МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»
Институт естественных и точных наук
Кафедра уравнений математической физики

| | |
|---|---|
| РАБОТА ПРОВЕРЕНА | ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ |
| Рецензент, зав. кафедры ПМиП, | Заведующий кафедрой, |
| д-р физ.-мат. наук, доцент | д-р физ.-мат. наук, профессор |
| ________________/А.А. Замышляева | _____________/ Г.А. Свиридюк |
| «____»____________2019 г. | «____»____________2019 г. |

# ВОЗНИКНОВЕНИЕ И РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ВЫРОЖДЕННЫХ (ПОЛУ)ГРУПП ОПЕРАТОРОВ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
ЮУрГУ–01.04.01.2019.025. ВКР

Руководитель работы, профессор кафедры, д-р физ.-мат. наук, доцент

________________/ Н.А. Манакова
«____»_________________2019 г.

Автор работы,
студент группы ЕТ-221

_____________/ Н.Н. Овчинникова
«____»_________________2019 г.

Нормоконтролер,
доцент кафедры, канд. физ.-мат. наук

___________________/ Е.В. Бычков
«____»_________________2019 г.

Челябинск 2019

УДК 517.9

**Овчинникова Н.Н.**

Возникновение и развитие теории вырожденных (полу)групп операторов / Н.Н. Овчинникова. – Челябинск, 2019. – 42 с.

Выпускная квалификационная работа посвящена изучению современного состояния и истории развития теории вырожденных (полу)групп разрешающих операторов. В результате исследовательской работы проведен анализ современного состояния теории (полу)групп операторов; представлена историография развития теории в случаях относительно ограниченного, относительно секториального и относительно радиального операторов; по теме исследования составлена библиография.

Библиографический список: 73 наименований.

# Оглавление

# Введение

### Постановка задачи

Исследование полугрупп операторов было инициировано изучением параболических уравнений. Теория (полу)групп операторов с середины XX века стала одним из основных инструментов изучения задачи Коши

$$v(0) = v_0 \tag{1}$$

для абстрактных операторно-дифференциальных уравнений

$$\dot{v} = Cv. \tag{2}$$

Построение разрешающих (полу)групп операторов [52] является одним из методов нахождения аналитических решений задачи (1), (2). В случае линейного уравнения (2) теория (полу)групп операторов возникла в работах E. Hille, R.S. Phillips, K. Yosida, W. Feller и других и получила широкое применение при изучении различных начально-краевых задач для уравнений математической физики [53, 54, 65, 51, 71, 50, 60, 2].

Американский математик E. Hille (1894 – 1980) был одним из основателей теории полугрупп. Основные труды E. Hille посвящены функциональному анализу. Монография E. Hille [46], которая была издана в 1951 г. стала одним из основных, на тот момент времени, собранием трудов по данной тематике. Книга является одной из первых попыток систематического изложения функционального анализа на базе понятия полугрупп. После 1948 г. развитие теории полугрупп, а также приложений этой теории достигли значительных успехов. В этот же период времени E. Hille, независимо от K. Yosida [8] открыл основную теорему о производящих операторах. А также E. Hille удалось продемонстрировать применение данной теоремы к уравнению диффузии. E. Hille начал исследование задачи Коши (с 1949 г.) с помощью методов теории полугрупп. На данное исследование E. Hille подвигли работы K. Yosida. Вскоре возможности этого нового подхода заинтересовали американского ученого W. Feller. В частности, можно отметить проведенное им совместно со своими учениками глубокое исследование сингулярной краевой задачи для уравнения диффузии [62]. Еще одиним американским ученым, который внес большой свой вклад в развитие теории полугрупп, был R.S. Phillips (1913 – 1998). Ему удалось обогатить эту теории и заполнить многие пробелы, которые оставил E. Hille. Результатом их совместной работы стала новая монография E. Hille, R.S. Phillips [47]. Теорема Хилле – Иосиды – Филлера – Филлипса – Миядеры (теорема ХИФФМ, [47]) является основным результатом классической теории полугрупп.

Уравнения или системы уравнений в частных производных, не разрешенные относительно старшей производной по времени, которые позволяют моделировать обширный класс процессов и явлений в естествознании и технике, могут быть представлены в виде абстрактного уравнения

$$L\dot{u} = Mu, \qquad \ker L \neq \{0\}. \tag{3}$$

Уравнения такого вида называют уравнениями соболевского типа [6, 72, 63, 15, 14, 64]. Систематическое изучение уравнений, сводящихся к уравнению (3), было начато в середине XX века. Известно, что первые упоминания об уравнениях данного типа встречаются в работах H. Poincare [66]. В современных математических исследованиях, после основополагающих работ С.Л. Соболева, дифференциальные уравнения, неразрешенные относительно производной по времени стали называть "уравнениями соболевского типа". Этот термин ввел R.E. Showalter [67, 68]. Уравнения соболевского типа охватывают обширную область в неклассических уравнениях математической физики, поэтому мы ограничимся только изучением истории развития теории одного из подходов, который предполагает использование методов (полу)групп операторов.

