Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет»
(Национальный исследовательский университет)
Институт естественных и точных наук
Кафедра математического и компьютерного моделирования

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент, доцент каф. СП,
канд. физ.-мат. наук
___________________/В.А. Голодов
«____»______________2019 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой МиКМ,
д-р физ.-мат. наук, доцент
______________/С.А. Загребина
«____»______________2019 г.

УЧЁТ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В ПРОБЛЕМЕ СОСТАВЛЕНИЯ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
ЮУрГУ – 01.03.02.2019.034.006 ВКР

Руководитель работы,
профессор каф. МиКМ
д-р физ.-мат. наук
____________________/А.В. Панюков
«____»______________2019 г.

Автор работы
Студент группы ЕТ-416
__________________/А.М. Первухин
«____»______________2019 г.

Нормоконтролер,
доцент каф. МиКМ,
канд. физ.-мат. наук,
______________/Т.А. Макаровских
«____»______________2019 г.

Челябинск 2019

Выпускная квалификационная работа выполнена мной совершенно самостоятельно. Все использованные в работе материалы и концепции из опубликованной научной литературы и других источников имеют ссылки на них.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»
Институт естественных и точных наук
Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра математического и компьютерного моделирования
Направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой,
д-р физ.-мат. наук, доцент
________________/С.А. Загребина
________________________ 2019 г.

З А Д А Н И Е

на выпускную квалификационную работу студента

Первухина Александра Максимовича

Группа ЕТ-416

1. Тема работы «Учёт неопределенности в проблеме составления межотраслевого баланса» утверждена приказом по университету от «____»__________ 2019 г. №_____________

2. Срок сдачи студентом законченной работы «___» _________ 2019 г.

3. Исходные данные к работе

3.1 Тестовые наборы данных, полученные с помощью генератора случайных чисел

3.2 Леонтьев, В.В. Межотраслевая экономика / В.В. Леонтьев; науч. ред. и авт. предисл. А. Г. Гранберг. – М.: Экономика , 1997.

4. Перечень вопросов, подлежащих разработке

4.1 Обзор задач межотраслевого баланса и применяемых методов для их решения.

4.2 Описание модели решения задачи межотраслевого баланса с учетом проблемы интервальной неопределенности.

4.3 Генерация начальных данных для проверки описанной модели.

4.4 Проверка результатов решения модельной задачи.

4.5 Анализ эффективности применения интервальной неопределенности в задачах межотраслевого баланса.

5. Графический материал

5.1 Оглавление презентации

5.2 Цели, задачи, актуальность (2 сл.)

5.3 Обзор методов (5 сл.)

5.4 Описание модели (1 сл.)

5.5 Генерация данных (4 сл.)

5.6 Выводы (2 сл.)

5.7 Заключение (1 сл.)

6. Календарный план

Наименование этапов выпускной квалификационной работы	Срок выполнения этапов работы	Отметка о выполнении руководителя
1. Изучение теоретического материала	12.02.2019-17.03.2019	
2. Разработка модели	18.03.2019-09.04.2019	
3. Генерация данных	10.04.2019-10.05.2019	
4. Анализ результатов	11.05.2019-24.06.2019	
5. Нормоконтроль	25.06.2019	
6. Защита выпускной квалификационной работы	02.07.2019	

7. Дата выдачи задания «__» _________ 2019 г.

Руководитель работы ______________________________/ А.В. Панюков

(подпись)

Студент ______________________________/ А.М. Первухин

(подпись)

АННОТАЦИЯ

Первухин, А.М. Учёт неопределенности в проблеме составления межотраслевого баланса/ А.М. Первухин. – Челябинск: ЮУрГУ, ЕТ-416, 49 с., 1 ил., 17 табл., библиогр. список – 15 наим., 1 прил.

Выпускная квалификационная работа выполнена с целью анализа возможности учёта неопределенности для проблемы межотраслевого баланса.

Сделан теоретический обзор методов построения задач межотраслевого баланса, проведен анализ применения интервальной неопределенности в системах линейных уравнений.

На основе данных составлена модель задачи межотраслевого баланса с учётом интервальной неопределенности.

Сгенерированы данные для проверки результатов решения модельной задачи. Проанализированы различные ситуации составления баланса.

В результате сделан вывод о целесообразности учёта интервальной неопределенности в задачах межотраслевого баланса.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Задача межотраслевого баланса является основной в определении объемов производства, распределении ресурсов между отраслями для достижения максимальной прибыльности и удовлетворения всех потребителей. Многие методы решения являются устаревшими и требуют более современного технического подхода. Одним из таких методов может являться учёт интервальной неопределенности в задаче межотраслевого баланса, который сможет отразить непостоянство производства и потребления, а также учесть возможные ошибки при получении статистических данных.

Основной задачей экономики является единый многосторонний процесс эволюции производств, технологий, инвестиций, доходов и потребления. В экономических отношениях происходит усложнение социально-экономической среды и ускорение процессов, что приводит к увеличению чувствительности экономической системы в целом по отношению к изменению отдельных её элементов и внешним воздействиям. В результате повышается неустойчивость, вследствие чего возникает дисбаланс в разных областях рыночного хозяйства.

Чтобы учесть нестабильность, в задачу межотраслевого баланса вводится интервальная неопределенность, что позволяет быть уверенным в стабильности и универсальности полученной модели. При этом важную роль играют инструменты исследования, методы и программные реализации, создающие различные сложности при решении системы линейных уравнений с интервальной неопределенностью.

Работа над проблемой межотраслевого баланса является актуальной, так как существует множество прикладных отраслей экономики, связанных с глубоким анализом рынка и прогнозированием. Многие аспекты проблемы раскрываются в работе В. Леонтьева [1] и его последователей: Л.В. Канторовича, Х. Никайдо [2,3], но при современной программной реализации решение представляется более простой задачей, чем в 1970-х годах.

В выпускной квалификационной работе будет рассмотрена возможность практического применения интервальной системы линейных алгебраических уравнений (далее ИСЛАУ) для проблемы межотраслевого баланса и дальнейший анализ полученных результатов.

В работе было рассмотрено несколько методов и подходов к решению проблемы межотраслевого баланса, а также возможные пути внедрения интервальной неопределенности. Для проверки модели генерируются тестовые данные с использованием генератора случайных чисел, данные представляются в виде матрицы с положительными элементами.

Целью выпускной квалификационной работы является определение возможности учёта интервальной неопределенности в задачах межотраслевого баланса.

Достижение поставленной цели потребовало решения следующих **задач:**

1. Изучение и обоснование применения наиболее подходящей модели межотраслевого баланса;
2. Сравнение нескольких методов внедрения интервальной неопределенности в задачу межотраслевого баланса;
3. Разработка модели задачи межотраслевого баланса с выбранным методом внедрения интервальной неопределенности;
4. Генерация тестовых данных для проверки разработанной модели;
5. Решение тестовых задач и анализ полученных результатов.

Объектом исследования может служить задача межотраслевого баланса, представленная моделью Леонтьева.

Предметом исследования является подход к решению задачи межотраслевого баланса с интервальной неопределенностью.

Информационная база включает в себя учебное пособие А.В. Панюкова [4], научные статьи по теме под авторством А.В. Панюкова, А.Т. Латиповой, В.А. Голодова, А.В. Келлер [5, 6, 7, 8].

Итоговые научные результаты исследования получены с использованием методов математического моделирования экономических процессов, сравнительного и функционального анализов, методов внедрения интервальной неопределенности.

Работа состоит из трех глав, введения, заключения, библиографического списка (15 наименований), одного приложения.

Во введении обосновывается актуальность работы, приводятся цели и задачи работы, указываются объект и предмет исследования, приводится информационная база исследований.

В главе 1 описываются модели задачи межотраслевого баланса Леонтьева и Неймана; приводится обзор существующих методов, анализ применения рассматриваемых моделей в работе и делается вывод об использовании конкретной балансовой модели.

В главе 2 представлены ситуации возникновения интервальной неопределенности, разобран способ решения ИСЛАУ, введен необходимый понятийный аппарат. Представлен обзор неопределенности в задаче межотраслевого баланса, предложена модель для учёта неопределенности.

В главе 3 создаются тестовые данные различных балансовых таблиц. Данные преобразуются к виду матрицы Леонтьева, которая решается с помощью представленной модели, данные первично обрабатываются, выдвигается гипотеза, проводится конечный анализ полученных результатов.

В заключении приводятся основные результаты работы, формулируются выводы и рекомендации, описываются направления дальнейших исследований.

1 ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ К СХЕМЕ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

1.1 Формулировка задачи межотраслевого баланса

Межотраслевой баланс является основой многих моделей производства. Основным в анализе являются статистические таблицы, дающие картину народнохозяйственной динамики за определенный период (как правило, 1 год), содержание которой составляют связи между *чистыми отраслями* [4].

Чистой отраслью называют совокупность предприятий, производящих однородную по составу продукцию. Чистая отрасль – экономическая абстракция, не обязательно существующая реально в виде каких-либо организационных форм.

Предположим, что весь производственный сектор разбит на n чистых отраслей. Каждая отрасль выпускает продукцию только одного типа, разные отрасли выпускают разные продукты. Таким образом, в рассматриваемой производственно-экономической системе выпускается n видов продуктов. В процессе производства своего вида продукции отрасль нуждается в продукции других отраслей.

