

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»
Институт естественных и точных наук
Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра прикладной математики и программирования
Направление подготовки: 01.03.04 Прикладная математика

РАБОТА ПРОВЕРЕНА

Рецензент, инженер-исследователь
УНИД ЮУрГУ

_____ А.С. Дегтярева-Кашутина
« ____ » _____ 2019 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой, д.ф.-м.н.,
доцент

_____ А.А. Замышляева
« ____ » _____ 2019 г.

Тепловое поле стержня с теплофизическими параметрами, зависящими
от температуры

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ
ЮУрГУ–01.03.04.2019.67.ПЗ ВКР

Руководитель работы, к.ф.-м.н.,
доцент кафедры ПМиП

_____ /А.В. Геренштейн
« ____ » _____ 2019 г.

Автор работы,
Студент группы ЕТ-413

_____ /Н.В. Булаев
« ____ » _____ 2019 г.

Нормоконтролер, доцент, к.т.н.

_____ /Т.Ю. Оленчикова
« ____ » _____ 2019 г.

Челябинск
2019

АННОТАЦИЯ

Булаев Н.В. Тепловое поле стержня с теплофизическими параметрами, зависящими от температуры. – Челябинск: ЮУрГУ (НИУ), ЕТ-413, 60 с., 35 ил., библиогр. список – 10 наим., 1 прил..

В работе рассмотрены методы решения второй краевой задачи для уравнения теплопроводности с теплофизическими параметрами, зависящими от температуры.

В первом разделе рассматриваются 2 метода решения квазилинейного уравнения теплопроводности в общем виде. Добавлен теоретический раздел с описания граничных условий и разностных схем.

Во втором разделе мы рассматриваем вывод разностной схемы и получение расчетных формул, после чего проверяем устойчивость полученной схемы для второй смешанной задачи. Получаем дифференциально-разностную схему для решения второй смешанной задачи теплопроводности.

В третьем разделе используется метод предиктор-корректор для повышения порядка точности разностной схемы. Получаем приближенное решение квазилинейного уравнения теплопроводности способ интегрирования на промежутках линейности непостоянных коэффициентов. Приводим задачу к безразмерному виду для получения более корректных результатов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	9
1 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ	11
1.1 Методы решения квазилинейного уравнения теплопроводности	
1.1.1 Метод бегущей волны	13
1.1.2 Метод предиктор-корректор для явной устойчивой схемы ..	14
1.2 Теоретический раздел.....	
1.2.1 Постановка краевых задач	19
1.2.2 Разностные схемы.....	20
2 ПОЛУЧЕНИЕ УСТОЙЧИВОЙ ЯВНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ВТОРОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ.....	
2.1 Вывод расчетной схемы и рабочих формул для задачи с постоянными коэффициентами	27
2.2 Устойчивость явной схемы для второй смешанной задачи с постоянными коэффициентами	30
2.3 Дифференциально-разностная схема для второй смешанной задачи теплопроводности с непостоянными коэффициентами.....	32
3 РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ	
3.1 Вывод рабочих формул для задачи с непостоянными коэффициентами.....	33
3.2 Повышение порядка точности разностной схемы методом предиктор-корректор	37

3.3 Приближенное решение квазилинейного уравнения теплопроводности способом интегрирования на промежутках линейности непостоянных коэффициентов.....	38
3.4 Приведение задачи к безразмерному виду.....	44
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	48
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	49

ВВЕДЕНИЕ

Одним из современных направлений математической физики считается изучение нелинейных математических моделей всевозможных физико-химических процессов и явлений. Появление таких моделей обосновано применениями в современной физике и технике влияний на вещество электрических полей высокой интенсивности, мощного лазерного когерентного излучения, пучков частиц высокой энергии, ударных волн большой интенсивности, мощных тепловых потоков. При описании различных процессов, линейные математические модели представляются всего лишь определенными приближениями. Ими можно воспользоваться только в том случае, когда изучаемые физические величины в исследуемом процессе изменяются в узком диапазоне значений.

Нелинейные модели позволяют нам увидеть процессы в более широком диапазоне изменения параметров. Нелинейности преобразуют качественную картину их протекания, а не только количественные характеристики процессов. В настоящее время не существует законченных теорий и общих методов решения задач нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, которые лежат в основе нелинейных моделей.

Фундаментом многих математических моделей являются нелинейные параболические уравнения второго порядка, которые используются в биологии и химии, физике и механике. К примеру, квазилинейное уравнение теплопроводности

$$\text{—} \tag{1}$$

при определенных критериях описывает процессы распространения выбросов отрицательной плавучести, химической кинетики и биологической активности, ионной и электронной теплопроводности в плазме, течения крови в мелких кровеносных сосудах, адиабатической фильтрации газов и

жидкостей в пористых средах, диффузии нейтронов и альфа-частиц в реакторных материалах.

Применение основных законов сохранения при математическом моделировании разнообразных физических процессов зачастую приводит к одним и тем же нелинейным уравнениям параболического типа. Особенно часто встречается квазилинейное уравнение теплопроводности (1) среди уравнений данного типа. Поэтому есть основания утверждать, что исследование краевых задач для нелинейного уравнения теплопроводности остается до настоящего времени актуальной темой изучения. Несмотря на бесчисленные работы по исследованию процессов нелинейной теплопроводности, до сих пор не получены точные решения целого ряда краевых задач, описываемых нелинейным уравнением теплопроводности. Поэтому численные методы решения таких задач представляют большой интерес.

В работе рассматривается квазилинейное одномерное уравнение теплопроводности (1) в отсутствие источников тепла в среде, что означает $F \equiv 0$, и в предположении, что теплоемкость и теплопроводность являются непрерывными функциями температуры:

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} . \quad (2)$$

1 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Решить большинство обыкновенных дифференциальных уравнений можно, используя лишь численные методы. Вообще всевозможных постановок задач крайне немного. Обычно это задача Коши, краевая задача для линейных и нелинейных уравнений. Существует очень малое количество теоретически исследованных и практически отработанных алгоритмов, которые позволяют часть задач, связанных с численным решением обыкновенных дифференциальных уравнений, решать крайне эффективно. В частности, ряд численных методов решения задачи Коши был разработан в прошлом веке.

В наше время, чтобы справиться с задачей Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, не нужно разрабатывать алгоритмы и методы её решения, достаточно просто обратиться к стандартной программе.

В уравнениях с частными производными число различных постановок задач гораздо выше. В курсе уравнений с частными производными обычно рассматривается незначительная часть таких постановок, главным образом связанных с линейными уравнениями с постоянными коэффициентами. При этом количество задач, решаемых в явном виде, существенно мало. Постановок в теории уравнений с частными производными так много, из-за окружающих нас явлений в мире.

Из-за большого количества различных постановок задач, связанных с решением уравнений в частных производных, теории численных методов в этом направлении стали дробиться на большое число направлений. Сильно расширило возможности в исследовании подобных задач, применение ЭВМ в численных методах. К примеру, за последние пятьдесят лет были разработаны алгоритмы, дающие возможность решать большинство краевых задач одно- и многомерных уравнений параболического типа с переменными

коэффициентами, в частности с коэффициентами, нелинейно зависящими от решения, с приемлемой затратой машинного времени.