Основной трудностью изучения задачи (1), (3) является ее принципиальная неразрешимость при произвольном начальном значении $u_0$, взятом пусть даже из плотного линеала исходного банахового пространства $\mathfrak{U}$. Поэтому актуальным является поиск и описание структуры множества начальных значений (1), для которых задача (1), (3) имеет решение. Одним из успешных методов изучения линейной задачи (1), (3) стала теория вырожденных разрешающих (полу)групп операторов, которая была впервые построена в [16, 17] и получила свое развитие в дальнейших работах Г.А. Свиридюка и его учеников. В 2003 г. вышла монография [70], в которой были систематизированы результаты теории (полу)групп разрешающих операторов с ядрами и приведены основные условия, при которых образ разрешающей (полу)группы совпадет с фазовым пространством соответствующего уравнения, определенного на подпространстве.

Характеристику современного состояния теории (полу)групп разрешающих операторов начнем с обзора ее ключевых теоретических аспектов, то есть основных направлений, в которых учеными осуществлялся научный поиск. Кроме того попытаемся выявить основные виды исследований, которые имеют принципиальное значение для ее целостности. Таким образом, к ключевым теоретическим аспектам исследуемой нами теории вырожденных разрешающих (полу)групп операторов мы относим ее понятийный аппарат.

В дальнейшем, будем рассматривать банаховы пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$, линейный и непрерывный оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, линейный и замкнутый оператор $M : \operatorname{dom} M \to \mathfrak{F}$ с областью определения $\operatorname{dom} M$ плотной в $\mathfrak{U}$. Исследуем вопрос развития теории вырожденных разрешающих (полу)групп уравнения вида (3). В случае когда существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$ обратный к оператору $L$ уравнение (3) можно свести к двум эквивалентных ему уравнениям

$$\dot{u} = Su, \quad \dot{f} = Tf, \tag{4}$$

тогда операторы $S = L^{-1}M : \operatorname{dom} S \to \mathfrak{U}$, $T = ML^{-1} : \operatorname{dom} T \to \mathfrak{F}$ линейны и замкнуты по построению. Уравнения (4) могут быть рассмотрены в рамках общего невырожденного уравнения (2) с линейным, замкнутым и плотно определенным оператором $C : \operatorname{dom} C \to \mathfrak{V}$ в некотором банаховом пространстве $\mathfrak{V}$. В классической теории невырожденных (полу)групп операторов можно выделить три основных случая.

*Случай ограниченного оператора*

Пусть $\operatorname{dom} C = \mathfrak{V}$, т. е. $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{V})$. Тогда существует аналитическая (во всей плоскости $\mathbb{C}$) разрешающая группа операторов уравнения (2), которую можно построить при помощи интегралов Данфорда – Тейлора

$$V^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_\mu(C)e^{\mu t}\,d\mu\,, \tag{5}$$

где $t \in \mathbb{R}$, $R_\mu(C) = (\mu I - C)^{-1}$ – резольвента оператора $C$, а $\Gamma \subset \mathbb{C}$ – контур, ограничивающий область, содержащую спектр $\sigma(C)$ оператора $C$.

*Случай секториального оператора*

Пусть оператор $C$ секториален, т. е. существуют константы $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}_+$ и $\Theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ такие, что сектор

$$S_{a,\Theta}(C) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \Theta,\ \mu \neq a\} \subset \rho(C)\,,$$

причем

$$\|R_\mu(C)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V})} \leq \frac{k}{|\mu - a|} \quad \forall \mu \in S_{a,\Theta}(C).$$

Тогда существует аналитическая в секторе $\{r \in \mathbb{C} : |\arg r| < \Theta - \frac{\pi}{2}\}$ разрешающая полугруппа уравнения (2), имеющая вид (5) при $t \in \mathbb{R}_+$, где контур $\Gamma \subset S_{a,\Theta}(C)$ таков, что $|\arg \mu| \to \pm\Theta$ при $|\mu| \to +\infty$, и $V^0 = I$.

*Случай радиального оператора*

Пусть, наконец, оператор $C$ радиален, т. е. существуют константы $a \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{R}_+$ такие, что луч $(a, +\infty) \subset \rho(C)$, причем

$$\|(R_\mu(C))^n\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V})} \leq \frac{k}{|\mu - a|^n} \quad \forall \mu \in (a, +\infty)\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тогда существует сильно непрерывная разрешающая полугруппа уравнения (2), которая может быть получена либо посредством аппроксимаций Иосиды

$$V^t = s\text{-}\lim_{\mu \to +\infty} e^{(\mu^2 R_\mu(C) - \mu I)t}\,,$$

либо посредством аппроксимаций Поста – Уиддера

$$V^t = s\text{-}\lim_{n \to +\infty}\left(I - \frac{t}{n}C\right)^n.$$

В силу редукции (4) уравнения (3) к невырожденному уравнению (2) на сегодняшний момент в теории вырожденных (полу)групп операторов можно выделить три основных случая аналогично невырожденной теории.