В примерах составления межотраслевого баланса для отдельно взятого предприятия задача сводится к тому, что каждый отдел или подразделение выполняют свою функцию, которая не выполняется другим отделом. Результат работы каждого отдела является ключевым в работе других отделов или способствует достижению поставленной цели в работе предприятия, то есть их выпуск необходим только для покрытия организационных потребностей и не требует покрытия внешнего спроса. Пример подобного предприятия рассмотрен в работе А.В. Келлер [8]. В отдельно взятых задачах могут существовать ситуации покрытия нужд других предприятий или групп, в которые входит предприятие. В общем виде любое производство может быть сведено к задаче межотраслевого баланса со своими отдельно взятыми абстракциями, условиями и добавлениями, требуемыми для конкретной задачи. В данном случае рассматривается упрощенный вид, который может быть представлен в табличной форме по данным за фиксированный период времени в виде таблицы 1.

Таблица 1 – Балансовый отчет за определенный период в табличном виде

Структура затрат	Структура спроса							Объем выпуска
	Спрос отраслей						Непроизводств. сфера	
	1	2	$\cdots$	j	$\cdots$	n		
1	$\bar{a}_{11}$	$\bar{a}_{12}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1j}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1n}$	$\bar{c}_1$	$\bar{v}_1$
2	$\bar{a}_{21}$	$\bar{a}_{22}$	$\cdots$	$\bar{a}_{2j}$	$\cdots$	$\bar{a}_{2n}$	$\bar{c}_2$	$\bar{v}_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\bar{a}_{n1}$	$\bar{a}_{n2}$	$\cdots$	$\bar{a}_{nj}$	$\cdots$	$\bar{a}_{nn}$	$\bar{c}_n$	$\bar{v}_n$
Добавлен. стоимость	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\cdots$	$\bar{\omega}_j$	$\cdots$	$\bar{\omega}_n$		

В данной таблице величина $\bar{a}_{ij}$ показывает объем продукции отрасли i, израсходованный отраслью j за отчетный период. Величина $\bar{v}_i$ равна общему объему продукции i-й отрасли за тот же период, а значение $\bar{c}_i$ показывает объем продукции, который был потреблен в непроизводственной сфере. Наконец, $\bar{\omega}_j-$ добавленная стоимость, включающая заработную плату, предпринимательскую прибыль, амортизационные отчисления, косвенные налоги [4].

Общепринятая схема межотраслевого баланса отличается от таблицы 1. Основное отличие состоит в подробном раскрытии составляющих вектора $\bar{c}$, таких как валовые накопления, личное потребление, непроизводственный сектор и т.д. Информация, содержащаяся в подробной таблице межотраслевого баланса, раскрывает не только межотраслевые связи, но и структуру распределения национального продукта.

Единицы измерения всех указанных величин могут быть как натуральными, так и стоимостными, в зависимости от чего различаются *натуральный*, *стоимостной* и *смешанный* межотраслевой баланс. Для определенности в дальнейшем будем иметь в виду стоимостной баланс. Балансовый характер данной таблицы заключается в том, что должны выполняться следующие соотношения:

1. Объем продукции каждой отрасли равен суммарной потребности производственной и непроизводственной сфер, т.е.

$$\bar{c}_i + \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} = \bar{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{1.1}$$

2. Объем выпуска численно равен сумме расходов отрасли, состоящих из издержек на приобретение продукции других отраслей и величины добавленной стоимости, т. е.

$$\bar{\omega}_j + \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ij} = \bar{v}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{1.2}$$

Коэффициентом прямых затрат называется объем ресурса i, необходимый для производства единицы продукции j, т. е.

$$a_{ij} = \frac{\bar{a}_{ij}}{\bar{v}_j}, \quad j = 1,2, \dots, n. \tag{1.3}$$

Матрица $A = (a_{ij})$ коэффициентов прямых затрат, часто называемая *матрицей Леонтьева,* несет в себе информацию о сложившейся структуре межотраслевых связей и используемых технологиях производства. Сравнивая такие матрицы в разнесенные моменты времени, можно проследить направление развития технологии. Однако еще более интересные возможности открываются с идеей использования матрицы A для долгосрочного планирования и прогнозирования производства.

Примем два важных предположения:

1. Считаем сложившуюся технологию неизменной в течение исследуемого промежутка $[T_0, T]$;

2. Для осуществления объема x_j валового продукта отрасли j необходимо и достаточно произвести затраты продукции всех отраслей в объеме $x_j a_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, n$, т.е. постулируется свойство линейности существования технологий.

Принятые предположения являются очередной идеализацией реального положения вещей. Так, требование линейности допускает возможность каждой отрасли произвести любой объем своей продукции при условии, что ей будет обеспечено сырьё в необходимом количестве. В случае реального производства возможности являются величиной ограниченной.

Пусть матрица A описывает технологию при *единичной интенсивности* работы всех отраслей. Если в исследуемый промежуток времени отрасли работают таким образом, что отрасль $j = 1, 2, \dots, n$ производит объем x_j, то отрасль j работает с интенсивностью x_j. Обозначим вектор интенсивностей через $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Используя предположение о линейности, равенство (1.1) можно представить в следующем виде

$$\bar{c}_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = x_i, \quad i = 1,2, \dots, n. \tag{1.4}$$

Форму (1.4) можно представить в матричном виде $\bar{c} = x - Ax$.

Основная задача, возникающая при планировании производства, состоит в определении по заданному вектору непроизводственного потребления c вектора валового выпуска x. Требуется решить систему

$$x - Ax = c, \quad x \geq 0. \tag{1.5}$$

В изложенной интерпретации формула (1.5) является *моделью Леонтьева*, где вектор c и матрица A заданы точными значениями.

1.2 Балансовая модель Леонтьева

Модель Леонтьева наглядно отражает процессы в пределах любых отраслей экономики. Решение системы (1.5) представляется в качестве новой задачи со своими теоремами и утверждениями.

Уравнение (1.5) вместе с изложенной интерпретацией матрицы A и векторов c и x называется *моделью Леонтьева*. В том случае, когда решение системы (1.5) существует для любого неотрицательного вектора спроса c, модель Леонтьева и матрица A называются *продуктивными*.

С математической точки зрения вопрос о существовании решения системы (1.5) полностью определяется существованием матрицы $(E - A)^{-1}$, где E - единичная матрица размерности $n \times n$. Однако, только существование не гарантирует неотрицательность вектора $(E - A)^{-1}c$ для любого неотрицательного вектора c. Доказательство представлено в работе [1]; из него следует, что модель Леонтьева продуктивна тогда и только тогда, когда существует обратная матрица и все её элементы неотрицательны (если матрица $E - A$ неотрицательно обратима).

Число λ называется *собственным числом* матрицы A, где A − квадратная матрица $n \times n$, если существует ненулевой вектор x, такой что

$$\mathrm{Ax} = \lambda_{\mathrm{A}}\mathrm{x}. \tag{1.6}$$

Всякий вектор $x \neq 0$, удовлетворяющий (1.6), называется *собственным вектором* матрицы A, относящимся к собственному значению λ. Из приведенных определений следует, что

1. Собственными числами матрицы A являются корни характеристического многочлена матрицы $\det(\lambda E - A) = 0$.

2. Различным собственным числам соответствуют линейно независимые собственные вектора.

Матрица A является неотрицательной, поскольку все её элементы неотрицательны.

Для неотрицательных матриц имеют место следующие фундаментальные результаты:

Теорема 1.1 (Фробениус-Перрон). *Если A – неотрицательная матрица, то существует единственное число λ_A матрицы A с наибольшей абсолютной величиной. Это характеристическое число положительное и простое, а соответствующий ему собственный вектор может быть выбран положительным.*

Собственное число λ_A и относящиеся к нему собственные вектора x_A и p_A матриц A и A^T соответственно будем далее называть Фробениусовыми.

Теорема 1.2 (Существование и единственности). *Если A – неотрицательная матрица, λ_A – Фробениусово собственное число матрицы A, c – произвольный неотрицательный вектор. Тогда предел*

$$\upsilon = \lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{A^n c}}{\lambda_{\mathrm{A}}^{\mathrm{n}}}$$

существует и совпадает с Фробениусовым собственным вектором x_A матрицы A. Этот предел единственен с точностью до скалярного множителя, зависящего от выбора начального состояния c.

Решение системы уравнений (1.5) записывается с помощью линейных преобразований и приводится к следующему виду:

$$\mathrm{x} = (\mathrm{E} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{c}, \qquad \mathrm{i} = 1,2, \ldots, \mathrm{n}. \tag{1.7}$$

Существует другой вид формулы (1.7) без обращения матрицы в обратную:

$$\mathrm{x} = (\mathrm{E} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{c} = \mathrm{c} + \mathrm{Ac} + \mathrm{A}^2\mathrm{c} + \cdots + \mathrm{A}^\mathrm{n}\mathrm{c} + \cdots = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \mathrm{A}^\mathrm{n}\, \mathrm{c}, \tag{1.8}$$

которую можно интерпретировать следующим образом: для получения конечного вектора спроса необходимо произвести такие объемы продукции, чтобы они являлись компонентами данного вектора. При производстве возникают косвенные затраты, описываемые вектором Ac, при производстве которого возникают затраты равные $A \cdot A\mathrm{c} = A^2c$ и т. д. Полные затраты на удовлетворение спроса можно представить формулой (1.8). Преимуществом метода представления (1.7) является конечное число вычислений, при этом выявляется несколько недостатков:

1. Необходимость приведения баланса к стоимостной форме;
2. Стоимостная матрица может оказаться чувствительной к ошибке округления.

