi)^*(L_2[0,1]/M)^* \subset C^*[0,1]-$ *тотальное подпространство.*

Доказательство. Предположим, что $(pi)^*(L_2[0,1]/M)^*$ не тотальное, следовательно, найдется ненулевой элемент $x_0 \in C$, для которого $f(x_0) = 0$ для любого$f(x) \in (pi)^*(L_2[0,1]/M)^*$. По определению сопряженного оператора, $f(x_0) = g(pi(x_0)) = g(y_0) = 0$ для любого $g(y)$ из $(L_2[0,1]/M)^*$. Рассмотрим элемент $y_0 \in (L_2[0,1]/M)$, являющийся образом x_0 и, вследствие инъективности оператора, сам являющийся ненулевым элементом. Тогда согласно следствию из теоремы Банаха, для любого ненулевого элемента y_0 из нормированного пространства $(L_2[0,1]/M)$ существует функционал $g'(y)$ из $(L_2[0,1]/M)^*$, для которого $g'(y_0) \neq 0$, что противоречит нашему предположению о том, что $g(y_0) = 0$ для любого $g(y)$ из $(L_2[0,1]/M)^*$. И, следовательно, $(pi)^*(L_2[0,1]/M)^* \subset C^*[0,1]-$ тотальное подпространство. В теореме 1 мы вычислим характеристику этого подпространства.

Лемма 2. *Если* $A : X \to Y-$ *линейный непрерывный инъективынй оператор, то характеристика* $r(A^*(Y^*))$, *где* $A^*(Y* \subset X^*)$ *может быть найдена как обратная величина к точной* *верхней грани чисел* $\|x\|$, *где* x *пробегает замыкание единичного шара* S^1 *в* X *по норме* $\|x\|_1 = \|Ax\|$.

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n(t)\} \in S^1 \subset C[0,1]$ сходится к элементу $x_0(t) \in C[0,1$ по норме $\|x\|_1 = \|Ax\|$. Следовательно, в силу инъективности и непрерывности оператора, $\{x_n(t)\}$ сходится к $x_0(t)$ по норме $C[0,1]$. Но по определению сопряженного оператора, $f(x) = g(A(x))$, то есть, $|f(x(t) - x(t))| = |g(A(x(t) - x_n(t)))| \leq C_g\|A(x_0(t) - x_n(t))\|$, где $C_g - const$. Следовательно, последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится к $x_0(t)$ слабо в смысле сходимости по функционалам из $(A^*(Y^*)$. Обратно, пусть последовательность $\{x_n(t)\} \in S^1 \subset C[0,1]$ сходится к элементу $x_0(t) \in C[0,1]$ слабо в смысле сходимости по функционалам из $A^*(Y^*)$ и пусть $\{x_n(t)\}$ не сходится к $x_0(t)$ по норме $\|x\|_1 = \|Ax\|$. То есть,

$$\lim_{n\to\infty} \|Ax_0(t) - Ax_n(t)\|_Y \neq 0$$

то есть, предел разности $Ax_0(t) - Ax_n(t)$ есть ненулевой элемент y'. Тогда y' должен быть общим элементом ядра для всех функционалов из $A^*(Y^*)$. Но тогда $A^*(Y^*)$ не будет тотальным, что противоречит Лемме 1. Следовательно, $\{x_n(t)\}$ сходится к $x_0(t)$ по норме $\|x\|_1 = \|Ax\|$

Из леммы 2 следует, что для нахождения характеристики $r((pi)^*(L_2[0,1]/M)^*)$ достаточно вычислить верхнюю грань $\|x\|_C$, где x пробегает замыкание единичного шара в $C[0,1]$ по норме $\|x\|_1 = \|pix\|$, где в правой части равенства стоит норма в $L_2[0,1]/M$.

Лемма 3. *Если непрерывная функция $x(t)$ принадлежит замыканию единичного шара S^1 в $C[0,1]$ по норме $\|\cdot\|_1$, то для любой точки разрыва t_1 функций из M (такие множества пробегают счетное множество середин отрезков I_k) выполняется соотношение $|x(t_1)| \leq 1$.*

Доказательство. Проведем доказательство для случая $x(t_1) \geq 0$ (если $x(t_1) < 0$, то рассуждения аналогичны). Докажем, что $x(t_1) \leq 1$. Пусть, напротив $x(t_1) > 0$. Тогда в силу непрерывности $x(t)$ существуют числа $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ такие, что при $|t - t_1| < \delta$ выполняется неравенство

$$x(t) > 1 + \alpha. \qquad (3.1)$$

По условию существует последовательность непрерывных функций $(x_n(t))$, $|x_n(t)| \leq 1$, такая, что $\|x_n - x\|_1 \to$ при $n \to \infty$. Это означает, что существует последовательность $\omega_n(t) \in M$