Безусловно в этом случае дело с обоснованием сходимости численных методов и оценкой погрешности обстоит иначе, чем в обыкновенных дифференциальных уравнениях. Для широких классов типовых задач такие исследования проведены. Тем не менее, для большинства математиков часто остается неясным факт существования решения во многих важных классах прикладных задач.

В настоящее время, при таком состоянии вопроса, о существовании решения трудно ожидать получения строгих оценок погрешности и теорем сходимости сеточных методов при достаточно общих гипотезах. Тем не менее, математики создают численные методы решения и для таких задач пользуясь полуэмпирическими соображениями, аналогиями по сравнению со случаем линейных уравнений и численными экспериментами на задачах с известным точным решением. Наравне с экспериментом оказывают существенное влияние на развитие соответствующих разделов теории уравнений с частными производными результаты и анализ численных расчетов.

Математикам, занимающимся решением подобных прикладных задач, невзирая на отсутствие жестких обоснований чисто математической (в частности, алгоритмической) стороны вопроса, часто приходится брать на себя ответственность за достоверность получаемых численных результатов, включая правильность математической постановки задачи.

Конечно, все сказанное не умаляет роли чисто теоретических исследований. Но очень важно для выбора алгоритма их результаты, в частности теоремы существования. Они дают уверенность в правильности постановки, подсказывают информацию о качественных свойствах решения. Проводить проверку точности предлагаемых методов помогает наличие популярных частных решений. К примеру, в задачах газовой динамики. Чтобы облегчить численное решение более сложных задач, можно применить известные частные решения простейших задач.

1.1 Методы решения квазилинейного уравнения теплопроводности

Наиболее общее квазилинейное уравнение теплопроводности, как отмечалось ранее, имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{q}) = F, \quad (1.1)$$

где c – теплоемкость единицы объема, q – коэффициент теплопроводности, F – функция плотности тепловых источников.

1.1.1 Метод бегущей волны

В [1] рассмотрено одномерное уравнение (1.1), в котором коэффициент теплопроводности зависит от температуры по степенному закону

$$q = q_0 \exp(\alpha T) \quad (1.2)$$

Решение уравнения (1.2) предлагается искать в виде бегущей волны

При подстановке такого решения уравнение (1.2) преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-v \frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx} \left(q_0 \exp(\alpha T) \frac{dT}{dx} \right) = F(T) \quad (1.3)$$

Однократное интегрирование этого уравнения дает соотношение

$$-vT + \frac{q_0}{\alpha} \exp(\alpha T) \frac{dT}{dx} = \int F(T) dx + C \quad (1.3)$$

Если функция $F(T)$ обращается в нуль хотя бы в одной точке T_0 , то константа в правой части (1.3) равна нулю и соотношение (1.3) нетрудно проинтегрировать еще раз:

$$-vT + \frac{q_0}{\alpha} \exp(\alpha T) \frac{dT}{dx} = 0$$

При $\frac{dT}{dx} = 0$ полагается равным нулю, что удовлетворяет уравнению (1.2). Таким образом, автомодельное решение уравнения (1.2) выглядит следующим образом:

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad (1.4)$$

Чтобы это решение могло существовать, начальные и граничные условия должны быть с ним согласованы. Например, если уравнение (1.2) рассматривается при $t > 0$ на полуоси $x \geq x_0$, то следует задать условия

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad (1.5)$$

Автомодельные решения иногда удается найти для квазилинейных уравнений или систем уравнений, коэффициенты которых зависят от переменных x , t и решения u по степенным законам.[1] Для построения решения надо «угадать» подходящую комбинацию независимых переменных и описанным выше приемом свести уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению. Найти решение численным интегрированием проще, чем решить исходное уравнение в частных производных, ведь выразить разрешение этого уравнения через элементарные функции, подобно (1.4), удастся далеко не всегда.

Если автомодельные решения дают отдельные режимы протекания этого процесса и позволяют исследовать многие его особенности (см., например, [3]), то уравнение в частных производных описывает сложный физический процесс.

1.1.2 Метод предиктор-корректор для явной устойчивой схемы

Другой подход к решению квазилинейных уравнений состоит в применении чисто неявных разностных схем. В [1] и [2] рассматривается первая смешанная задача для простейшего квазилинейного уравнения теплопроводности

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad (1.6)$$

где \dots . Для его решения предлагается использовать два варианта схем:

$$\dots - \dots - \dots \quad (1.7)$$

и

$$\dots - \dots - \dots, \quad (1.8)$$

где

$$\dots$$

Обе схемы абсолютно устойчивы, имеют погрешность аппроксимации (доказательство см. в [4]).

Схема (1.7) линейна относительно значения функции на слое \dots , и значения функции находятся по значениям функции на слое \dots , например, методом прогонки (матрица линейной системы относительно значений \dots получается трехдиагональной с преобладанием главной диагонали). Поскольку схема абсолютно устойчива, шаг \dots выбирается только из соображений точности.

Схема (1.8) нелинейна относительно функции \dots и для ее решения используется метод итераций. Итерационный процесс строится следующим образом:

$$\dots - \dots - \dots \quad (1.9)$$

Относительно $\mathcal{E}^{(s+1)}$ разностная схема оказывается линейной. В качестве начальной итерации берется функция y предыдущего шага по времени: $\mathcal{E}^{(0)} = y^j$. Итерационный процесс для большинства встречающихся на практике коэффициентов q и f сходится. При счете по итерационной схеме (1.8), (1.9) задают либо число итераций, либо точность сходимости итераций \mathcal{E} и требуют выполнения условия \dots .

Пример расходимости итерационного процесса для схемы (1.8) приведен в [5]. То есть фактически схема (1.8) не является абсолютно устойчивой. Однако в [5] отмечено, что даже в случае расходимости итераций полезно сделать две итерации для повышения точности схемы. Заметим, что при одной итерации (1.9) схема (1.8) совпадает с линейным вариантом (1.7).

Сложней, но эффективней метода последовательных приближений второй способ решения схемы (1.8) – метод Ньютона ([1]). С учетом того, что,

, после подставки в уравнения (1.8)

и линеаризации получаются довольно громоздкие уравнения, линейные и трехточечные относительно :

$$\begin{aligned}
 & \text{---} \\
 & \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\
 & + \quad \text{---} \quad \text{---} \\
 & ,
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

где --- . На каждой итерации уравнения (1.10) решают прогонкой. Доказано, что вблизи корня сходимость итерационного метода квадратичная.

Достоинство рассмотренных методов решения квазилинейного уравнения теплопроводности с применением неявных схем состоит в их абсолютной устойчивости, что позволяет выбирать шаг по времени, исходя только из соображений точности решения и времени его поиска, а решение линейных систем с трехдиагональными матрицами прогонкой сегодня даже не требует реализации алгоритма прогонки, т.к. он уже реализован во многих математических пакетах. Однако такие хорошие в одномерном случае схемы

с трудом обобщаются на многомерный случай (см., например, продольно-поперечную и локально-одномерную схемы в [1]).

Этого недостатка лишены явные схемы. Более того, при переходе в пространство большей размерности вид рабочей формулы для расчета остается тем же.

Постановка задачи

Целью данной выпускной квалификационной работы является: построение безусловно устойчивой явной схемы для решения квазилинейного одномерного уравнения теплопроводности.