**Целью** выпускной квалификационной работы является исследование истории развития теории вырожденных (полу)групп разрешающих операторов лежащей параллельно случаям относительно ограниченного, относительно секториального и относительно радиального операторов.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1) Провести анализ современного состояние теории (полу)групп разрешающих операторов.

2) Представить историографию развития теории в случае относительно ограниченного оператора.

3) Представить историографию развития теории в случае относительно секториального оператора.

4) Представить историографию развития теории в случае относительно радиального оператора.

**Историография и актуальность исследования**

Для понимания сущности теории вырожденных разрешающих (полу)групп операторов, помимо изучения ключевых аспектов данной теории, необходимо, прежде всего, рассмотреть историю становления исследуемого вопроса. Мы рассматривали историю развития теории вырожденных (полу)групп операторов с 90-х гг. XX века, т.к. в современном виде она сформировалась в этот период.

Н.А. Сидоров [33] со своими учениками и независимо от них R.E. Showalter [69] первыми начали изучать линейные уравнения вида

$$L\dot{u} = Mu + f$$

с различными вырождениями оператора $L$. R.E. Showalter [68] ввел термин "голоморфные разрешающие группы". Г.А. Свиридюком [20] впервые были построены голоморфные вырожденные группы операторов, которые являлись разрешающими группами линейного уравнений соболевского типа (3). В настоящее время, как вырожденные голоморфные группы операторов, так и уравнения соболевского типа являются активно изучаемыми областями функционального анализа.

Перенос теории сильно непрерывных полугрупп операторов на случай линейных уравнений соболевского типа был предпринят A. Yagi [73] и независимо от него Г.А. Свиридюком [22]. Было отмечено, что в отличии от невырожденного случая единицей полугруппы операторов вырожденного уравнения является проектор, действующий на некоторое подпространство, а в случае невырожденных полугрупп операторов – тождественный оператор. Поэтому задача Коши разрешима не при всех начальных значениях. В силу этой особенности полугруппы операторов вырожденного уравнения в дальнейшем принято называть вырожденными, или иначе полугруппами операторов с ядрами. В проблематике вcase выроженных голоморфных групп операторов активно работают A. Favini [57, 56, 55], И.В. Мельникова и М.А. Альшанский [12, 13] и другие исследователи.

A. Yagi [73] строит разрешающую сильно непрерывную полугруппу однородного уравнения (3), заданную только на подпространстве. В.С. Шароглазов [48], основываясь на результатах, полученных Н.А. Сидоровым [34], строит на некотором подпространстве $C_0$-непрерывную полугруппу, разрешающую однородное уравнение (3) с замкнутыми, плотно определенными операторами $L, M$. Г.А. Свиридюк [19] определяет относительно лучевой оператор. Можно заметить, что в работах A. Yagi, М.А. Альшанского и Г.А. Свиридюка присутствуют схожии условия на операторы $L, M$, которые являются обобщением условия радиальности оператора операторами $L^{-1}M$.

Г.А. Свиридюк является основателем теории вырожденных (полу)групп операторов. Им впервые были предложены концепции изучения вырожденного уравнения в случае относительно ограниченных, секториальных и радиальных операторов, и продемонстрированы приложения данных теорий. Им были впервые были построены понятия относительно ограниченного [16], относительно секториального [18] и относительно радиального [19] операторов. В его работах впервые доказано, что вырожденные голоморфные группы, вырожденные аналитические полугруппы, сильно непрерывные полугруппы разрешающих операторов будут порождаться линейными уравнениями соболевского типа с операторами данных классов. Причем фазовые пространства соответствующих уравнений совпадают с образами всех этих групп и полугрупп разрешающих операторов.

В 1993 г. Г.А. Свиридюк защитил докторскую диссертацию, которая легла в основу его теории. В диссертации были заложены метод фазового пространства для линейных и полулинейных уравнений соболевского типа, построена основа для развития теории вырожденных (полу)групп операторов. В этой работе Г.А. Свиридюком была сформулирована задача Шоуолтера – Сидорова, а также доказана ее связь с задачей Коши.

Результаты, полученные Г.А. Свиридюком развили его ученики. Г.А. Свиридюком и его ученицей Т.А. Бокаревой введено понятие $(L, \sigma)$-секториального оператора $M$ [1]. В дальнейшем под руководством Г.А. Свиридюка и Т.Г. Сукачевой Л.Л. Дудко были получены необходимые и достаточные условия относительной $\sigma$-ограниченности линейных операторов [4, 24]. В кандидатской диссертации под руководством Г.А. Свиридюка В.Е. Федоров придает теории вырожденных (полу)групп операторов современный вид [35]. В.Е. Федоров теорию линейных уравнений соболевского типа и вырожденных групп и полугрупп операторов удачно адаптировал для понимания студентами старших курсов математических специальностей [37].