При вычислении рекуррентной формулы (1.8) достоинствами являются:

1. Удобство при изучении эффекта мультипликации;
2. Вычисление обратной матрицы не требуется;
3. Возможность использовать формулу, как для стоимостного баланса, так и для натурального баланса.

К недостаткам данного способа можно отнести:

1. Явное правило остановки вычислений отсутствует;
2. Неопределенный объем вычислительных ресурсов;

Так как в работе используется стоимостной баланс, а коэффициенты матрицы A будут представлены в виде интервалов, будем использовать решение по формуле (1.7) с нахождением обратной матрицы.

1.3 Балансовая модель Неймана

Одной из особенностей модели Леонтьева является оперирование чистыми отраслями, что не позволяет учитывать эффект совместного производства в одной цепи технологического процесса. В связи с этим была разработана обобщающая модель задачи межотраслевого баланса, названая моделью Неймана.

Модель Неймана задается конечным набором производственных процессов вида (a^j, b^j), $j = 1,2, \dots, m$, где вектор $a^j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$ описывает затраты, а вектор $b^j = (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj})$ – выпуск товаров при функционировании данного процесса с единичной интенсивностью. Данные производственные процессы называются базисными. Из условия неотрицательности затрат и выпуска следует неотрицательность обоих векторов. Обозначим задание технологического процесса как (A, B), где элемент матрицы затрат $A = (a_{ij})$, а элемент матрицы выпуска $B = (b_{ij})$. По аналогии с моделью Леонтьева систему (1.5) представим следующим образом в виде системы неравенств

$$\mathrm{Bx} - \mathrm{Ax} \geq \mathrm{c}, \qquad \mathrm{x} \geq 0. \tag{1.7}$$

Модель Леонтьева является частным видом модели Неймана при условии $n = m$, $B = E$. Основным отличием является то, что всякий базисный процесс может выпускать не один продукт.

Существует несколько способов нахождения равновесия в модели Неймана: аналитический и численный. Оба способа рассмотрены в учебном пособии [4]. Аналитический метод является тривиальной задачей, но при этом имеет высокую размерность даже при $n = m = 2$, а также неудовлетворительное количество несвязанных областей возможных значений переменных.

Решение задачи численным методом может быть реализовано на вычислительных системах с плавающей точкой или работающих с безошибочными вычислениями, как представлено в работе [7]. Также к сложностям численного метода относится качество выбора начального условия поиска.

Рассмотренная модель является общей, но вносит свои сложности, требуя изучения дополнительного теоретического материала, что делает данную модель неподходящей для проверки возможности применения интервальной неопределенности.

Выводы по главе один

Модель межотраслевого баланса может быть составлена для многих экономических процессов. Для этого формируется таблица «затраты-выпуск», в которой обобщена статистика затрат и выпуска по всем отраслям. На основе полученной таблицы вычисляются коэффициенты прямых затрат, для моделей Леонтьева и/или Неймана.

Модель Леонтьева является эффективным инструментом при решении задач межотраслевого баланса, что делает возможным ее применение, не требуя большого количества прикладных и научных знаний, используя минимальный вычислительный аппарат.

Модель Неймана является эффективной для прогнозирования, рассмотрения динамических производственных процессов, но требует больших вычислительных ресурсов и теоретических знаний в данной области.

Применение статистических методов для нахождения коэффициентов прямых затрат является источником появления интервальной неопределенности в оценках. Игнорирование учета данной неопределенности может привести к неадекватным результатам моделирования.

Изложенное выше делает актуальным исследование моделей межотраслевого баланса с интервальной неопределенностью в элементах матрицы прямых затрат.

2 ИНТЕРВАЛЬНАЯ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

Работать с приближенными числами, границами ошибок и интервальными значениями приходится во многих случаях. При вычислениях, как правило, мы можем эффективно оперировать лишь объектами, которые имеют конечное описание [7]. Например,

$$\frac{1}{3} \approx 0.333333, \qquad \sqrt{3} \approx 1.732051. \tag{2.1}$$

Если дробно-рациональные числа имеют конечное представление [5, 9], то вещественные не имеют конечного машинного представления. Тем самым при сборе, обработке данных и прогнозировании возникают неизбежные ошибки, которые могут быть учтены введением расширения для точных значений параметров и данных.

Одним из возможных способов является введение для вещественных чисел интервального представления, где левая и правая границы интервала отклоняются от приближения точного значения на половину цены деления последнего значащего разряда. Например,

$$\frac{1}{3} \in [0.3333325{,}0.333333], \qquad \sqrt{3} \in [1.7320505{,}1.7320515]. \tag{2.2}$$

В случае математического моделирования область ошибки связана с прогнозным характером некоторых параметров и неотъемлемыми неточностями при сборе данных, которые можно уменьшить использованием доверительного интервала. Данный способ отражает вероятностное попадание точного значения в заданные границы. В случае принятия экономических решений отталкиваются не только от точных показателей эффективности, но и их устойчивости, структуры и динамики процессов производства и реализации. Наглядным отражением может служить учёт интервальной неопределенности, который требует своих подходов и способов решения в прикладных задачах экономики. Основоположником решения данной задачи был Л.В. Канторович, первый сформулировавший идею учёта интервальной неопределенности и положивший основу математическому аппарату для их использования [10].

Показательный пример даёт понятие управления. Управление по смыслу подразумевает неоднозначность параметров объекта, которые можно выбирать из некоторого множества значений для достижения тех или иных желаемых целей управления. С другой стороны, даже цели управления и параметры функционирования объекта могут быть определены неточно. Эти соображения приводят к задаче так называемого робастного управления [12].

2.1 Интервальные системы линейных алгебраических уравнений

Интервальная система алгебраических уравнений имеет следующий вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}, \tag{2.3}$$

где $a_{ij} = [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$ и $b_{ij} = [\underline{b}_i, \overline{b}_i]$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1,\ n}$, в матричном виде формулу (2.3) можно представить

$$Ax = b. \tag{2.4}$$

Множеством решений данной системы часто является пустым множеством даже при минимальном ненулевом интервале параметра. Что говорит о несовместности исходной задачи, требующей введения некоторого расширения правой части данной системы.

Метод универсального решения ИСЛАУ представленный и изученный Л.Т. Ащепковым и Д.В. Давыдовым в работе [11], сводится к решению соответствующей задачи линейного программирования, в которой целевая функция является минимальным расширением правой части на величину ε, такую, чтобы решение

$$Ax \in [\underline{b} - \varepsilon\bar{e}, \overline{b} + \varepsilon\bar{e}], \tag{2.5}$$

являлось не пустым множеством.

Для этого требуется введение пояснений о допусковом множестве решений интервальной линейной системы уравнений.

Задачей о допусках для ИСЛАУ (2.3) называется поиск решений, принадлежащих допусковому множеству решений

$$\Xi_{\mathrm{tol}}(\mathbf{A},\mathbf{b}) = \{\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \mid (\forall \mathrm{A} \in \mathbf{A})(\exists \mathrm{b} \in \mathbf{b})(\mathrm{Ax} = \mathrm{b})\,\} \tag{2.6}$$

или в эквивалентной форме

$$\Xi_{\mathrm{tol}}(\mathbf{A},\mathbf{b}) = \bigcap_{\mathrm{A}\in\mathrm{A}} \{\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \mid (\forall \mathrm{A} \in \mathbf{A})(\exists \mathrm{b} \in \mathbf{b})(\mathrm{Ax} = \mathrm{b})\,\}. \tag{2.7}$$

В представление (2.6) квантор всеобщности $\forall A \in \boldsymbol{A}$ эквивалентен теоретико-множественной операции пересечения $\bigcap$. Поэтому из (2.7) следует, что множество наименее чувствительно среди всех других множеств решений ИСЛАУ к изменению интервальной матрицы системы $\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists b \in \boldsymbol{b})(Ax = b)\,\}$. Хотя некоторые матрицы $A \in \boldsymbol{A}$ могут быть плохо обусловленными или вырожденными. Следовательно, допусковое множество может быть использовано как инструмент регулирования для неустойчивых и плохо обусловленных данных.

Допусковое множество решений системы линейных алгебраических уравнений обладает следующими свойствами.

Предложение 1. *Допусковое множество решений интервальной линейной системы уравнений есть выпуклое многогранное множество в* $\mathbb{R}^n$.

На практике использование прямого описания является неэффективным, поскольку сложность задачи растёт пропорционально $n \cdot 2^n$. Поэтому используется поиск бруса, который содержит в допусковом множестве решение системы уравнений.