такая, что $\|x_n - x - \omega_n(t)\| \to 0$ по норме L_2. Так как t_1 является серединой отрезка I_k, то сужение функций $\omega_n(t)$ на I_k^+ имеет вид

$$\omega_n(t)|_{I_k^+} = C_n \alpha_k(t) \tag{3.2}$$

Изучим поведение последовательности (C_n). Во-первых, (C_n) не может быть ограниченной последовательностью. В противном случае из (1) следует, что при $|t - t_1| < \delta$ и $t \in I_k^+$

$$x(t) - x_n(t) > \alpha \tag{3.3}$$

Из 2 и 3 вытекает существование малого δ_1 такого, что при $t \in (t_1; t_1 + \delta_1)$ разность $|x(t) - x_n(t) - \omega_n(t)|$ превышает некоторую фиксированную константу, что противоречит сходимости $\|x_n - x - \omega_n(t)\| \to 0$. Во-вторых, последовательность (C_n) не может быть неограниченной. В самом деле, функция $x(t)$ непрерывна, значит, ограничена на $[0, 1]$. При условии неограниченности (C_n) из 2 следует, что разность $|x(t) - x_n(t) - \omega_n(t)|$ на множестве положительной меры из I_k^+ превышает некоторую константу для бесконечного числа номеров n. А это противоречит сходимости $\|x(t) - x_n(t) - \omega_n(t)\| \to 0$. Итак, последовательность (C_n) не может быть ни ограниченной, ни неограниченной. Полученное противоречие доказывает лемму.

3.3. Вычисление характеристики подпространства

Теорема 1. *Характерситика подпространства* $(pi)^*(L_2[0,1]/M)^* \subset C^*[0,1]$ *находится следующим образом:*

$$r((pi)^*(L_2[0,1]/M)^*) = \begin{cases} 1, & \text{при } a \in (0,1], \\ \frac{1}{a}, & \text{при } a \in [1,\infty], \qquad a = sup\ a_n \\ 0, & \text{при } a = \infty. \end{cases}$$

Доказательство. Докажем равносильное утверждение:

$$sup\{\|x\|_C : x \in \overline{S^1}\} = \begin{cases} 1, & \text{при } a \in (0,1], \\ a, & \text{при } a \in [1,\infty], \\ \infty, & \text{при } a = \infty. \end{cases} \qquad (3.4)$$

Здесь $\overline{S^1}$ - замыкание единичного шара в $C[0,1]$ по норме $\|x\|_1 = \|pix\|_{L_2/M}$. Рассмотрим последовательность непрерывных функций $x_k'(t)$, определенных следующим образом: $x_k'(t) =$

0 при $t \in [0,1]\backslash I_k, x'_k(t_1k) = 1, x'_k(t'_k) = a_k$ и $x'_k(t)$ линейна на $[t_0k, t_1k]$, $[t_1k, t'_k]$ и $[t'_k, t_2k]$.

При $a \in [1, \infty]$ очевидно, что $sup\{x'_k : t \in [0,1]\} = a_k$, т.е. $\|x\|_C = a_k$. Покажем, что $x'_k(t) \in \overline{S^1}$ для любого $k = 1, 2....$ Для этого проверим, что $x_{kn} \to x'_k$ при $n \to \infty$ для любого k по норме $\|\cdot\|_1$. По построению мера

$$\mu\{t : x'_k(t) - x_{kn}(t) \neq \lambda_k \delta_k(t)\} = \frac{|I_k^-|}{n}; \ \lambda_k = a_k + 1. \qquad (3.5)$$

Принимая во внимание ограниченность при фиксированном k функций $x'_k(t), x_{kn}$ и $\delta_k(t)$, из (5) выводим сходимость $\|x'_k(t) - x_{kn}(t) - \delta_k(t)\| \to 0$ при $n \to \infty$ в $L_2[0,1]$. Так как $\delta_k(t) \in M$ при всех k, имеем сходимость $x_{kn}(t) \to x'_k(t)$ при $n \to \infty$ по норме $\|\cdot\|_1$, т.е. $x'_k(t) \in \overline{S^1}$. Таким образом, мы показали, что

$$sup\{\|x\|_C : x \in \overline{S^1}\} \geq a. \qquad (3.6)$$

Отсюда сразу следует последнее равенство из (4). Теперь покажем, что выполнено второе из равенств (4). Итак, пусть $a \geq 1$. Вследствие (6) достаточно показать, что

$$sup\{\|x\|_C : x \in \overline{S^1}\} \leq a. \qquad (3.7)$$

Пусть, напротив, $sup\{\|x\|_C : x \in \overline{S^1}\} > a$. Это означает, что найдется непрерывная функция $x(t) \in \overline{S^1}$ и $\|x\|_C > a$. Пусть $t^* \in [0,1]$ таково, что $x(t^*) > a$ (если $x(t^*) < 0$, то рассуждения аналогичны). Тогда найдутся $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$x(t) > a + \alpha \tag{3.8}$$