Получение достаточных условий существования разрешающих групп, на случай $\ker L \neq \{0\}$, то есть обобщение прямого утверждения равномерной версии теоремы ХИФФМ, обосновано Г.А. Свиридюком при помощи понятия относительно $\sigma$-ограниченного оператора [16], которое обобщает понятие ограниченного оператора и равносильной регулярности операторного пучка $\mu L + M$. С понятием $(L, \sigma)$-ограниченности оператора $M$ связано три случая: точка $\infty$ является устранимой особой точкой, полюсом порядка $p \in \mathbb{N}$ или существественно особой точкой $L$-резольвенты $(\mu L - M)^{-1}$оператора $M$. Обобщение обратного утверждения аналитической версии теоремы ХИФФМ при $p = 0$ получено в совместной работе Г.А. Свиридюка и В.Е. Федорова [22].

Важной задачей при исследовании уравнений соболевского типа является нахождение их фазового пространства. В работах Г.А. Свиридюка показано, что если оператор $M$ $(L, \sigma)$-ограничен, то в случае устранимой особой точки или полюса в бесконечности фазовое пространство совпадает с образом разрешающей группы уравнения. Заметим, что в работе A. Favini [56] возникает аналогичное понятие полюса $L$-резольвенты $(\mu L - M)^{-1}$оператора $M$. В ней исследуется разрешимость уравнений соболевского типа на банаховом пространстве, но разрешающие полугруппы не строятся. В работе [55] построена разрешающая полугруппа без единицы, имеющая тот же вид, что и полугруппа, построенная Г.А. Свиридюком [20] при условии $(L, p)$-секториальности оператора $M$ для уравнения (3).

Первая монография [70], посвященная вырожденным (полу)группам была издана в 2003 г. Абстрактные результаты, предложенные Г.А. Свиридиком и его учениками, нашли свое применение в различных прикладных задачах: в теории динамических измерений [49], в теории устойчивости уравнений соболевского типа [11, 15], в теории оптимального управления [23], в изучении уравнений соболевского типа высокого порядка [6].

Г.А. Свиридюк и его ученики смогли найти ответ на вопросы несуществования и неединственности решений вырожденных уравнений, при помощи разработанного метода фазового пространства и обосновав теорию вырожденных (полу)групп операторов. В дальнейшем Г.А. Свиридюком и А.В. Келлер был найден ответ на вопрос о неустойчивости решений. Они первыми, начали исследовать неустойчивость в терминах дихотомий решений [27]. Полученные результаты были изложены в кандидатской диссертации А.В. Келлер [9], где она рассмотрела случаи линейных уравнений соболевского типа с $(L, p)$-ограниченными и $(L, p)$-секториальными операторами.

В дальнейшем результаты полученные А.В. Келлер, были распространены на случай полулинейного уравнения соболевского типа с относительно $p$-ограниченным оператором [11]. В.Е. Федоров и М.А. Сагадеева в совместной работе рассмотрели случай относительно $p$-радиального оператора [44], а С.А. Загребина изучила случай полулинейного уравнения соболевского типа с относительно $p$-секториальным оператором [5].

В дальнейшее развитие теория получила в работах В.Е. Федорова [41, 42, 40]. Ему удалось результаты полученные при исследовании уравнений вида (3) в банаховых пространствах распространить на случай локально выпуклых пространств. Поскольку основным методом исследования в обоих случаях служит понятие резольвенты генератора полугруппы, то теория (полу)групп в случае локально выпуклых пространств оказалась близка к теории (полу)групп в банаховых пространствах.

Построение вырожденных разрешающих (полу)групп операторов лежит в основе аналитического исследования вырожденных эволюционных уравнений. Построение теории полугрупп в банаховых пространствах схоже по своей структуре с построением теории вырожденных голоморфных групп операторов в квазибанаховых пространствах. Теория вырожденных полугрупп разрешающих эволюционное уравнение соболевского типа вида (3) относительно ограниченого оператора в квазибанаховых пространствах последовательностей изложена в работе А.В. Келлер и Дж.К. Аль-Делфи [10]. В случае относительно секториального оператора в квазибанаховых пространствах последовательностей в работе А.А. Замышляевой и Дж.К. Аль-Исави [7] построена теория вырожденных полугрупп разрешающих эволюционное уравнение соболевского типа вида (3). Случай вырожденных $C_0$-непрерывных полугрупп операторов в квазибанаховых пространствах был рассмотрен в [32].

Отметим также, что построенные вырожденные (полу)группы операторов нашли свое применение для исследования стохастических уравнений соболевского типа [58, 61, 59]

$$L \overset{o}{\eta} = M\eta + N\omega.$$

Однако, несмотря на существенный интерес который проявляют ученые к данной проблеме и значительные результаты, опубликованные к настоящему времени появились исторические заметки, в которых искажается действительность, поэтому необходимо систематизировать результаты авторов, уже полученные в этом направлении.

**Методы исследования**

1. Анализ литературы по проблеме исследования, включающий:

*составление библиографии* – перечня источников, отобранных для работы в связи с исследуемой проблемой;

*реферирование* – сжатое переложение основного содержания одной или нескольких работ по общей тематике;

*аннотирование* – краткая запись общего содержания книги или статьи;

*цитирование* – дословная запись выражений, фактических или цифровых данных, содержащихся в литературном источнике.