В рамках выполнения данной выпускной квалификационной работы необходимо:

1. Построить явную устойчивую схему для численного решения следующей второй смешанной задачи для квазилинейного уравнения теплопроводности[5]

$$\begin{aligned} & \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ & \quad \quad \quad \text{---} \\ & \quad \quad \quad \text{---} \end{aligned} \tag{1.11}$$

где θ – неизвестная функция (температура стержня), подлежащая отысканию;

– длина стержня;

– конечный момент времени;

– известная объемная теплоемкость материала стержня;

– известный коэффициент теплопроводности;

– известная непрерывная функция, задающая начальное распределение температуры стержня;

– мощность потока тепла на левом конце стержня;

– мощность потока тепла на правом конце стержня.

Величины ρ , μ считаются постоянными, а функции ρ и μ – непрерывными функциями температуры, заданными на конечных множествах значений температуры.

Числовые значения всех величин предполагаются заданными в системе единиц СИ.

Построение схемы предполагает решение следующих задач:

- упрощение вида исходного уравнения с учетом того, что коэффициент ρ явно зависит только от температуры;

- выбор сетки разбиения для множества, на котором определена функция ρ ;

- выбор разделенных разностей для аппроксимации частных производных, входящих в уравнение, получение разностного уравнения;

- сведение разностного уравнения к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно значения температуры на следующем временном слое;

- выбор способа задания нелинейных краевых условий, входящих в постановку задачи;

- приведение задачи к безразмерному виду;

- возможное использование схемы предиктор-корректор для повышения точности схемы.

2. Исследовать свойства полученной схемы (порядок аппроксимации, устойчивость).

3. Разработать программу на языке программирования C++ для численного решения поставленной задачи (1.11) с применением полученной схемы, линейного и нелинейного (с использованием метода итераций) вариантов чисто неявной схемы.

4. Провести сравнение решений задачи, полученных при использовании указанных выше схем.

5. Сделать заключение о возможностях практического применения построенной явной схемы для решения квазилинейного уравнения теплопроводности.

1.2 Теоретический раздел

1.2.1 Постановка краевых задач

Чтобы найти единственное решение уравнения теплопроводности следует к уравнению добавить начальные и граничные условия.

Первое что нужно сделать, это задать значения функции $u(x, 0)$ в начальный момент $t = 0$, это будет начальным условием.

В зависимости от температурного режима на границах, будут различаться и граничные условия. Рассматривают три основных типа граничных условий, которые представлены в пособии Тихонова А.Н., Самарского А.А.[6]:

1. На конце стержня $x = 0$ задана температура

где $\mu(t)$ – функция, заданная в некотором промежутке $t \in [0, \infty)$, причем есть промежутки времени, в течение которого изучается процесс.

2. На конце $x = 0$ задано значение производной

К этому условию приходят, если задана величина теплового потока q , протекающего через торцевое сечение стержня,

откуда $q = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x}$, где λ – известная функция, выражающаяся через заданный поток q по формуле

1.2.2 Разностные схемы

Задачи математической физики помимо дифференциального уравнения включают краевые и начальные условия, которые обеспечивают выделение единственного решения из всей совокупности возможных решений. Совокупность разностных уравнений, аппроксимирующих основное дифференциальное уравнение и краевые и начальные условия, называют разностной схемой.[7]

Сходимость и точность разностных схем.

При решении некоторой задачи приближенным методом в конечном счете надо иметь предварительное суждение о том, с какой точностью можно приблизить при помощи этого метода точное решение задачи.[7]

Пусть в области G с границей V требуется найти решение линейного дифференциального уравнения

$$\Delta u = f, \quad (1.12)$$

удовлетворяющее дополнительным (краевым или начальным) условиям

$$u|_V = \varphi, \quad (1.13)$$

где f и φ – заданные функции (входные данные задачи), Δ – некоторый линейный дифференциальный оператор. Предположим, что решение задачи (1.12)–(1.13) существует и единственно.

Область непрерывного изменения аргумента заменяется дискретным множеством точек (узлов) – сеткой.

Пусть h – векторный параметр, характеризующий плотность распределения узлов, Ω – множество внутренних узлов сетки, Γ – множество граничных узлов. Задаче (1.12)–(1.13) поставим в соответствие разностную задачу

$$L_h u_h = f_h, \quad (1.14)$$

где u_h и f_h – известные сеточные функции. Здесь L_h и L – линейные операторы, действующие на сеточные функции, заданные для

. Решение задачи (1.14) есть сеточная функция, определяемая в узлах

сетки Ω_h . Меняя h , то есть выбирая различные сетки Ω_h , получаем множество решений $\{y_h\}$, зависящих от параметра h . Таким образом, следует рассматривать семейство схем (3.3), соответствующих различным значениям параметра h .

Основной целью всякого приближенного метода является получение решения исходной (непрерывной) задачи с заданной точностью за конечное число действий. Чтобы выяснить принципиальную возможность приближения решения u задачи (1.12)–(1.13) решением u_h задачи (1.14) с любой заданной точностью ϵ в зависимости от выбора шага h , нужно иметь возможность сравнить u и u_h .

Это сравнение будем проводить в пространстве сеточных функций. Пусть P_h – проекция $L^2(\Omega)$ на сетке Ω_h , так что $P_h u = u_h$.

Рассмотрим погрешность разностной схемы (1.14):

Подставив u_h в (1.14), получим для u_h задачу того же типа, что и (1.14):

$$L_h u_h = f_h, \quad (1.15)$$

где

τ_h называют погрешностью аппроксимации для схемы на решении уравнения (1.12), а ν_h – погрешностью аппроксимации для условия на решении задачи (1.12)–(1.13).

Для оценки погрешности схемы z_h и погрешности аппроксимации τ_h и ν_h введем на множестве сеточных функций нормы соответственно.

Будем говорить, что решение разностной задачи (1.14) сходится к решению задачи (1.12)–(1.13) (схема (1.14) сходится), если

Разностная схема (1.14) сходится со скоростью $\mathcal{O}(\tau^p)$ или имеет p -й порядок точности, $p \geq 1$, если

Говорят, что разностная схема (1.14) аппроксимирует задачу (1.12)–(1.13), если

Разностная схема (1.14) обладает p -м порядком аппроксимации, если

Понятие корректности разностной задачи:

Применительно к задачам математической физики принято говорить, что задача поставлена корректно, если выполнены два условия[7]:

- 1) решение задачи существует и единственно при любых входных данных из некоторого класса,
- 2) решение задачи непрерывно зависит от входных данных.

Аналогично определяют понятие корректности разностной задачи. Пусть U – решение, а $\{U_n\}$ – входные данные некоторой разностной задачи. Они зависят от параметра τ . Изменяя τ , получим последовательности решений $\{U_n\}$ и входных данных $\{U_n\}$. Понятие корректности вводится для семейства разностных задач (схем) при $\tau \rightarrow 0$.

Говорят, что разностная задача (схема) корректна, если для всех таких, что $\tau \rightarrow 0$:

- 1) решение U_n существует и единственно для всех входных данных $\{U_n\}$ из некоторого семейства,
- 2) решение U_n непрерывно зависит от входных данных $\{U_n\}$, причем эта зависимость равномерна относительно τ .

Второе условие означает, что

$$(1.16)$$

где U_n – решение задачи с входными данными $\{U_n\}$.