Теорема 2.1 (И.А. Шарой о допусковом множестве решений). *Точка* $x \in \mathbb{R}^n$ *принадлежит допусковому множеству решений интервальной линейной системы* $Ax = b$ *тогда и только тогда, когда она является решением системы двусторонних линейных неравенств*

$$\begin{cases} \underline{\mathrm{b}}_{\mathrm{i}} \le \mathrm{ax} \le \overline{\mathrm{b}}_{\mathrm{i}}, \\ \mathrm{a} \in \mathrm{vert}\,\mathrm{A}_{\mathrm{i}}, \\ \mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{n}}, \end{cases} \tag{2.8}$$

где вектор-строки a пробегают всевозможные вершины интервальных строк матрицы A. Количество неравенств в этой системе не превосходит суммы числа вершин во всех интервальных векторах $vert\ A_i$, $i = \overline{1,n}$, и, тем более, не превосходит $n \cdot 2^n$.

Решение систем линейных неравенств может быть выполнено различными способами, и один из наиболее популярных состоит в применении развитых методов линейного программирования. В стандартной форме задачи линейного программирования система линейных неравенств имеет специальный вид, требующий неотрицательности переменных. Очень удобен для представления допускового множества решений ИСЛАУ в таком виде результат полученный И.Роном в [13].

2.2 Интервальная неопределенность в задаче межотраслевого баланса

Интервальная неопределенность в задаче межотраслевого баланса возникает на этапе формирование первичных данных, определения конечного плана и объемов потребления в непроизводственном секторе, что отражает система уравнений (2.3). В связи с чем решение точное отличается от интервального, а с учётом изменений плана конечного производства продукции, межотраслевой баланс становится представлением реальных ситуаций экономического процесса производства и распределения, связанных с оптимизацией распределения ресурсов, что делает его устойчивым и реалистичным. Задачи межотраслевого баланса с интервальной неопределенностью могут быть представлены как показано в таблице 2, с точным значением объема выпуска в балансе, определенным первичным выбранным планом, все элементы таблицы неотрицательные числа, которые задают потребление в производственном и непроизводственном секторе и конечный объем выпуска.

Таблица 2 – Межотраслевой баланс с интервальной неопределенностью

Структура затрат	Структура спроса					Объем выпуска
	Спрос отраслей				Непроизводств сфера	
	1	2	⋯	n		
1	$[\underline{a}_{11}; \bar{a}_{11}]$	$[\underline{a}_{12}; \bar{a}_{12}]$	⋯	$[\underline{a}_{1n}; \bar{a}_{1n}]$	$[\underline{c}_1; \bar{c}_1]$	$\bar{\nu}_1$
2	$[\underline{a}_{21}; \bar{a}_{21}]$	$[\underline{a}_{22}; \bar{a}_{22}]$	⋯	$[\underline{a}_{2n}; \bar{a}_{2n}]$	$[\underline{c}_2; \bar{c}_2]$	$\bar{\nu}_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$[\underline{a}_{n1}; \bar{a}_{n1}]$	$[\underline{a}_{n2}; \bar{a}_{n2}]$	⋯	$[\underline{a}_{nn}; \bar{a}_{nn}]$	$[\underline{c}_n; \bar{c}_n]$	$\bar{\nu}_n$
Добавлен. стоимость	$[\underline{w}_1; \bar{w}_1]$	$[\underline{w}_2; \bar{w}_2]$	⋯	$[\underline{w}_n; \bar{w}_n]$		

Отсюда следует, что уравнения (1.5) сводятся к следующей системе

$$\begin{cases} x - \overline{A}x \geq \underline{\nu}, \\ x - \underline{A}x \leq \overline{\nu}, \end{cases} \quad x \geq 0. \tag{2.10}$$

В большинстве случаев решение системы (2.10) несовместно или плохо обусловлено, что требует разумного расширения, которое вводится в работе В.А Голодова [7]. В работе вводится понятие *псевдорешения интервальных систем линейных алгебраических уравнений*, по аналогии с псевдорешением СЛАУ М.М. Лаврентьева в работах [14, 15]. *Псевдорешениями интервальной системы линейных уравнений* $Ax = b$ называется точка допускового множества системы $Ax = b(z)$ с расширенной правой частью $b(z) = [\underline{b} - zp;\ \overline{b} + zq]$, где, $p,\ q$ – константные положительные векторы, определяющие характер расширения исходя из содержательного смысла задачи, $z \geq 0$ – параметр, отвечающий за величину расширения.

В работе [7] также доказывается существование и единственность псевдорешения. В случае несовместности системы требуется найти наилучшее псевдорешение, то есть наименьший зазор между исходным планом и необходимым расширением. Далее, если не оговорено иное, под расширением плана будем подразумевать наилучшее псевдорешением ИСЛАУ.

В том случае, когда $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}(\boldsymbol{z}))$ неограниченно и является конечным пересечением гиперполос, отличным от точки (ответом на задачу линейного программирования является грань или ребро симплекса), имеет смысл ставить дополнительную оптимизационную задачу, которая может обеспечить единственность выбора оптимального псевдорешения интервальной системы. Для решения совместной задачи о допусках имеет смысл применять методы интервального анализа.

Потенциально система (2.10) имеет высокую степень вырожденности, что будет приводить, при использовании приближенных вычислений, к зацикливанию симплекс-метода и погрешностям при применении других методов решения задачи. Существуют случаи, когда псевдорешение может быть не единственным, вследствие неограниченности допускового множества.

2.3 Модель учёта интервальной неопределенностью для задачи межотраслевого баланса

Введем модель учёта интервальной неопределенности в проблеме межотраслевого баланса. Модель включает в себя таблицу 2, которая задает интервальные начальные условия, в которой все элементы являются целыми неотрицательными числами. Исходная матрица разбивается на две, одна из которых содержит нижние границы всех элементов, а другая все верхние, включая конечное потребление в непроизводственной сфере, которое также задано интервалом. Примером могут служить любые данные, собранные статистически или полученные путём прогнозирования.

В качестве начального плана берутся точные значения вектора конечного производства, также являющиеся положительными числами.

В качестве некоторого упрощения используются отрасли, потребляющие продукцию всех отраслей, включая свою. Каждая из отраслей потребляет хотя бы одну единицу продукции другой отрасли при производстве, конечный план и потребление в непроизводственном секторе – положительные значения. Представим данные рассуждения в сочетании вместе с формулами (2.5), (2.10)

$$\varepsilon \to \min_{x},$$
$$\begin{cases} x - \overline{A}x \geq \nu(1-\varepsilon), \\ x - \underline{A}x \leq \nu(1+\varepsilon), \end{cases} \quad x \geq 0. \qquad (2.11)$$

где $0 \leq \varepsilon \leq 1$, ν – вектор исходного плана производства, x – вектор интенсивности.

Впредь, (2.11) будем называть моделью межотраслевого баланса с интервальной неопределенностью.

Выводы по главе два

Рассмотрены источники появления интервальной неопределенности и возможные технические и математические аппараты решения, один из которых – введение псевдорешения, которое позволяет решить несовместную или плохо обусловленную ИСЛАУ.

Классическая модель межотраслевого баланса Леонтьева представляет собой СЛАУ. Введение интервальной неопределенности приводит к необходимости решения задачи линейного программирования с количеством переменных n+1, n – количеством отраслей, и количеством ограничений 2n.

3 АНАЛИЗ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА С ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ МАТРИЦЫ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ЗАТРАТ

3.1 Генерация тестовых задач

Для генерации данных используется язык программирования Python. Индексация элементов начинается с 0. Выделяется область памяти под матрицу a, где в ячейке $a_{ij},\ i,j = \overline{1,n}$ хранится величина потребления i-ой отраслью ресурса отрасли j. Матрица имеет размер $n \times (n+3)$, где n – заданное число отраслей. Часть матрицы размером $(n\ \times n)$ хранит величины потребления j-го ресурса в производстве i-ой отрасли, в столбце $n+1$ содержатся данные о конечном использовании продукта i-й отрасли, в столбце $n+2$ содержатся данные о плане конечного продукта для i-й отрасли, в столбце $n+3$ содержатся данные о суммарном потреблении i-го ресурса всеми отраслями. Значения данного столбца являются величинами большими, чем конечное использование на случайную величину $constant = 10$. Выбор $constant$обусловлен необходимостью получения неотрицательных значений в столбце $n+1$ и во всех элементах $a_{ij},\ i,j = \overline{1,n}$ при вычитании некоторой величины eps. Все значения являются целыми положительными числами. В листинге 1 представлен код генерации данных.

```
import random
constant=10
n = int(input())
a = [[0] * (n+3) for i in range(n)]
for i in range(n):
  for j in range(n+1):
    a[i][j]=int(random.random()*100)+constant
    a[i][n+2]+=a[i][j]
for i in range(n):
  a[i][n+1]=a[i][n]+int(random.random()*100)
```