при $|t - t^*| < \delta$. Существуют последовательности $\omega_n(t) \in M$ и $x_n(t) \in S^1$ в $C[0,1]$ такие, что

$$\|x(t) - x_n(t) - \omega_n(t)\| \to 0 \tag{3.9}$$

в пространстве $L_2[0,1]$. Из (9) следует, что найдется такой номер k_0, для которого коэффициент C_n из (2), начиная с некоторого номера $n = N$, удовлетворяет неравенству

$$C_n > a + 1 + \alpha_1 > 2 + \alpha_1, \tag{3.10}$$

где $\alpha_1 > 0$. Обозначим через t_0' середину отрезка I_{k0}. В силу леммы 3 $x(t_0') \leq 1$, значит, в некоторой окрестности t_0' выполняется неравенство

$$x(t) < 1 + \frac{\alpha_1}{2}. \tag{3.11}$$

Из (10), (11) следует, что в некоторой левой полуокрестности точки t_0' разность $x(t) - x_n(t) - \omega_n(t)$ превышает некоторую фиксированную константу, что противоречит соотношению (9). Итак, доказано соотношение (7), что вместе с (6) влечет выполнимость второго из равенств (4).

Осталось доказать первое из равенств (4). Пусть $a \in (0, 1]$. Покажем, что

$$sup\{\|x\|_C : x \in \overline{S^1}\} \geq 1. \tag{3.12}$$

Неравенство (12) доказывается точно так же, как и (6)

Покажем, что верно и обратное неравенство

$$sup\{\|x\|_C : x \in \overline{S^1}\} \leq 1. \tag{3.13}$$

Неравенство (13) доказывается точно так же, как и (7) при $a = 1$. Тот факт, что в нашем случае $a \leq 1$ не влияет на доказательство. Таким образом, соотношения (12) и (13) доказывают первое из равенств (4). Теорема доказана.

4. Заключение

Понятие регуляризуемости отображений, обратных к линейным операторам, возникло при приближенном решении уравнений. Если такое отображение регуляризуено, то уравнение может быть приближенно решено методом регуляризации А.Н. Тихонова.

Пусть X и Y — метрические пространства и f— отображение из X в Y. Говорят, что задача нахождения решения уравнения

$$f(x) = y, x \in X, y \in Y \tag{4.1}$$

корректна, если:

1. для всякого $y \in Y$ существует решение этого уравнения;

2. решение единственно;

3. задача устойчива, т. е. отображение f^{-1} непрерывно.

В противном случае задача сичтается некорректной.

Однопараметрическое семейство отображений R_δ, действующих из пространства Y в X, называется регуляризатором для некорректной задачи (4.1), если R_δ опеределены для всех $\delta \in (0, \delta_0)$, где δ_0 — некоторое положительное число, и обладают следующим свойством: для всякого $x \in X$

$$sup\{\rho_X(x, R_\delta y) : y \in Y, \rho_Y(y, f(x)) \leq \delta\} \to 0 \text{ при } \delta \to 0$$

Некорректная задача (4.1) регуляризумеа по Тихонову (отображение f^{-1} регуляризуемо по Тихонову), если для уравнения (4.1) существует регуляризатор.

Если же отображение нерегуляризуено, то метод Тихонова для приближенного решения уравнения с таким оператором не применим. Большой интерес представляет исследование вопроса о регуляризуености отображений, обратных к интегральным операторам, так как оно связано с возможностью решения интегральных уравнений. Так как регуляризуемость отображения A^{-1}, где $A : X \to Y$, эквивалентно необращению в 0 характеристики подпространства $A^{*}Y^{*} \subset X^{*}$, приведенная конструкция позволяет строить примеры регуляризуемых и нерегуляризуемых операторов, в частности, интегральных операторов из $C[0,1]$ в $L_2[0,1]$.

5. Список литературы

1. Теория характристик подпространств и ее приложения. Петунин Ю. И., Пличко А. Н. Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1980, 216 с.

2. С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Шкалы банаховых пространств, УМН, 1966, том 21, выпуск 2(128), 89–168.

   Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, М., 1965 г., 520 с.

3. Интерполяция линейных операторов. Крейн С.Г, Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1978, 400 стр.

4. Л. Д. Менихес, Об одном достаточном условии регуляризуемости линейных обратных задач, Матем. заметки, 2007, том 82, выпуск 2, 242–246

5. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, Главная редакция физмат литературы изд-ва «Наука», М., 1976 г.

6. М. И. Кадец, Б. С. Митягин, Дополняемые подпространства в банаховых пространствах, УМН, 1973, том 28, выпуск 6(174), 77–94

7. С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Шкалы банаховых пространств, УМН, 1966, том 21, выпуск 2(128), 89–168

8. С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Критерий родственности двух банаховых пространств, Докл. АН СССР, 1961, том 139, номер 6, 1295–1298