Свойство непрерывной зависимости решения разностной задачи от входных данных, выраженное условием (1.16), называется устойчивостью схемы по входным данным или просто устойчивостью.

Пусть дана непрерывная задача (1.12)–(1.13). И пусть ее аппроксимирует разностная задача (1.14). Кроме того, задача для погрешности имеет вид (1.15). Вместо (1.15) напишем формально

Если оператор A линеен и разностная схема корректна, то, в силу (1.16), будем иметь

$$\|e_n\| \leq C \|e_0\| \quad (1.17)$$

Если, кроме того, разностная задача (1.14) обладает n -м порядком аппроксимации, то, в силу (1.17), будем иметь

где константа

Таким образом, если схема устойчива и аппроксимирует исходную задачу, то она сходится, причем скорость сходимости равна ее порядку аппроксимации.

Устойчивость явной и неявной разностных схем для линейного уравнения теплопроводности:

Рассмотрим первую смешанную задачу линейной теплопроводности с однородными краевыми условиями:

$$\begin{cases} u_t - a u_{xx} = f(x, t) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

Задача с неоднородными краевыми условиями

$$\begin{cases} u_t - a u_{xx} = f(x, t) \\ u(0, t) = \varphi_0(t) \\ u(1, t) = \varphi_1(t) \end{cases}$$

может быть сведена к задаче с однородными краевыми условиями с помощью замены

$$u(x, y, z) = v(x, y, z) + w(x, y, z),$$

где $v(x, y, z)$ – новая неизвестная функция.

На плоскости $z = 0$ введем сетку

$$x = x_j, \quad y = y_k, \quad z = z_l, \quad (1.19)$$

Аппроксимируем задачу (1.13) разностной схемой

$$\frac{u_{j+1,k,l} - u_{j-1,k,l}}{2\Delta x} + \frac{u_{j,k,l+1} - u_{j,k,l-1}}{2\Delta y} + \frac{u_{j,k,l} - u_{j,k,l-1}}{\Delta z} = f_{j,k,l}, \quad (1.20)$$

Проинтегрируем каждое из уравнений в (1.20) по времени на промежутке $[t_n, t_{n+1}]$:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\frac{u_{j+1,k,l} - u_{j-1,k,l}}{2\Delta x} + \frac{u_{j,k,l+1} - u_{j,k,l-1}}{2\Delta y} + \frac{u_{j,k,l} - u_{j,k,l-1}}{\Delta z} - f_{j,k,l} \right) dt = 0.$$

Поделив обе части на Δt , получим:

$$\frac{u_{j+1,k,l} - u_{j-1,k,l}}{2\Delta x} + \frac{u_{j,k,l+1} - u_{j,k,l-1}}{2\Delta y} + \frac{u_{j,k,l} - u_{j,k,l-1}}{\Delta z} - f_{j,k,l} = 0, \quad (1.21)$$

где $u_{j,k,l} = u(x_j, y_k, z_l, t_n)$ – значения функции в узлах сетки.

Различные разностные схемы будем получать на основе тех или иных аппроксимаций в (1.16):

$$\frac{u_{j+1,k,l} - u_{j-1,k,l}}{2\Delta x} + \frac{u_{j,k,l+1} - u_{j,k,l-1}}{2\Delta y} + \frac{u_{j,k,l} - u_{j,k,l-1}}{\Delta z} = f_{j,k,l}.$$

Приходим к разностным схемам:

– явной схеме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (1.22)$$

– неявной схеме

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} = \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h_y^2} + f_{i,j}^n \quad (1.23)$$

Не нарушая общности, будем считать, что длина стержня l . Разложим решение разностной схемы по системе функций $\sin \frac{\pi m x}{l} \sin \frac{\pi n y}{l}$. Эти функции удовлетворяют нулевым граничным условиям:

$$u(0, y) = u(l, y) = u(x, 0) = u(x, l) = 0.$$

где

$$u_{i,j}^n = \sum_{m,n} A_{m,n} \sin \frac{\pi m x}{l} \sin \frac{\pi n y}{l} e^{-\lambda_{m,n}^2 \tau} + \sum_{m,n} B_{m,n} \sin \frac{\pi m x}{l} \sin \frac{\pi n y}{l} e^{\lambda_{m,n}^2 \tau} + \sum_{m,n} C_{m,n} \sin \frac{\pi m x}{l} \sin \frac{\pi n y}{l} e^{-\lambda_{m,n}^2 \tau} + \sum_{m,n} D_{m,n} \sin \frac{\pi m x}{l} \sin \frac{\pi n y}{l} e^{\lambda_{m,n}^2 \tau}.$$

Из (1.22) получаем:

$$-\lambda_{m,n}^2 A_{m,n} e^{-\lambda_{m,n}^2 \tau} + \lambda_{m,n}^2 B_{m,n} e^{\lambda_{m,n}^2 \tau} - \lambda_{m,n}^2 C_{m,n} e^{-\lambda_{m,n}^2 \tau} + \lambda_{m,n}^2 D_{m,n} e^{\lambda_{m,n}^2 \tau} = f_{m,n}.$$

Воспользовавшись тем, что $\lambda_{m,n}^2 = \frac{\pi^2 m^2}{l^2} + \frac{\pi^2 n^2}{l^2}$, имеем:

$$-\lambda_{m,n}^2 A_{m,n} + \lambda_{m,n}^2 B_{m,n} - \lambda_{m,n}^2 C_{m,n} + \lambda_{m,n}^2 D_{m,n} = f_{m,n}.$$

или

$$-A_{m,n} + B_{m,n} - C_{m,n} + D_{m,n} = \frac{f_{m,n}}{\lambda_{m,n}^2}.$$

Пришли к рекуррентному соотношению

Отсюда условие устойчивости для явной схемы (1.22) запишется в виде

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}.$$

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2},$$

обозначим для удобства $\mu = \frac{\tau}{h^2}$. Тогда

левое неравенство верное, а из правого получим

$$\mu \leq \frac{1}{2}.$$

так как $\mu = \frac{\tau}{h^2}$ то $\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$. Поэтому условие

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2} \tag{1.24}$$

является достаточным условием устойчивости.

Аналогичными рассуждениями из (1.23) получаем рекуррентное соотношение для коэффициентов Y_n^j

$$\frac{Y_n^j}{h^2} = \frac{Y_{n-1}^j}{h^2} + \dots$$

Условие устойчивости для неявной схемы (1.18) запишется в виде

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2},$$

это неравенство верно для всех n и для любых μ и ν . Следовательно, неявная схема для уравнения теплопроводности безусловно (абсолютно) устойчива.

2 ПОЛУЧЕНИЕ УСТОЙЧИВОЙ ЯВНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ВТОРОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ

2.1 Вывод расчетной схемы и рабочих формул для задачи с постоянными коэффициентами

Рассмотрим следующую вторую смешанную задачу для одномерного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\
 & T(0, t) = T_0 \\
 & T(L, t) = T_1 \\
 & T(x, 0) = T_2(x)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где Q_1 – мощность потока тепла на левом конце стержня, Q_2 – мощность потока тепла на правом конце стержня.

На плоскости (x, t) введем равномерную сетку

–

где Δx – шаг по переменной x , Δt – шаг по переменной t .