Листинг 1 – Генерация исходных данных задачи межотраслевого баланса

После передается значение отклонений точных значений элементов $a_{ij},\ i = \overline{1,\ n},\ j = \overline{1,\ n+1}$ на величину $eps = 0.1,\ 1,\ 10$, что соответствует 1%, 10%, 100% от объема возможного минимального потребления i-ой отраслью ресурса отрасли j. Создаются матрицы b и c, в которых хранятся нижние и верхние оценки всех элементов соответственно. Нижние оценки получены путем уменьшения точного значения затрат и конечного использования на заданную величину eps, аналогичным образом получаются верхние. Данные о плане конечного продукта для i-й отрасли остаются неизменными, что показывает конечность ожидаемого плана относительно статистических данных, полученных путем прогнозирования. Данный фрагмент представлен в листинге 2.

```
eps = int(input())
b = [[0] * (n+3) for i in range(n)]
for i in range(n):
  b[i][n+2]=a[i][n+2]
  b[i][n+1]=a[i][n+1]
  for j in range(n+1):
    b[i][j]=a[i][j]-eps
    b[i][n+2]-=eps
c = [[0] * (n+3) for i in range(n)]
for i in range(n):
  c[i][n+2]=a[i][n+2]
  c[i][n+1]=a[i][n+1]
  for j in range(n+1):
    c[i][j]=a[i][j]+eps
    c[i][n+2]+=eps
```

Листинг 2 – Добавление в исходные данные интервальной неопределенности

Созданные матрицы b и c могут быть представлены в виде комбинации интервальной матрицы исходных данных, интервального вектора конечного использования и вектора конечного потребления, что является условием задачи межотраслевого баланса с интервальной неопределенностью. Ниже представлен пример для трех отраслей.

$$\begin{pmatrix} [35;37] & [47;49] & [81;83] \\ [78;80] & [102;104] & [19;21] \\ [58;60] & [74;76] & [69;71] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [57;59] \\ [9;11] \\ [105;107] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 122 \\ 33 \\ 126 \end{pmatrix}$$

После этого b и c преобразуются в матрицы коэффициентов прямых затрат (матрицы Леонтьева) по формуле (1.3) .Данный фрагмент представлен в листинге 3.

```
for i in range(n):
    for j in range(n):
        b[i][j] /= b[j][n + 2]
c[i][j] /= c[j][n + 2]
for i in range(n):
    b[i][i] += 1
    c[i][i] += 1
```

Листинг 3 – Преобразование данных в матрицы Леонтьева

3.2 Решение тестовых задач

Для решения построенной задачи используется модуль *scipy* языка *Python*, содержащий методы решения задач линейного программирования. Исходные данные задачи передаются в виде 3 списков: коэффициенты целевой функции, коэффициенты прямых затрат, умноженные на -1, значение конечного потребления матриц b и c. Фрагмент кода представлен в листинге 4.

```
for i in range(n):
    c1.append(0)
c1.append(1)
a1 = []
b1 = []
for i in range(n):
    t = []
    for j in range(n):
        t.append(-b[i][j])
    t.append(-b[i][n + 1])
    a1.append(t)
    b1.append(-b[i][n + 1])
for i in range(n):
    t = []
    for j in range(n):
        t.append(c[i][j])
    t.append(-c[i][n + 1])
    a1.append(t)
    b1.append(b[i][n + 1])
```

Листинг 4 – Подготовка списков для модуля решения *scipy*

После подключается модуль *scipy* и вызывается решение *linprog*, которое помещается в переменную res, что представлено в листинге 5.

```
from scipy.optimize import linprog
res=linprog(c1, A_ub=a1, b_ub=b1)
```

Листинг 5 – Решение задачи с помощью модуля scipy

Решаются 6 задач, в которых указывается начальное количество отраслей n, величина интервала eps и начальное условие генерируется с помощью модуля в языке *Python*. Записывается вектор решения (интенсивности) и необходимый коэффициент расширения (в случае несовместного решения z_i, где i – номер задачи).

Задача №1

Условие: $n = 3, eps = 1$.

$$\begin{pmatrix} [35;37] & [47;49] & [81;83] \\ [78;80] & [102;104] & [19;21] \\ [58;60] & [74;76] & [69;71] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [57;59] \\ [9;11] \\ [105;107] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 122 \\ 33 \\ 126 \end{pmatrix}$$

Сгенерированная задача является примером устойчивого производства со средней ошибкой статистических данных потребления отраслей. План второй отрасли может быть недостаточным, что приведет к несовместности решения и дальнейшему расширению плана конечного производства продукта 2 отрасли.

Решение: полученный результат представлен в таблице 3.

Таблица 3 – Полученные решения для задачи № 1 (вектор x)

Точное решение исходной задачи	Решение задачи, преобразованной к интервальному виду
$\begin{pmatrix} 408{,}064 \\ 405{,}167 \\ 486{,}724 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 392{,}611 \\ 392{,}531 \\ 470{,}015 \end{pmatrix}$

Значение вектора интенсивности x для интервальных данных меньше аналогичных значений вектора для точных значений, что показывает взаимосвязь между отраслями и их интенсивностью для других отраслей. Так как производство i-ого продукта прямо влияет на производство всех остальных отраслей, нет смысла увеличивать производство отрасли, которая производит достаточное количество продукта с учетом возможных статистических ошибок в сборе данных и прогнозировании, не увеличив возможности производства отстающей отрасли.

Расширение плана конечного производства: для сгенерированных интервальных данных выполнение поставленного плана невозможно, так как расширение конечного производства $z_1 = 0{,}041$, тогда как общепринятым в статистике является отклонение в 5%. Данные представлены в таблице 4.

Таблица 4 – План для задачи № 1

Точный план исходной задачи	План задачи с интервальной неопределённостью
$\begin{pmatrix} 122 \\ 33 \\ 126 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [116{,}998;\ 127{,}002] \\ [31{,}647;\ 34{,}353] \\ [120{,}834; 131{,}166] \end{pmatrix}$

В модели прослеживается недостаток точности плана конечного производства, так как расширение является излишним для отдельных отраслей. Одним из возможных решений является введение в модель вектора отклонений для конечного производства.

Представим следующую *гипотезу*: в случае увеличения интервала eps интенсивность производства будет падать из-за несбалансированности между отраслями интервала ошибок и увеличением коэффициента расширения конечного плана.

Задача №2

Условие: $n = 3, eps = 0{,}1.$

$$\begin{pmatrix} [33{,}9; 34{,}1] & [75{,}9; 76{,}1] & [52{,}9; 53{,}1] \\ [84{,}9; 85{,}1] & [47{,}9; 48{,}1] & [68{,}9; 69{,}1] \\ [16{,}9; 17{,}1] & [84{,}9; 85{,}1] & [51{,}9; 52{,}1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [61{,}9; 62{,}1] \\ [43{,}9; 44{,}1] \\ [79{,}9; 80{,}1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 127 \\ 130 \\ 137 \end{pmatrix}$$

Величины потребления при производстве значительно выше аналогичных из задачи № 1. Интервал статистических данных минимальный из выбранных для анализа моделей, что является примером сложившегося с течением времени технологического процесса, устойчивостью размеров затрат и объемов производства. В случае несовместности решения величина коэффициента расширения конечного плана будет меньше, что подтвердит гипотезу, выдвинутую в предыдущей задаче.

Решение: полученный результат представлен в таблице 5.

Таблица 5 – Полученные решения для задачи № 2 (вектор x)

Точное решение исходной задачи	Решение задачи, преобразованной к интервальному виду
$\begin{pmatrix} 478{,}504 \\ 558{,}577 \\ 470{,}774 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 478{,}094 \\ 558{,}226 \\ 470{,}342 \end{pmatrix}$

Значение вектора интенсивности x для интервальных данных незначительно отличается от точного решения, что ещё раз подтверждает необходимость сбора точных статистических или полученных прогнозным путем данных, при этом производится корректировка вектора интенсивности x.

Расширение плана конечного производства: в задаче № 2 выполнение поставленного плана корректируется, так как расширение конечного производства незначительно $z_2 = 0{,}001$, но должно быть учтено в процессе производства. Для наглядности представим полученные результаты в таблице 6.

Таблица 6 – План для задачи №2

Точный план исходной задачи	План задачи с интервальной неопределённостью
$\begin{pmatrix} 127 \\ 130 \\ 137 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [126{,}873;\ 127{,}127] \\ [129{,}870;\ 130{,}130] \\ [136{,}863; 137{,}137] \end{pmatrix}$

Необходимо учитывать, что на практике в задачах межотраслевого баланса сложно добиться такой точности сбора данных. Для данных с высокой точностью эффективнее использовать точные значения. Использование интервальной неопределенности может быть обусловлено поиском неустойчивостей в балансе, эффективных путей модернизации без снижения производства, при этом изменяются интервалы неопределенности для отдельно взятых коэффициентов потреблений. Гипотеза не была опровергнута данной задачей.

Задача №3.1

Условие: $n = 3, eps = 10.$

$$\begin{pmatrix} [26;46] & [92;112] & [11;31] \\ [35;55] & [15;35] & [30;50] \\ [7;27] & [97;117] & [12;32] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [71;91] \\ [84;104] \\ [41;61] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 160 \\ 115 \\ 69 \end{pmatrix}$$

Сгенерированная задача может являться примером небольшого производства со значительной погрешностью сбора данных. Подобные ситуации возникают в случае создания нового производства на базе имевшегося ранее, но устаревшего в связи с изменением технологий. Неизвестны точные значения потребления, но есть необходимый план производства.

Решение: полученный результат представлен в таблице 7.