2. Интервью с ведущим специалистом по теме исследования доктором физико-математических наук, профессором Г.А. Свиридюком.

**Краткое содержание**

Во введении представлена характеристика современного состояния теории вырожденных (полу)групп разрешающих операторов, обоснована актуальность выбранного исследования, сформулированы цель и задачи работы, определены методы исследования. В первом параграфе представлена историография теории вырожденных групп разрешающих операторов в случае $(L, p)$-ограниченного оператора. Во втором параграфе проведен анализ истории развития теории в случае $(L, p)$-секториального оператора, в третьем параграфе – в случае $(L, p)$-радиального оператора.

# 1. $(L, p)$-ограниченные операторы

В первом параграфе рассматривается развитие теории вырожденных групп разрешающих операторов в случае $(L, p)$-ограниченных операторов и порождаемых ими вырожденных разрешающих групп уравнения (3). В работах [16, 20, 70, 17, 24, 26] было установлено отображение множества пар операторов $(L, M)$ во множество пар голоморфных групп $(\{U^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}, \{F^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\})$, где $\bar{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+$, операторов с ядрами. Построение вырожденных разрешающих групп уравнения (3) соотвествует случаю ограниченного оператора в невырожденном случае, однако при рассмотрении вырожденных уравнений [70] был выделен ряд нетрадиционных для теории невырожденных групп операторов проблем. Первая из них состоит в том, что фазовое пространство уравнения совпадает с образом разрешающей полугруппы; вторая – существование единиц разрешающих полугрупп.

**Относительные резольвенты и относительный спектр оператора**

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, а оператор $M : \operatorname{dom} M \subset \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ линеен и замкнут.

**Определение 1.1.** *Множество*

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})\}$$

*называется $L$-резольвентным множеством оператора $M$. Множество $\mathbb{C} \backslash \rho^L(M) = \sigma^L(M)$ называется $L$-спектром оператора $M$.*

**Замечание 1.1.** [70] 1) В случае, когда существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$, $L$-резольвентное множество и $L$-спектр оператора $M$ совпадают с резольвентным множеством и спектром оператора $L^{-1}M$ или оператора $ML^{-1}$.

2) $L$-резольвентное множество оператора $M$ всегда открыто, а $L$-спектр оператора $M$ всегда замкнут.

**Определение 1.2.** Оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}$, $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ называется соответственно $L$-резольвентой, правой $L$-резольвентой, левой $L$-резольвентой оператора $M$.

**Относительно присоединенные векторы**

Основную роль в этих условиях играют относительно присоединенные векторы, которые впервые ввел в расмотрение В.А. Треногин [3].

**Определение 1.3.** *1) Вектор $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$ называют собственным вектором оператора $L$.*

*2) Упорядоченное множество $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset \mathfrak{U}$ назовем цепочкой $M$-присоединенных векторов собственного вектора $\varphi_0$, если*

$$L\varphi_{q+1} = M\varphi_q, \quad \varphi_q \notin \ker L, \quad q = 0, 1, \dots .$$

*3) Цепочка $M$-присоединенных векторов собственного вектора $\varphi_0$ называется конечной, если существует такой $M$-присоединенный вектор $\varphi_p$, что либо $\varphi_p \notin \operatorname{dom} M$, либо $M\varphi_p \notin \operatorname{im} L$.*

*4) Мощность конечной цепочки называется ее длиной. Когда цепочка бесконечна, то говорят, что у нее бесконечная длина.*

**Относительно $\sigma$-ограниченные операторы**

**Определение 1.4.** *Оператор $M$ называется $(L, \sigma)$-ограниченным, если*

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)) .$$

Пусть оператор $M$ $(L, \sigma)$-ограничен, а контур $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$. Рассмотрены интегралы типа Ф. Рисса

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma R_\mu^L(M) d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma L_\mu^L(M) d\mu . \tag{6}$$

В работах [17, 20] была доказана теорема о существовании проекторов $P$, $Q$, определенных на банаховых пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$, соответственно.

**Теорема 1.1.** *Пусть оператор $M$ $(L,\sigma)$-ограничен. Тогда операторы $P:\mathfrak{U}\to\mathfrak{U}$ и $Q:\mathfrak{F}\to\mathfrak{F}$ являются проекторами.*

Обозначим через $\mathfrak{U}^0=\ker P$, $\mathfrak{F}^0=\ker Q$; $\mathfrak{U}^1=\operatorname{im} P$, $\mathfrak{F}^1=\operatorname{im} P$. Сужение оператора $L$ $(M)$ обозначается через $L_k$ $(M_k)$ на $\mathfrak{U}^k$ $(\operatorname{dom} M\cap\mathfrak{U}^k)$, $k=0,1$. Для доказательства основных свойств операторов $L_k$, $M_k$, $k=0,1$, достаточно выполнения $(L,\sigma)$-ограниченности оператора $M$. В работах [20, 70] была доказана теорема о расщеплении.