Через $T_{i,j}$ обозначим значения функции T при $x = x_i$ (на оси x) в точках x_i , через $T_{i,j}^n$ – значения функции T в момент времени $t = t_j$ в тех же точках (см. Рис. 3.2).

$$\dots \quad (2.5)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде \dots . Тогда получим

$$\dots$$

Интегрируя левую и правую части от 0 до t , получим

$$\dots$$

Окончательно, решением уравнения (2.5) является следующая функция

$$\dots \quad (2.6)$$

Полученная формула для определения значений \bar{u}_i на следующем временном слое справедлива для узлов с номерами \dots . Для остальных узлов необходимо учесть краевые условия задачи (2.1). На левой границе должно выполняться условия

$$\dots, \quad (2.7)$$

$$\dots, \quad (2.8)$$

Заведем фиктивные узлы с номерами 0 и \dots (рисунок 3.3) и подберем температуры \dots и \dots в этих узлах, чтобы обеспечить выполнение условий (2.7)–(2.8).

Температура в точке $x = 0$ принимается равной полу-сумме температур \dots и \dots . Разностная аппроксимация условия (2.7) имеет вид

$$\dots, \quad (2.9)$$

где \dots – соответственно коэффициент теплоотдачи, температура внешней среды и мощность потока тепла на левом конце стержня

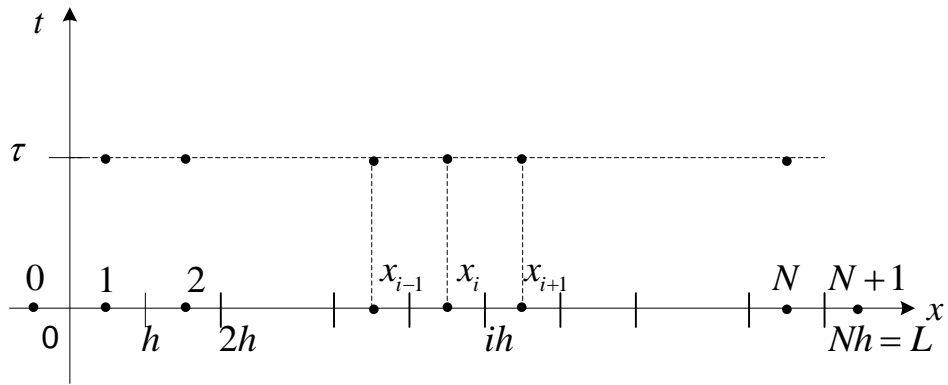


Рисунок 3.3 - Расчетная схема с фиктивными узлами

Выразим из выражения (2.9) температуру

$$u_i = \frac{1}{2} (u_{i-1} + u_{i+1}) + \frac{\tau}{h^2} (q_{i-1/2} - q_{i+1/2}), \quad (2.10)$$

Аналогично находится температура u_{N+1}

$$u_{N+1} = \frac{1}{2} (u_N + u_{N+2}) + \frac{\tau}{h^2} (q_{N+1/2} - q_{N+3/2}), \quad (2.11)$$

где α – соответственно коэффициент теплоотдачи, температура внешней среды и мощность потока тепла на правом конце стержня.

Теперь формула (2.6) справедлива для узлов с номерами $1, \dots, N$.

Итак, в начальный момент времени заданы значения $u_0, u_1, \dots, u_N, u_{N+1}$. Это либо начальные значения, либо значения, вычисленные в предыдущей итерации. По формулам (2.10) и (2.11) вычисляются значения u_{i-1} и u_{i+1} . Наконец, по формуле (2.6) вычисляются значения u_i , которые служат начальными значениями для следующей итерации по времени.

2.2 Устойчивость явной схемы для второй смешанной задачи с постоянными коэффициентами

Докажем сперва устойчивость предложенной схемы для внутренних узлов, т. е. узлов с номерами $1, \dots, N$. Пусть решение уравнения (2.5) имеет вид

где u_i^n – точное решение задачи (2.1) на i -м узле и соответствующем слое по времени. Стало быть, τ_i^n есть допущенная ошибка. Она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\tau_i^n = \frac{\tau_{i-1}^{n-1} + \tau_{i+1}^{n-1} + \tau_i^{n-1}}{3} + \tau_i^n \tau_i^n.$$

Его решение

$$\tau_i^n = \frac{\tau_{i-1}^{n-1} + \tau_{i+1}^{n-1} + \tau_i^{n-1}}{3} + \tau_i^n \tau_i^n$$

и, следовательно, для узлов сетки с номерами $i = 2, \dots, N - 1$ выполняется

$$\tau_i^n \leq \frac{\tau_{i-1}^{n-1} + \tau_{i+1}^{n-1} + \tau_i^{n-1}}{3} + \tau_i^n \tau_i^n,$$

что и означает устойчивость схемы во внутренних узлах.

Рассмотрим узел с номером 1. Пусть в u_1^n допущена ошибка τ_1^n , т. е.

$$\tau_1^n = u_1^n - u_1^n.$$

Тогда в соответствии с формулой (2.10)

$$\tau_1^n = \frac{\tau_2^{n-1} + \tau_1^{n-1} + \tau_2^{n-1}}{3} + \tau_1^n \tau_1^n.$$

Обозначим $\tau_1^n = \tau_1^n$. Тогда

$$\tau_1^n = \frac{\tau_2^{n-1} + \tau_1^{n-1} + \tau_2^{n-1}}{3} + \tau_1^n \tau_1^n.$$

и в силу того, что $\tau_1^n \leq \tau_1^n$

$$\tau_1^n \leq \frac{\tau_2^{n-1} + \tau_1^{n-1} + \tau_2^{n-1}}{3} + \tau_1^n \tau_1^n.$$

Аналогично для случая $i = N$ доказывается, что

$$\tau_N^n \leq \tau_N^n.$$

Окончательно, имеем

2.3 Дифференциально-разностная схема для второй смешанной задачи теплопроводности с непостоянными коэффициентами.

В соответствии с формулой (3.5) уравнение одномерной теплопроводности с непостоянными коэффициентами записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad} u) + q(u). \quad (2.12)$$

Будем считать удельную теплоемкость единицы объема c и коэффициент теплопроводности λ функциями температуры, т. е. $c = c(u)$ и $\lambda = \lambda(u)$.

Краевые условия на концах стержня выглядят так

$$- \lambda \text{grad} u = q_1 \quad \text{при } x = 0, \quad (2.13)$$

$$\lambda \text{grad} u = q_2 \quad \text{при } x = l, \quad (2.14)$$

где q_1 и q_2 – мощность теплоисточника соответственно на левом и правом конце стержня.