Таблица 7 – Решение задачи № 3.1 (вектор x)

Точное решение исходной задачи	Решение задачи, преобразованной к интервальному виду
$\begin{pmatrix} 384{,}641 \\ 276{,}042 \\ 271{,}333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 364{,}365 \\ 248{,}902 \\ 247{,}918 \end{pmatrix}$

Значение вектора интенсивности x для интервальных данных значительно отличается от точного решения, что обусловлено большим доверительным интервалом исходных данных. Для полноты всего производственного процесса требуется рассмотреть конечный план потребления и сделать выводы.

Расширение плана конечного производства: в задаче № 3.1 выполнение поставленного плана совпадает как для точных значений, так и для интервальных $z_{3.1} = 0$. Производственный процесс является устойчивым при значительных отклонениях, план реализуем в полном объеме от запланированного, с изменением интенсивности производства, что показывает правильность модернизации и корректность составления объемов конечного производства. При этом претерпевает значительные изменения интенсивность производства.

Гипотеза требует уточнений для совместных интервальных решений. *Гипотеза (скорректированная)*: в случае увеличения интервала eps интенсивность производства будет падать из-за несбалансированности между отраслями, интервала ошибок и увеличения коэффициента расширения конечного плана, в случае несовместности интервального решения.

Полученный результат может быть аномальным, поэтому повторно генерируются данные с теми же начальными условиями.

Для анализа в дальнейшем вынесен вопрос числа совместных решений в зависимости от количества отраслей n.

Задача № 3.2

Условие: $n = 3, eps = 10$.

$$\begin{pmatrix} [83;103] & [79;99] & [28;48] \\ [11;31] & [27;47] & [53;73] \\ [1;21] & [47;67] & [35;55] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [6;26] \\ [10;30] \\ [88;108] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 70 \\ 21 \\ 155 \end{pmatrix}$$

В сгенерированных данных присутствуют серьезные недостатки в составлении межотраслевого баланса, так значения элементов $\underline{a}_{31}$ и $\underline{a}_{14}$ близки к 0 значению потребления. Примером может служить присоединение к производству новой отрасли, которая тесно связана с одной из ранее присутствующих отраслей, но минимально взаимодействующей с другой отраслью. При этом объем предоставляемого для внешнего использования продукта 1 отрасли может быть подвержен тенденциям (непостоянству спроса). В такой ситуации неопределенность в данных негативно отражается на последующих результатах для точных значений.

Решение: полученный результат представлен в таблице 8.

Таблица 8 – Решение задачи № 3.2 (вектор x)

Точное решение исходной задачи	Решение задачи, преобразованной к интервальному виду
$\begin{pmatrix} 441{,}330 \\ 217{,}238 \\ 334{,}91 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 332{,}142 \\ 137{,}294 \\ 217{,}471 \end{pmatrix}$

Значение вектора интенсивности x для интервальных данных значительно отличается от точного решения, как и в случае задачи 3.1, что обусловлено большим доверительным интервалом исходных данных. В условиях небольшого производства неточность данных может крайне негативно отразиться на целесообразности и эффективности дальнейшего производства.

Расширение плана конечного производства: в задаче № 3.2 выполнение поставленного плана невозможно, так как расширение конечного производства значительно $z_{3.2} = 0{,}307$, требуется дополнительный сбор первичных данных, изменения в плане объема производства. При этом серьезным изменениям подвержен и сам производственный процесс. Для наглядности представим полученные результаты в таблице 9.

Таблица 9 – План для задачи № 3.2

Точный план исходной задачи	План задачи с интервальной неопределённостью
$\begin{pmatrix} 70 \\ 21 \\ 155 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [48{,}510;\ 91{,}490] \\ [14{,}553;\ 27{,}447] \\ [107{,}415; 202{,}585] \end{pmatrix}$

Производственный процесс является неустойчивым при значительных отклонениях, план нереализуем в полном объеме. Для достижения интервального плана требуется кардинальное изменение интенсивности производства. Также требуется глубокий анализ данной ситуации, производство требует пересмотра объемов и планов. Данная задача подтверждает *гипотезу*.

Чтобы оценить влияние количества отраслей, приводятся задачи с аналогичным условием ошибки данных для $n = 7$ отраслей.

Задача №4

Условие: $n = 7, eps = 0.1.$

$$\begin{pmatrix}
[36{,}9; 37{,}1] & [75{,}9; 76{,}1] & [30{,}9; 31{,}1] & [54{,}9; 55{,}1] & [13{,}9; 14{,}1] & [89{,}9; 90{,}1] & [81{,}9; 82{,}1] \\
[92{,}9; 93{,}1] & [83{,}9; 84{,}1] & [79{,}9; 80{,}1] & [100{,}9; 101{,}1] & [26{,}9; 27{,}1] & [84{,}9; 85{,}1] & [60{,}9; 61{,}1] \\
[104{,}9; 105{,}1] & [89{,}9; 90{,}1] & [21{,}9; 22{,}1] & [81{,}9; 82{,}1] & [48{,}9; 49{,}1] & [29{,}9; 30{,}1] & [46{,}9; 47{,}1] \\
[24{,}9; 25{,}1] & [38{,}9; 39{,}1] & [96{,}9; 97{,}1] & [107{,}9; 108{,}1] & [53{,}9; 54{,}1] & [43{,}9; 44{,}1] & [45{,}9; 46{,}1] \\
[55{,}9; 56{,}1] & [66{,}9; 67{,}1] & [46{,}9; 47{,}1] & [57{,}9; 58{,}1] & [23{,}9; 24{,}1] & [53{,}9; 54{,}1] & [59{,}9; 60{,}1] \\
[65{,}9; 66{,}1] & [61{,}9; 62{,}1] & [58{,}9; 59{,}1] & [77{,}9; 78{,}1] & [51{,}9; 52{,}1] & [100{,}9; 101{,}1] & [28{,}9; 29{,}1] \\
[61{,}9; 62{,}1] & [107{,}9; 108{,}1] & [44{,}9; 45{,}1] & [49{,}9; 50{,}1] & [38{,}9; 39{,}1] & [80{,}9; 81{,}1] & [85{,}9; 86{,}1]
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [85,9;86,1] \\ [89,9;90,1] \\ [58,9;59,1] \\ [44,9;45,1] \\ [106,9;107,1] \\ [31,9;32,1] \\ [70,9;71,1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 152 \\ 153 \\ 100 \\ 137 \\ 119 \\ 39 \\ 138 \end{pmatrix}$$

Сгенерированная задача представляет межотраслевой баланс небольшой страны, в которой имеется 7 крупных отраслей, ошибка статистических данных минимальна.

С ростом числа отраслей растет и количество решаемой системы неравенств, что увеличивает суммарную накопленную ошибку для всей системы в целом. В исходных данных нет аномальных значений, значение конечного плана для отрасли 6 незначительно.

Решение: полученный результат представлен в таблице 10.

Таблица 10 – Решение задачи № 4 (вектор x)

Точное решение исходной задачи	Решение задачи, преобразованной к интервальному виду
$\begin{pmatrix} 844,413 \\ 1110,820 \\ 864,451 \\ 881,724 \\ 777,351 \\ 838,485 \\ 980,420 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 842,683 \\ 1109,009 \\ 862,775 \\ 880,003 \\ 775,684 \\ 836,934 \\ 978,657 \end{pmatrix}$

Значение вектора интенсивности x для интервальных данных незначительно отличается от точного решения, как и в случае задачи 2, что обусловлено небольшим доверительным интервалом исходных данных и значительной устойчивостью первичных данных. Из-за возросшего числа отраслей увеличился и вектор интенсивности, что отражает потребность большего числа отраслей в продукции i-ой отрасли, при росте количества отраслей n вектор интенсивности продолжит рост, что в свою очередь повлечёт за собой рост суммарной ошибки.

Расширение плана конечного производства: в задаче № 4 выполнение поставленного плана возможно с корректировками, так как расширение конечного производства значительно $z_4 = 0,002$.При этом точный план не подвержен сильному изменению. Для наглядности представим полученные результаты в таблице 11.

Таблица 11 – План для задачи № 4

Точный план исходной задачи	План задачи с интервальной неопределённостью
$\begin{pmatrix} 152 \\ 153 \\ 100 \\ 137 \\ 119 \\ 39 \\ 138 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [151{,}696; 152{,}304] \\ [152{,}694; 153{,}306] \\ [99{,}800; 100{,}200] \\ [136{,}726; 137{,}274] \\ [118{,}762; 119{,}238] \\ [38{,}922; 39{,}078] \\ [137{,}724; 138{,}276] \end{pmatrix}$

Производственный процесс является неустойчивым при незначительных отклонениях, план реализуем с незначительными изменениями объема при правильной корректировке интенсивности производства.

Задача № 5

Условие: $n = 7, eps = 1$.

$$\begin{pmatrix} [49;51] & [97;99] & [51;53] & [43;45] & [57;59] & [86;88] & [38;40] \\ [41;43] & [56;58] & [13;15] & [91;93] & [10;12] & [54;56] & [43;45] \\ [79;81] & [84;86] & [62;64] & [84;86] & [62;64] & [88;90] & [47;49] \\ [73;75] & [22;24] & [70;72] & [88;90] & [66;68] & [15;17] & [59;61] \\ [12;14] & [68;70] & [99;101] & [16;18] & [76;78] & [75;77] & [52;54] \\ [39;41] & [45;47] & [34;36] & [53;55] & [84;86] & [94;96] & [66;68] \\ [34;36] & [107;109] & [99;101] & [49;51] & [22;24] & [66;68] & [101;103] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [100;102] \\ [52;54] \\ [39;41] \\ [84;86] \\ [32;34] \\ [21;23] \\ [30;32] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 106 \\ 82 \\ 133 \\ 92 \\ 71 \\ 23 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Сгенерированная задача является примером устойчивого производства со средней ошибкой статистических данных потребления отраслей. План шестой отрасли может быть недостаточным, что приведет к несовместности решения и дальнейшему расширению плана конечного производства продукции всех отраслей.