**Теорема 1.2.** (теорема о расщеплении) *Оператор $M$ $(L,\sigma)$-ограничен. Тогда*

*1) имеет место действие операторов $L_k:\mathfrak{U}^k\to\mathfrak{F}^k$, $M_k:\operatorname{dom} M\cap\mathfrak{U}^k\to\mathfrak{F}^k$, $k=0,1$;*

*2) существует оператор $M_0^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$;*

*3) существует оператор $L_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$;*

*4) оператор $M_1\in\mathcal{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{F}^1)$.*

Оператор $M$ $(L,\sigma)$-ограничен. Тогда из теоремы 1.2 вытекает существование операторов $H=M_0^{-1}L_0\in\mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ и $S=L_1^{-1}M_1\in\mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$, посредством которых разложили $L$-резольвенту оператора $M$ в *ряд Лорана*

$$(\mu L-M)^{-1}=-\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k H^k M_0^{-1}(I-Q)+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-k}S^{k-1}L_1^{-1}Q$$

в кольце $|\mu|>a$.

**Определение 1.5.** Точка $\infty$ называется *устранимой особой точкой, полюсом порядка $p\in\mathbb{N}$, существенно особой точкой* $L$-резольвенты оператора $M$, если соответственно $H\equiv\mathbb{O}$; $H^p\neq\mathbb{O}$, $H^{p+1}\equiv\mathbb{O}$; $H^q\neq\mathbb{O}$ $\forall q\in\mathbb{N}$.

В работах [20, 70] была доказана следующая теорема.

**Теорема 1.3.** *Пусть оператор $M$ $(L,\sigma)$-ограничен и точка $\infty$ является*

*1) существенно особой точкой $L$-резольвенты оператора $M$, тогда $M$-корневой линеал оператора $L$ содержится в $\mathfrak{U}^0$;*

*2) полюсом порядка $p \in \mathbb{N}$ $L$-резольвенты оператора $M$, тогда $M$-корневое пространство оператора $L$ совпадает с $\mathfrak{U}^0$ и состоит из $M$-присоединенных векторов оператора $L$ высоты не больше $p$;*

*3) устранимой особой точкой $L$-резольвенты оператора $M$, тогда $\ker L = \mathfrak{U}^0$, $\operatorname{im} L = \mathfrak{F}^1$, и любой собственный вектор оператора $L$ не имеет $M$-присоединенных векторов.*

**Замечание 1.2.** *В случае, когда точка $\infty$ является полюсом порядка $p \in \mathbb{N}$ $L$-резольвенты оператора $M$ или устранимой особой точкой $L$-резольвенты оператора $M$ и оператор $M$ $(L, \sigma)$-ограничен, то оператор $M$ было предложено называть $(L, p)$-ограниченным оператор. Впервые термин "относительно спектрально ограниченный оператор" введен в работе [16]. В дальнейшем данный термин был заменен на $(L, p)$-ограниченный оператор.*

### Разрешающие группы операторов

В работах [20, 70] проведена редукция уравнения (3) к паре эквивалентных уравнений. Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$, тогда уравнение (3) редуцируют к паре эквивалентных ему уравнений

$$R^L_\alpha(M)\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1} M u\,, \tag{7}$$

$$L^L_\alpha(M)\dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1} f\,, \tag{8}$$

где $\alpha \in \rho^L(M)$. Данные уравнения изучены в рамках общего уравнения (2). Под решением уравнения (2) понимают любую вектор-функцию $v \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{V})$, удовлетворяющую этому уравнению.

**Определение 1.6.** *Отображение $V^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathfrak{V}))$ называется группой разрешающих операторов (короче, разрешающей группой) уравнения (2), если*

*1) $V^s V^t = V^{s+t} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$;*

*2) при любом $v_0 \in \mathfrak{V}$ вектор-функция $v(t) = V^t v_0$ есть решения уравнения (2).*

**Определение 1.7.** *Группа $\{V^t : t \in \mathbb{R}\}$ называется аналитической, если она имеет аналитическое продолжение во всю комплексную плоскость с сохранением свойств 1) и 2).*

В работе [20] была доказана теорема о существовании групп операторов $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, $\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, определенных на банаховых пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$, соответственно.

**Теорема 1.4.** *Пусть оператор $M$ $(L, \sigma)$-ограничен. Тогда существует аналитическая разрешающая группа уравнения (7) (уравнения (8)), причем*

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu,$$

$$F^t = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma L^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu, \ t \in \mathbb{R}_+.$$

**Генераторы голоморфных групп с ядрами**

В работах [16, 20, 70, 17, 24, 26] было установлено отображение множества пар операторов $(L, M)$, где оператор $M$ $(L, p)$-ограничен, во множество пар голоморфных групп ($\{U^t : t \in \bar{\mathbb{R}}\}$, $\{F^t : t \in \bar{\mathbb{R}}\}$) операторов с ядрами. В работах [70, 24] построены достаточные условия $(L, p)$-ограниченности оператора $M$, которые охватывают достаточно широкий класс прикладных задач.