Кроме того, задано распределение температуры на стержне в начальный момент времени $t = 0$:

$$u = u_0(x) \quad \text{при } t = 0. \quad (2.15)$$

Записывая вместе уравнение (2.12), краевые условия (2.13), (2.14) и начальное условие (2.15), получим постановку второй смешанной задачи одномерной теплопроводности с непостоянными коэффициентами, являющимися функциями температуры:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad} u) + q(u) \\ & - \lambda \text{grad} u = q_1 \quad \text{при } x = 0, \\ & \lambda \text{grad} u = q_2 \quad \text{при } x = l, \\ & u = u_0(x) \quad \text{при } t = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

3 РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

3.1 Вывод рабочих формул для задачи с непостоянными коэффициентами

Введем в рассмотрение функцию $u(x, y, z)$. Частная производная u_x — равна

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x},$$

с учетом этого частная производная u_{xx} — равна

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Следовательно, для функции u получаем уравнение

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \dots = 0, \tag{3.1}$$

где u_{xx} —

Для расчета значений функции u можно воспользоваться разностной схемой (2.6), описанной в предыдущем пункте. Вводя аналогичные обозначения, что и в предыдущем пункте, расчетная формула для значений функции u во внутренних узлах сетки запишется в виде

$$u_{i,j,k} = \frac{1}{6} (u_{i+1,j,k} + u_{i-1,j,k} + u_{i,j+1,k} + u_{i,j-1,k} + u_{i,j,k+1} + u_{i,j,k-1}). \tag{3.2}$$

Заведем фиктивные узлы с номерами 0 и $N+1$ (см. рис. 4.2) и подберем значения u_0 и u_{N+1} в этих узлах, чтобы обеспечить выполнение условий (2.13)–(2.14).

Перепишем краевое условие (2.13) в виде

$$u_0 = \dots$$

Обозначим через $\varphi(x)$ функцию, обратную к функции $f(x)$. В силу монотонности последней такая функция существует. Тогда можно записать в виде

и

$$f(\varphi(x)) = x.$$

Аппроксимируя $\varphi(x)$ разделенной разностью $\frac{\varphi(x) - \varphi(x-h)}{x - (x-h)}$, а значение $\varphi(x)$ – полусуммой $\frac{\varphi(x) + \varphi(x-h)}{2}$, получим соотношение

$$\frac{\varphi(x) + \varphi(x-h)}{2} = \frac{\varphi(x) - \varphi(x-h)}{h}.$$

Преобразуем левую часть этого соотношения:

$$\frac{\varphi(x) + \varphi(x-h)}{2} = \frac{\varphi(x) - \varphi(x-h)}{h} \Rightarrow \frac{\varphi(x) + \varphi(x-h)}{2} = \frac{\varphi(x) - \varphi(x-h)}{h}.$$

Отсюда получим, что краевое условие (2.13) запишется в виде

$$\frac{\varphi(x) + \varphi(x-h)}{2} = \frac{\varphi(x) - \varphi(x-h)}{h}.$$

Обозначив $\varphi(x) = u(x)$, получим уравнение относительно

$$u(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} \quad (3.3)$$

Уравнение для правого конца можно получить, заменив в предыдущих выкладках x на $x+h$, $x-h$ на x и нижний индекс $-h$ на нижний индекс 0 . Таким образом для выполнения краевого условия (2.14) требуется решить уравнение

$$u(x+h) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \quad (3.4)$$

где $u(x) = \varphi(x)$.

Пусть $u(x)$ – решение уравнения (3.3). Тогда искомое значение $u(x)$ на фиктивном слое с номером 0 будет равно

$$u(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h}. \quad (3.5)$$

Аналогично, если u – решение уравнения (3.4), то значение $f(u)$ на фиктивном слое с номером k равно $f(u)$.

$$(3.6)$$

Учитывая совпадение уравнений (3.3) и (3.4) с точностью до обозначений, далее будем рассматривать только первое из них.

Способ решения уравнения (3.3) зависит от способа задания функций $f(u)$ и $g(u)$. Будем считать, что функции $f(u)$ и $g(u)$ заданы таблично в некотором конечном числе точек оси температур. Назовем эти точки отмеченными. Для задания каждой из функций между ее двумя соседними отмеченными точками будем использовать линейную аппроксимацию. Так что функции $f(u)$ и $g(u)$ являются кусочно-линейными. Кроме того, можно считать, что множества отмеченных точек функций совпадают. В противном случае эти множества можно просто объединить, а значения функций в новых отмеченных точках рассчитать по формуле

$$g(u_k) = \frac{g(u_{k+1}) - g(u_{k-1}))}{u_{k+1} - u_{k-1}} (u - u_{k-1}) + g(u_{k-1}),$$

где u_{k-1} – ближайшая слева к точке u отмеченная точка функции $g(u)$.

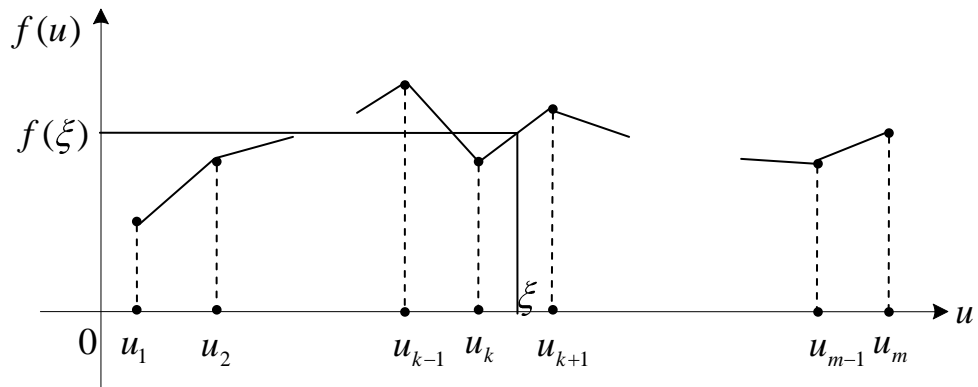


Рисунок 3.4 – Кусочно-линейная аппроксимация функции

Вернемся к уравнению (3.3). Перепишем его, опустив индексы :

$$- \frac{d}{du} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{df}{du} \right) = \sigma f(u) - g(u). \quad (3.7)$$

Под $\varphi_{i,j}$ будем понимать $\varphi_{i,j}^n$, если речь идет о граничном условии на левом конце, или $\varphi_{i,j}^n$, если рассматривается граничное условие на правом конце. Считаем, что функция $\varphi_{i,j}$ задана в множестве чисел \mathbb{Z} .

Рассмотрим промежуток $[i, i+1]$, $[j, j+1]$. На этом промежутке в силу линейности функции $\varphi_{i,j}$ функция $\varphi_{i,j}$ является квадратичной.

Действительно,

$$\varphi_{i,j}(x) = \frac{1}{2} \frac{\varphi_{i,j}(i+1) - \varphi_{i,j}(i)}{x - i} (x - i) + \varphi_{i,j}(i) + \frac{1}{2} \frac{\varphi_{i,j}(i+1) + \varphi_{i,j}(i)}{x - i} (x - i)^2.$$

Таким образом, уравнение (3.7) на каждом промежутке $[i, i+1]$, $[j, j+1]$, является квадратным. Его можно записать в виде

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (3.8)$$

где

$$a = \frac{1}{2} (\varphi_{i,j}(i+1) + \varphi_{i,j}(i)), \quad (3.9)$$

$$b = \frac{1}{2} (\varphi_{i,j}(i+1) - \varphi_{i,j}(i)), \quad (3.10)$$

$$c = \varphi_{i,j}(i) - \frac{1}{2} (\varphi_{i,j}(i+1) + \varphi_{i,j}(i)) i. \quad (3.11)$$

Определив значения функции $\varphi_{i,j}$ на фиктивных слоях, формула (3.2)

$$\varphi_{i,j}(x) = \frac{1}{2} \frac{\varphi_{i,j}(i+1) - \varphi_{i,j}(i)}{x - i} (x - i) + \varphi_{i,j}(i) + \frac{1}{2} \frac{\varphi_{i,j}(i+1) + \varphi_{i,j}(i)}{x - i} (x - i)^2,$$

становится справедливой для узлов сетки с номерами $i, i+1, j, j+1$. Но для ее применения необходимо уметь по значению $\varphi_{i,j}$ в узле (i, j) определять температуру $\varphi_{i,j}$ в этом же узле для вычисления значения $\varphi_{i,j}$. То есть по данному значению $\varphi_{i,j}$ необходимо найти температуру $\varphi_{i,j}$ такую, что

. В силу монотонности функции эту задачу можно решить методом деления отрезка пополам (дихотомии) с заданной точностью.