Решение: полученный результат представлен в виде таблице 12.

Таблица 12 – Решение задачи № 5 (вектор x)

Точное решение исходной задачи	Решение задачи, преобразованной к интервальному виду
$\begin{pmatrix} 829{,}666 \\ 606{,}150 \\ 996{,}143 \\ 771{,}394 \\ 773{,}399 \\ 743{,}439 \\ 953{,}780 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 818{,}352 \\ 592{,}047 \\ 980{,}923 \\ 757{,}101 \\ 759{,}677 \\ 730{,}988 \\ 938{,}640 \end{pmatrix}$

Значение вектора интенсивности x для интервальных данных меньше аналогичных значений вектора для точных значений. Максимальное приращение $\Delta = x_i - \tilde{x}_i$ равно 16, где x_i – точное решение i -ой отрасли, а $\tilde{x}_i$ – интервальное.

Расширение плана конечного производства: для сгенерированных интервальных данных выполнение поставленного плана требует изменений как в интенсивности производства, так и в планируемом объеме конечного производства. Расширение конечного производства $z_5 = 0{,}024$, что отражает кумулятивность накопления ошибки. Данные представлены в таблице 13.

Таблица 13 – План для задачи № 5

Точный план исходной задачи	План задачи с интервальной неопределённостью
$\begin{pmatrix} 106 \\ 82 \\ 133 \\ 92 \\ 71 \\ 23 \\ 120 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [103{,}456; 108{,}544 \\ [80{,}032; 83{,}968] \\ [129{,}808; 136{,}192] \\ [89{,}792; 94{,}208] \\ [69{,}296; 72{,}704] \\ [22{,}448; 23{,}552] \\ [117{,}200; 122{,}880] \end{pmatrix}$

Производственный процесс является устойчивым при незначительных отклонениях, план реализуем с незначительными изменениями объема при правильной корректировке интенсивности производства.

Задача №6

Условие: $n = 7, eps = 10$

$$\begin{pmatrix} [8;28] & [65;85] & [67;87] & [25;45] & [2;22] & [66;86] & [84;104] \\ [44;64] & [47;67] & [32;52] & [5;25] & [17;37] & [28;48] & [32;52] \\ [3;23] & [63;83] & [75;95] & [87;107] & [81;101] & [93;113] & [82;102] \\ [94;114] & [16;36] & [6;26] & [71;91] & [38;58] & [94;114] & [97;117] \\ [41;61] & [50;70] & [63;83] & [26;46] & [1;31] & [75;95] & [93;113] \\ [48;68] & [36;56] & [28;48] & [91;111] & [82;102] & [96;116] & [30;50] \\ [79;99] & [20;40] & [49;69] & [46;66] & [44;64] & [20;40] & [29;49] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [93;113] \\ [33;53] \\ [1;21] \\ [25;45] \\ [66;86] \\ [93;113] \\ [47;67] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 186 \\ 94 \\ 69 \\ 50 \\ 110 \\ 165 \\ 86 \end{pmatrix}$$

В сгенерированных данных присутствуют серьезные недостатки в составлении межотраслевого баланса. Так, значение элементов $\underline{a}_{31}$, $\underline{a}_{15}$ и других близки к 0 значению потребления. Примером может служить переход на новые производственные возможности, например, после научных открытий или войн. В такой ситуации неопределенность в данных негативно отражается на последующих результатах для точных значений и требует учёта интервальной неопределенности.

Решение: полученный результат представлен в таблице 14.

Таблица 14 – Решение задачи № 6 (вектор x)

Точное решение исходной задачи	Решение задачи, преобразованной к интервальному виду
$\begin{pmatrix} 873,913 \\ 581,942 \\ 1045,658 \\ 900,963 \\ 870,233 \\ 1008,955 \\ 718,397 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 535,458 \\ 328,852 \\ 676,523 \\ 567,419 \\ 540,731 \\ 634,973 \\ 430,302 \end{pmatrix}$

Значение вектора интенсивности x для интервальных данных значительно отличается от аналогичных значений точного решения. Максимальное приращение $\Delta = x_i - \tilde{x}_i$ равно 369, где x_i – точное решение i-ой отрасли, а $\tilde{x}_i$ – интервальное. План является несовместным, а суммарная накопленная ошибка велика.

Расширение плана конечного производства: для сгенерированных интервальных данных выполнение поставленного плана требует изменений как в интенсивности производства, так и в планируемом объеме конечного производства. Расширение конечного производства $z_6 = 0{,}380$, что отражает неправильность решения в случае точного решения. Данные представлены в таблице 15.

Таблица 15 – План для задачи № 6

Точный план исходной задачи	План задачи с интервальной неопределённостью
$\begin{pmatrix} 186 \\ 94 \\ 69 \\ 50 \\ 110 \\ 165 \\ 86 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [115{,}320; 256{,}680 \\ [58{,}280; 129{,}720] \\ [42{,}780; 95{,}220] \\ [31{,}000; 69{,}000] \\ [68{,}200; 151{,}800] \\ [102{,}300; 227{,}200] \\ [53{,}320; 118{,}680] \end{pmatrix}$

Производственный процесс является неустойчивым, требуется детальная проработка объемов производства и конечного плана.

3.3 Анализ полученных результатов

В ходе решения сгенерированных задач была выдвинута гипотеза о связи между интервалом ошибки и коэффициентом расширения в случае несовместного решения. Для наглядности данные представлены в таблице 16.

Таблица 16 – Влияние интервала отклонения на коэффициент расширения от величины отклонения и количества отраслей

Коэффициент расширения конечного плана производства		Величина отклонения точных данных		
		0,1	1	10
Количество отраслей в межотраслевом балансе	3	0,010	0,041	0,307
	7	0,002	0,230	0,380

С увеличением числа отраслей и величины отклонения точных данных растёт минимальный коэффициент расширения, необходимый для решения задач межотраслевого баланса с интервальной неопределенностью с помощью модели.

Чтобы увидеть динамику изменения, строится график зависимости по таблице 16, где по оси абсцисс откладывается величина отклонения, ось ординат показывает величину коэффициента расширения.

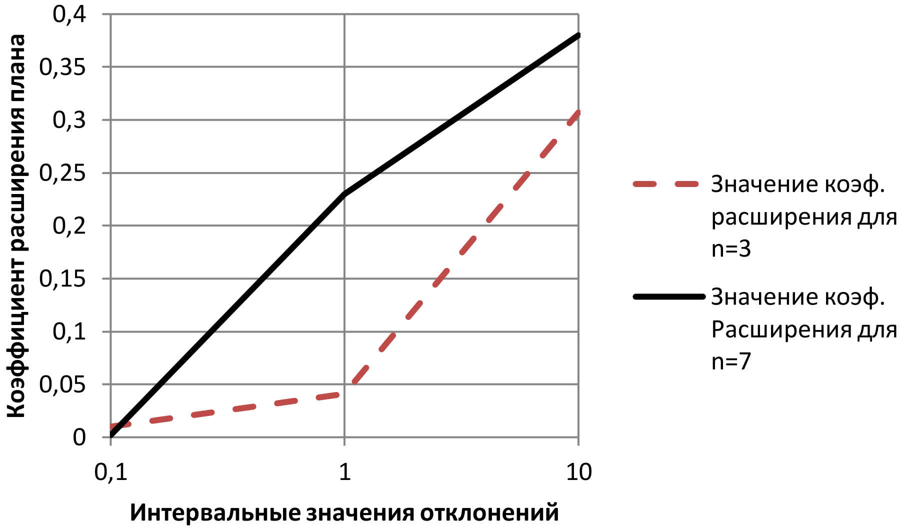

Рисунок 1 – Зависимость коэффициента расширения от величины интервала данных для 3 и 7 отраслей

С ростом числа отраслей и суммарным увеличением накопленных ошибок прослеживается рост несовместности решения, требующий изменений в интенсивности производства и изменения конечного плана.

Учёт интервальной неопределенности показывает устойчивость модели, слабые стороны планирования производства, а также возможность изменения объемов и их влияние на конечный план.

В задаче № 3.1 получено совместное решение. Чтобы проверить влияние, проведем дополнительный анализ числа совместных решений для интервала $eps = 10$ с числом отраслей $n = \overline{2,\ 4}$, для уменьшения числа колебаний каждое значение проверяется 3 раза, в каждом случае решается 30 задач. Полученные данные представлены в таблице 17.