1. **Достаточные условия $(L, p)$-ограниченности оператора $M$**

В монографии [70] рассмотрены следующие условия:

**(A1)** Длина любой цепочки $M$-присоединенных векторов любого собственного вектора оператора $L$ ограничена числом $p \in \mathbb{N}$.

Обозначим через $\mathfrak{U}^0$ $M$-корневой линеал оператора $L$.

**(A2)** Пусть $\mathfrak{U}^0$ дополняемое в $\mathfrak{U}$ подпространство. Тогда $\mathfrak{U}^2 = \mathfrak{U} \ominus \mathfrak{U}^0$ некоторое алгебраическое и топологическое дополнение и $\mathfrak{F}^0 = M[\mathfrak{U}^0]$, $\mathfrak{F}^2 = L[\mathfrak{U}^2]$.

**(A3)** $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^2$.

**(A4)** Существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$, где $M_0$ сужение оператора $M$ на $\mathfrak{U}^0$.

**Теорема 1.5.** *Пусть выполнены все условия (A1) – (A4). Тогда оператор $M$ $(L,\sigma)$-ограничен, причем $\infty$ – несущественная особая точка $L$-резольвенты оператора $M$.*

2. **Случай бирасщепляющего оператора. Достаточные условия $(L,p)$-ограниченности оператора $M$**

**Определение 1.8.** *Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ называется бирасщепляющим, если его ядро и образ дополняемы в пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно.*

В работе [70] были получены достаточные условия $(L,p)$-ограниченности оператора $M$ в случае бирасщепляющегося оператора $L$, которые будут более простыми, чем условия (A1) – (A4).

Итак, пусть $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ – бирасщепляющий оператор и оператор $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

**(B1)** Любая цепочка $M$-присоединенных векторов любого собственного вектора оператора $L$ имеет длину, равную $p \in \mathbb{N}$.

**Теорема 1.6.** *Пусть операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем оператор $L$ бирасщепляющий. Пусть выполнены условия (B1) и (B2). Тогда оператор $M$ $(L,p)$-ограничен.*

3. **Случай фредгольмова оператора. Достаточные условия $(L,p)$-ограниченности оператора $M$**

**Определение 1.9.** *Оператор $L$ называется фредгольмовым, если $\dim\ker L = \operatorname{codim}\operatorname{im} L$.*

Пусть оператор $L$ фредгольмов. В $\ker L$ выбран какой-нибудь базис $\{\varphi_0^1, \varphi_0^2, \ldots, \varphi_0^n\}$, $n = \dim\ker L$, и каждому вектору $\varphi_0^m$ поставлена в соответствие цепочка (возможно, пустая) $M$-присоединенных векторов $\{\varphi_1^m, \varphi_2^m, \ldots, \varphi_{p_m}^m\}$, $m = 1, 2, \ldots, n$. Расмотрено условие

**(C)** $\sum\limits_{m=1}^{n} a_m M\varphi_{p_m}^m \notin \operatorname{im} L$, если $\sum\limits_{m=1}^{n} |a_m| > 0$, где $\varphi_{p_m}^m = \varphi_0^m$, если вектор $\varphi_0^m$ не имеет $M$-присоединенных векторов.

В работе [70] были получены достаточные условия $(L,p)$-ограниченности оператора $M$ в случае фредгольмова оператора $L$, которые будут более простыми, чем условия (A1) – (A4).

**Теорема 1.7.** *Пусть операторы* $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, *причем оператор* $L$ *фредгольмов. Пусть выполнено условие (A1), тогда оператор* $M$ $(L,p)$-*ограничен.*

# 2. $(L,p)$-секториальные операторы

Во втором параграфе вводятся и изучаются $(L,p)$-секториальные операторы и порождаемые ими вырожденные разрешающие полугруппы уравнения (3). В работах [29, 30, 17, 18, 20, 21, 22, 28, 35, 40, 70] было установлено отображение множества пар операторов $(L,M)$ во множество пар аналитических и равномерно ограниченных полугрупп $(\{U^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}, \{F^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\})$, где $\bar{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+$, операторов с ядрами. Построение вырожденных разрешающих полугрупп уравнения (3) соответствует случаю секториального оператора в невырожденном случае, однако при рассмотрении вырожденных уравнений встречается ряд нетрадиционных для теории полугрупп операторов проблем. Во-первых, фазовое пространство уравнения совпадает с образом разрешающей полугруппы. Во-вторых, отметим проблему существования единиц разрешающих полугрупп. Для решения этой проблемы требуется накладывать дополнительные условия на оператор более сильные условия $M$ – условие сильной $(L,p)$-секториальности оператора $M$ справа или слева. Впервые относительно секториальные операторы были рассмотрены в работах Г.А. Свиридюка и его учеников [1, 20]. Ими были найдены условия существования аналитических полугрупп операторов с ядрами.