3.2 Повышение порядка точности разностной схемы методом предиктор-корректор

В соответствии с теоремой Лакса (основной теоремой сходимости разностных схем) для повышения порядка точности, вообще говоря, нужно повышать порядок аппроксимации разностной схемы.

Для повышения порядка аппроксимации используемой схемы применяется метод предиктор-корректор. Суть этого метода заключается в том, что в момент времени решение в следующий момент времени ищется в два шага: сначала по схеме первого порядка аппроксимации и со значительным запасом устойчивости находится решение в момент времени — — предиктор, после чего на втором этапе исходное уравнение расписывается по схеме более высокого порядка аппроксимации (чаще всего, второго) — корректор.

В соответствии с (3.2) расчетная формула для решения задачи

$$\begin{aligned}
 & \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\
 & \quad \quad \text{---} \\
 & \quad \quad \text{---}
 \end{aligned}$$

такова:

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---}$$

Решение по схеме предиктор-корректор строится следующим образом (см. Рис. 3.5):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) = \dots, \quad (3.15)$$

при условии расчета значений функции ρ в фиктивных слоях по формулам (3.5) и (3.6) верную для узлов с номерами n . Проведем преобразования уравнения (3.15), учитывая, что $\rho = \rho(t)$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) = \dots. \quad (3.16)$$

Перейдем в (3.16) к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) = \dots.$$

Обозначив $\rho = \rho(t)$, запишем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) = \dots. \quad (3.17)$$

Теперь (3.17) перепишем в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) = \dots, \quad (3.18)$$

где $\rho = \rho(t)$.

Значение ρ в начальный момент времени может быть равно, меньше или больше ρ_0 . Если $\rho < \rho_0$, то из (3.17) следует, что ρ увеличивается.

Докажем, что если $\rho > \rho_0$ ($\rho < \rho_0$), то ρ – возрастающая (убывающая) функция на промежутке $(0, \tau)$, и

Рассмотрим случай $\rho > \rho_0$. Запишем уравнение (3.17) в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) = \dots.$$

При $\rho = \rho_0$ имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dt} \right) = \dots.$$

Следовательно, в силу непрерывности производной —

ρ и ρ_0 – возрастающая функция на

$(0, \tau)$. Теперь рассмотрим промежуток времени (τ, ∞) . При $\rho = \rho_0$ имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dt} \right) = \dots.$$

Следовательно, φ и ψ – возрастающая функция на $[a, b]$. Продолжая описанный процесс, придем к выводу, что φ является возрастающей функцией на всем промежутке $[a, b]$.

Докажем вторую часть утверждения. Если предположить противное, то при $x \rightarrow b$ в силу того, что φ – ограниченная функция, интеграл от левой части уравнения (3.18) будет расходящимся, тогда как интеграл от правой части есть константа, равная $\varphi(b) - \varphi(a)$. Для случая φ доказательство аналогично.

Обозначим первообразную функции $f(x)$ через $F(x)$. Задача состоит в нахождении значения ξ такого, что выполнялось бы равенство

$$F(b) - F(a) = f(\xi)(b - a). \quad (3.19)$$

Для нахождения ξ будем выделять промежутки монотонности функции $f(x)$ и на каждом из промежутков монотонности методом дихотомии пытаться находить корень уравнения $F(x) - f(x)(x - a) = F(a) - f(a)(x - a)$. Если для найденного дихотомией значения ξ выполняется равенство $F(b) - F(a) = f(\xi)(b - a)$

с заданной погрешностью, то полагаем ξ .

Как и в п. 3.1 будем считать, что функции $f(x)$ и $F(x)$ заданы на одном и том же конечном множестве температур $[a, b]$ (здесь и далее в этом пункте нижний индекс i при f_i не является сеточным обозначением).

Рассмотрим промежуток $[x_{i-1}, x_i]$, $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$. На этом промежутке функция $f(x)$ является линейной. Поэтому можно записать

$$f(x) = f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}). \quad (3.20)$$

_____ ,

где

Возможны два случая:

- 1) _____ ;
- 2) _____ .

Рассмотрим первый из них. Так как _____ , то из (3.20) получаем

$$\text{_____} \quad (3.21)$$

Далее, в силу линейности _____ и _____ на рассматриваемом промежутке

имеем

$$\text{_____} ,$$

$$\text{_____} \quad \text{_____} \quad \text{_____} .$$

С учетом этого уравнение (3.18) преобразуется к виду

$$\text{_____} \quad \text{_____} \quad \text{_____} \quad \text{_____} . \quad (3.22)$$

Обозначим первообразную функции _____ _____ _____ на

промежутке _____ через _____ :

$$\text{_____} \quad \text{_____} \quad \text{_____}$$

$$\text{_____} \quad (3.23)$$

$$\text{_____} \quad \text{_____}$$

Введем обозначения _____ , _____ .

Тогда (3.23) можно записать в более компактном виде:

$$\text{_____} \quad (3.23)$$

Интегрируя (3.22) на промежутке $t \in [0; \tau]$, получаем

$$\text{_____} \quad (3.24)$$

$$\frac{1}{x^2} = x^{-2} \quad (3.28)$$

Найдем $\frac{d}{dx} x^{-2}$. Обозначим за новую переменную x .

$$\frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

Возможны три случая:

1)

$$\frac{d}{dx} x^{-2} = -\frac{2}{x^3}$$

2)

$$\frac{d}{dx} x^{-2} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
 & - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
 & -2 - + - + + - + ;
 \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \\
 & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} -
 \end{aligned}$$

Обозначим первообразную функции $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (3.28) на промежутке $(-1; 1)$ через $F(x)$. С учетом найденной функции

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3.29)$$

Интегрируя (3.28) на промежутке $(-1; 1)$, получаем

$$F(x) = \arcsin x + C, \quad (3.30)$$

где конкретный вид функции $F(x)$ определяется выполнением одного из рассмотренных выше трех условий.

3.4 Приведение задачи к безразмерному виду

Одним из первых вопросов, возникающих при численном решении какой-либо практически интересной задачи, является вопрос о выборе системы единиц, в которой будут измеряться все физические параметры. Обойти связанные с этим трудности позволяет приведение задачи к безразмерному виду, т. е. приведение системы уравнений, граничных и начальных условий к безразмерному виду[8].