Таблица 17 – Количество совместных решений от числа отраслей

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Кол. совместных решений от числа отраслей</td><td colspan="3">Количество отраслей</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Номер теста</td><td>1</td><td>7</td><td>3</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>7</td><td>2</td><td>0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6</td><td>4</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td>Среднее значение</td><td>6,7</td><td>3</td><td>0</td></tr>
</table>

В случае роста количества отраслей для данных с интервальной неопределенностью необходимо использование модель, иначе решение будет плохо обусловлено или несовместно. Требуется провести анализ модели на данных реального производства, чтобы проверить работоспособность модели, а также проверить гипотезу.

Выводы по главе три

В ходе генерации данных была выдвинута гипотеза о взаимосвязи между интервалом для данных и коэффициентом расширения. В одном из случаев полученное решение получилось совместным. Гипотеза была изменена, и вынесен вопрос о количестве совместных решений для межотраслевого баланса с интервальной неопределенностью.

Сгенерированные данные отражают различные состояние производства и плана, а также качество сбора или прогнозирования исходных данных. Каждая задача отражает различные ситуации в производственном процессе, что делает модель применимой для всех случаев составления межотраслевого баланса с интервальной неопределенностью.

В задаче межотраслевого баланса с незначительной интервальной неопределенностью модель позволяет скорректировать вектор интенсивности и план, провести анализ чувствительности к изменению плана, а также выявить отрасли с наибольшей неустойчивостью.

При рассмотрении средней ошибки первичных данных требуется дополнительный анализ количества отраслей и модели, для уменьшения интервального значения. В случае высокой нестабильности данных решение может крайне сильно отличаться от точного решения.

В ходе выполнения работы был выявлен ряд недостатков модели, такие как:

1. Интервальная неопределенность одинакова для всего баланса, что является абстракцией для проверки модели.

2. Между расширением присутствует зазор, требующий дополнительного введения вектора расширения в модель.

В результате анализа несовместность решения из-за кумулятивности накопления ошибки будет расти по мере увеличения количества отраслей в производстве, что требует обязательного учёта. Также падает число совместных решений, что наглядно демонстрирует, что при малом количестве отраслей добиться совместности и устойчивости проще, нежели в масштабах страны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы исследовалась возможность введения учёта интервальной неопределенности в модель межотраслевого баланса. В первой главе рассматривались различные балансовые модели, такие как модель Леонтьева и модель Неймана. В результате анализа был выбрана балансовая модель Леонтьева с использованием обратной матрицы. Недостатками которой является неограниченность интенсивности и необходимость вычисления обратной матрицы. Возможным вариантом для дальнейшего исследования влияния интервальной неопределенности на динамику процесса в модели Нейман.

Рассмотрены возможные ситуации возникновения интервальной неопределенности, возможные решение ИСЛАУ, предложена модель учёта неопределенности в задаче межотраслевого баланса.

На сгенерированных задачах проведена проверка модели, выявлены следующие недостатки: модель имеет зазор при решении, кроме того, использование одинаковых интервалов не отражает реальную ситуацию достаточно точно.

Была выдвинута и подтверждена гипотеза о связи между интервалом данных и коэффициентом расширения конечного плана. Рассмотрены случаи появления совместных решений.

Учёт интервальной неопределённости в задачах позволяет смоделировать реальные процессы с возможностью изменений и неточностью данных. В случае интервального межотраслевого баланса учёт неопределенности является механизмом. Он определяет интенсивность, корректирует план, дает характеристику устойчивости полученной модели. Это является неотъемлемой частью при определении объемов и структуры производства.

Для дальнейшего развития модели требуется устранить выявленные недостатки и получить реальные данные для проверки.

Модель является рабочей для крупных производств, открывающих новые отрасли для того, чтобы составить план на основе данных, которые могут быть получены путем прогнозирования или на основе статистики других предприятий.

Используя модель, можно найти узкие места в производстве или в конечном плане производства.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Леонтьев, В.В. Межотраслевая экономика / В.В. Леонтьев; науч. ред. и авт. предисл. А. Г. Гранберг. – М.: Экономика , 1997. – 477 с.

2. Канторович Л.В., Макаров В.Л. Оптимальные модели перспективного планирования // Применение математики в экономических исследованиях. Т. 3. – М.: Мысль, 1965.

3. Никайдо, Х. Выпуклые структуры и математическая экономика /Х. Никайдо. — Москва: Мир, 1972. – 520 с.

4. Панюков, А. В. Математическое моделирование экономических процессов: Учебное пособие / А.В. Панюков. – М.: Либроком, 2010. – 192 с.

5. Панюков, А. В. Подход к решению систем линейных алгебраических уравнений с интервальной неопределенностью в исходных данных / А. В. Панюков, В. А. Голодов // Вестник Южно-Уральского Государственного Университета. Серия: "Математическое моделирование и программирование". — 2013. — Т. 6, № 2. — С.109–119.

6. Латипова, А.Т. Численные методы определения положения равновесия в модели Неймана / А.Т. Латипова, А.В. Панюков. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2009.

7. Голодов, В.А. Интервальный подход к регуляризации неточно заданных систем линейных уравнений [Текст]: дис...канд. физ.-мат. наук: 05.13.17: защищена 13.11.14: утв. 15.07.02 / Голодов Валентин Александрович. – Москва, 2014. – 107 с.

8. Келлер, А.В. Численное исследование задач оптимального управления для моделей Леонтьевского типа [Текст]: дис...док.. физ.-мат. наук: 05.13.18: защищена 30.11.2011: утв. 2.12.2011/Келлер Алевтина Викторовна. – Воронеж, 2011. – 203 с.

9. Голодов, В. А. Адаптация библиотеки «Exact Computational» для гетерогенных вычислительных сред / В. А. Голодов //Научный поиск [текст]: материалы четвертой научной конференции аспирантов и докторантов. Естественные науки.—Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012.

10. Канторович, Л. В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений/ Л. В. Канторович // Сибирский Математический Журнал. — 1962. — Т. 3, № 5. —С. 701–709.

11. L. T. Ashchepkov and D. V. Davydov, “Stabilization of an Observable Linear Control System with Constant Interval Coefficients,” Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat., No. 2(477), 11–17 (2002).

12. Шарый, С. П. Конечномерный интервальный анализ / С. П. Шарый. — Новосибирск, «XYZ», 2013. — С.285.

13. Rohn, J. Inner solutions of linear interval systems / J. Rohn // Interval Mathematics and Springer Verlag. —1985 and 1986. —P. 157–158.

14. Иванов, В. К. О линейных некорректных задачах / В. К. Иванов // Доклады Академии наук СССР. — 1962. — Т. 145.

15. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — Москва, Наука, 1979. — С. 285.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет»
(Национальный исследовательский университет)
Институт естественных и точных наук
Кафедра математического и компьютерного моделирования

УЧЁТ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В ПРОБЛЕМЕ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

ИСХОДНЫЙ КОД ПРОГРАММЫ
К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ
ЮУрГУ– 01.03.02.2019.006.ВКР

Руководитель работы,
профессор каф. МиКМ
д-р физ.-мат. наук
____________________/А.В. Панюков/
«____»______________2019 г.

Автор работы
Студент группы ЕТ-416
_________________/А.М. Первухин/
«____»______________2019 г.

Нормоконтролер,
доцент каф. МиКМ,
канд. физ.-мат. наук,
______________/Т.А. Макаровских/
«____»______________2019 г.

Челябинск 2019

```
#подключение модуля с генерацией случайных чисел
import random
constant = 10
#ввод начальных условий
n = int(input())
eps = float(input())
#генерация точечных значений матрицы
a = [[0] * (n + 3) for i in range(n)]
for i in range(n):
    for j in range(n + 1):
        a[i][j] = int(random.random() * 100) + constant
        a[i][n + 2] += a[i][j]
for i in range(n):
    a[i][n + 1] = a[i][n] + int(random.random() * 100)
#заполнение матрицы верхних и нижних границ
b = [[0] * (n + 3) for i in range(n)]
for i in range(n):
    b[i][n + 2] = a[i][n + 2]
    b[i][n + 1] = a[i][n + 1]
    for j in range(n + 1):
        b[i][j] = a[i][j] - eps
        b[i][n + 2] -= eps
c = [[0] * (n + 3) for i in range(n)]
for i in range(n):
    c[i][n + 2] = a[i][n + 2]
    c[i][n + 1] = a[i][n + 1]
    for j in range(n + 1):
        c[i][j] = a[i][j] + eps
        c[i][n + 2] += eps
#преобразование в матрицу Леонтьева
for i in range(n):
for j in range(n):
        b[i][j] /= -b[j][n + 2]
        c[i][j] /= -c[j][n + 2]
for i in range(n):
b[i][i] += 1
    c[i][i] += 1
#заполнение списков для модуля scipy
c1 = []
for i in range(n):
    c1.append(0)
c1.append(1)
```

```
a1 = []
b1 = []
for i in range(n):
    t = []
    for j in range(n):
        t.append(-b[i][j])
    t.append(-b[i][n + 1])
    a1.append(t)
    b1.append(-b[i][n + 1])
for i in range(n):
    t = []
    for j in range(n):
        t.append(c[i][j])
    t.append(-c[i][n + 1])
    a1.append(t)
    b1.append(b[i][n + 1])
#решение задачи линейного программирования методом linprog
from scipy.optimize import linprog
res=linprog(c1, A_ub=a1, b_ub=b1)
#вывод результата
print(res)
```