Напомним постановку второй краевой задачи для квазилинейного уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} & \dots \\ & \dots \\ & \dots \end{aligned} \tag{3.31}$$

В соответствии с теорией размерностей выберем среди размерностей величин, входящих в систему уравнений (3.31), размерности, образующие размерно-независимый базис, т. е. такие, что формула, выражающая размерность одной из величин, не может быть представлена в виде степенного одночлена из формул размерностей других величин [9]. В качестве таких размерностей можно взять размерности длины l , теплоемкости C , теплопроводности λ и температуры T , т. е. размерно-независимый базис будет следующим

$$l, C, \lambda, T. \tag{3.32}$$

Размерности остальных величин будут, как говорилось ранее, иметь вид степенных одночленов из базисных размерностей:

$$[Q] = l^a C^b \lambda^c T^d, \tag{3.33}$$

где a, b, c, d – некоторая величина, входящая в систему (3.31), a, b, c, d – целые числа.

Теперь определим значения a, b, c, d для размерности величин: времени t , коэффициент мощности теплоисточника Q , – входящих в систему (3.31). Для времени t , $l^a C^b \lambda^c T^d = t$, Действительно,

$$[l^a C^b \lambda^c T^d] = l^a C^b \lambda^c T^d = t.$$

Для мощности теплоисточника Q , $l^a C^b \lambda^c T^d = Q$:

$$[l^a C^b \lambda^c T^d] = l^a C^b \lambda^c T^d = Q.$$

Таким образом,

$$[Q] = l^a C^b \lambda^c T^d, \tag{3.34}$$

$$\dots \quad (3.35)$$

Изменим теперь единицы измерения величин h_x, h_y, h_z и соответственно $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ раз. Численные значения этих величин и величин u, v, w, p в новой системе единиц будут соответственно равны:

$$\dots$$

Положим $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$ — число узлов сетки по пространственной координате, чтобы значение величины h , равное 1, соответствовало значению величины h_0 , равному шагу Δx — разностной схемы.

Тогда получим

$$\dots \quad (3.36)$$

$$\dots \quad (3.37)$$

Выразив прежние величины (в обозначениях которых не присутствует \sim) из формул (3.37), (3.38) и подставив их выражения в систему уравнений (3.31), получим систему в частично безразмерном виде:

$$\dots \quad (3.38)$$

в которой величины u, v, w, p являются безразмерными, а величины h_x, h_y, h_z и имеют размерность h .

Нетрудно видеть, что если в полученной системе уравнений (3.38) опустить волну над всеми функциями, то она совпадет с системой уравнений (3.31) в размерном виде. Поэтому в расчетах можно использовать обычную систему уравнений, рассматривая ее как частично безразмерную. Числовые значения параметров, определяющие конкретное решение задачи (шаги по

пространственной и временной координате, значения известных функций), следует предварительно преобразовать в соответствии с формулами (3.36), (3.37).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения данной работы получены следующие результаты:

– рассмотрены способы численного решения квазилинейного уравнения с применением чисто неявных схем;

– исходное квазилинейное уравнение теплопроводности с помощью замены сведено к виду, в котором коэффициент теплопроводности не входит под знак дивергенции;

– было получено обыкновенное дифференциальное уравнение явной разностной схемы относительно значения неизвестной функции на следующем временном слое;

– для задания краевых условий выбран метод введения фиктивного слоя, получено квадратное уравнение, один из корней которого является значением искомой функции в фиктивном слое;

– выполнено обезразмеривание задачи;

– предложены два варианта реализации явной схемы:

а) с использованием значений коэффициентов уравнения на предыдущем временном слое (коэффициенты уравнения суть константы);

б) с интегрированием полученного дифференциального уравнения по времени на промежутке τ_n , где τ_n – временной шаг разностной схемы, и нахождением значения искомой функции методом дихотомии на промежутках монотонности полученной первообразной (коэффициенты уравнения являются непостоянными).

В дальнейшем планируется составить программу на языке программирования C++, реализующие оба варианта построенной явной схемы, а также линейный и нелинейный вариант чисто неявной схемы, провести сравнение решений второй смешанной задачи. сделать заключение о возможностях практического применения построенной явной схемы

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Калиткин, Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
- 2 Самарский, А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.
- 3 Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры. / В.А. Галактионов, В.А. Дородницын, А.А. Самарский и др. – Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Нов. достиж. – 1986. – 28. – С. 95–205.
- 4 Устойчивость разностных схем. / А.А. Самарский, А.В. Гулин – М.: Наука, 1973. – 415 с.
- 5 Геренштейн, А.В. Явная разностная схема решения одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности. / А.В. Геренштейн, М.З. Хайрисламов – Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2013. – том 5, № 1. – С. 12–17.
- 6 Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский – Учебное пособие. – 6-е изд., испр. и доп. – М.: Изд-во МГУ, 1999.
- 7 Валова, О.В. Математическое моделирование процессов теплообмена при электроосмотической фильтрации: диссертация кандидата технических наук / О.В. Валова. – Чита, 2007. – 210 с.
- 8 Самарский, А.А. Разностные методы решения задач газовой динамики. / А.А. Самарский, Ю.И. Попов – М.: Наука, 1992. – 424 с.
- 9 Седов, Л.И. Методы теории размерностей и теории подобия в механике. / Л.И. Седов – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1944. – 136 с.
- 10 Геренштейн, А.В. Устойчивые явные схемы для уравнения теплопроводности. / А.В. Геренштейн, Н. Машрабов, Е.А. Геренштейн –

Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2008. – № 15. – С.9–11.

11 Бухмиров, В.В. Тепломассообмен: учеб. пособие ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина». / В.В. Бухмиров – Иваново, 2014. – 360 с.

12 Исаченко, В.П. Теплопередача: учебник для вузов, изд. 3-е, перераб. и доп. / В.П. Исаченко, А.В. Осипова, А.С. Сукомел - М.: «Энергия», 1975. – 488 с.

13 Карташов, Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел - изд. 3-е, перераб. и доп. / Э.М. Карташов – М.: Высшая школа, 2001.

14 Бахвалов, Н.С. Численные методы. / Н.С. Бахвалов – М.: Наука, 1973. – 155 с.

15 Зализняк, В.Е. Основы научных вычислений – 2-е изд., перераб. и доп. / В.Е. Зализняк – Москва : Издательство Юрайт, 2012. – 356 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Исходные данные эксперимента

$l = 0.2$ м // длина стержня

$n = 100$ // число элементарных участков

$g_l = 122000$ // мощность потока тепла слева

$g_r = 120000$ // мощность потока тепла справа

$dt = 0.01$ //сек шаг по времени

$it = 20000$ //число итераций

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Результат работы программы

Число итераций 20000. Время 200 сек.

Температуры вдоль стержня через каждые 2 мм

100.9 94.7 88.7 83 77.5 72.3 67.3 62.6 58.1 53.9

49.9 46.1 42.5 39.1 36 33 30.3 27.7 25.3 23

21 19 17.3 15.6 14.1 12.7 11.5 10.3 9.2 8.3

7.4 6.6 5.9 5.2 4.6 4.1 3.7 3.2 2.9 2.5

2.3 2 1.8 1.6 1.5 1.3 1.2 1.2 1.1 1.1

1.1 1.1 1.2 1.2 1.3 1.4 1.6 1.8 2 2.2

2.5 2.8 3.2 3.6 4.1 4.6 5.1 5.8 6.5 7.3

8.1 9.1 10.1 11.3 12.5 13.9 15.4 17 18.7 20.6

22.7 24.9 27.2 29.8 32.5 35.4 38.5 41.8 45.3 49.1

53 57.2 61.6 66.2 71.1 76.3 81.6 87.3 93.1 99.3