**Относительные $p$-резольвенты и $(L,p)$-секториальный оператор**

**Определение 2.10.** *Пусть точки $\mu_q \in \rho^L(M)$, $q = 0,1,\ldots,p$. Оператор-функции*

$$R^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{p} R^L_{\mu_q}(M) \ \ \text{и} \ \ L^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{p} L^L_{\mu_q}(M)$$

*называются соответственно правой $(L,p)$-резольвентой и левой $(L,p)$-резольвентой оператора $M$.*

Г.А. Свиридюком и Т.А. Бокаревой было впервые введено понятие $(L,p)$-секториального оператора [1, 20].

**Определение 2.11.** *Оператор $M$ называется $(L,p)$-секториальным, если*

*1) существуют константы $a \in \mathbb{R}$ и $\Theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ такие, что сектор*

$$S^L_{a,\Theta}(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \Theta, \mu \neq a\} \subset \rho^L(M),$$

*2) существует константа $K \in \mathbb{R}_+$ такая, что*

$$\max\left\{\|R^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|L^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\right\} \leq \frac{K}{\prod\limits_{q=0}^{p} |\mu_q - a|}$$

*при любых $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p \in S^L_{a,\Theta}(M)$.*

**Замечание 2.3.** 1) В определении 2.11 не теряя общности, полагают $a = 0$.

2) Пусть $\lambda_q, \mu_q \in \rho^L(M)$, $q = 0, 1, \ldots, p$, тогда справедливо

$$\operatorname{im} R^L_{(\lambda,p)}(M) = \operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M), \quad \operatorname{im} L^L_{(\lambda,p)}(M) = \operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M).$$

3) Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$, то оператор $M$ $L$-секториален точно тогда, когда секториален оператор $L^{-1}M$ (или, что равносильно, оператор $ML^{-1}$).

4) Пусть оператор $M$ $(L,p)$-ограничен, тогда оператор $M$ $(L,p)$-секториален.

### Разрешающие полугруппы

Проведена редукция уравнения (3) к паре эквивалентных уравнений

$$R^L_\alpha(M)\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1}Mu\,, \tag{9}$$

$$L^L_\alpha(M)\dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1}f\,. \tag{10}$$

Данные уравнения изученыв рамках общего уравнения (2). Тогда под решением уравнения (2) понимают любую вектор-функцию $v \in C^\infty(\mathbb{R}_+;\mathfrak{V})$, удовлетворяющую этому уравнению.

**Определение 2.12.** *Отображение $V^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R}_+;\mathfrak{V})$ называется разрешающей полугруппой уравнения (2), если*

*1) $V^sV^t = V^{s+t}\ \forall s,t \in \mathbb{R}_+$;*

*2) при любом $v_0 \in \mathfrak{V}$ вектор-функция $v(t) = V^t v_0$ есть решение уравнения (2).*

**Определение 2.13.** *Полугруппу $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ называют аналитической, если она имеет аналитическое продолжение в некоторый сектор, содержащий луч $\mathbb{R}_+$ с сохранением свойств (1), (2), и равномерно ограниченной, если*

$$\|V^t\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V})} \leq const \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

В работе [20] была доказана теорема о существовании полугрупп операторов $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, $\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, определенных на банаховых пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$, соответственно.

**Теорема 2.8.** *Пусть оператор $M$ $(L,p)$-секториален. Тогда существует аналитическая и равномерно ограниченная разрешающая полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ уравнения (9) ( $\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ уравнения (10)), причем*

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \tag{11}$$

$$F^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu,\ t \in \mathbb{R}_+. \tag{12}$$

**Ядра и образы разрешающих полугрупп**

**Определение 2.14.** *Пусть $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ – аналитическая разрешающая полугруппа уравнения (2). Множество*

$$\ker V^\bullet = \{\varphi \in \mathfrak{V} : V^t\varphi = 0\ \exists t \in \mathbb{R}_+\}$$

*называется ядром, а множество*

$$\operatorname{im} V^\bullet = \{v \in \mathfrak{V} : \lim_{t\to 0+} V^t v = v\}$$

*называется образом полугруппы.*

$\mathfrak{U}^1$ замыкание образа $\operatorname{im} R^L_\mu(M)$ в норме пространства $\mathfrak{U}$, а через $(\mathfrak{F}^1)$ замыкание образа $(\operatorname{im} L^L_\mu(M))$ в норме пространства$(\mathfrak{F})$. $\mathfrak{U}^0 = \ker R^L_{(\mu,p)}(M)$ и $\mathfrak{F}^0 = \ker L^L_{(\mu,p)}(M)$.

**Теорема 2.9.** *Пусть оператор $M$ $(L,p)$-секториален.*

*1) Тогда* $\operatorname{im} U^\bullet = \mathfrak{U}^1$, $\operatorname{im} F^\bullet = \mathfrak{F}^1$.

*2) Тогда* $\mathfrak{U}^0 = \ker U^\bullet$, $\mathfrak{F}^0 = \ker F^\bullet$.

### Единицы полугрупп

При построении вырожденных полугрупп операторов $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, $\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, определенных на банаховых пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$, соответственно, достаточно условия $(L,p)$-секториальности оператора $M$. Для посторoения единицы полугрупп введено более сильное условие на оператор $M$.

**Определение 2.15.** *Пусть $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ – полугруппа, определенная на банаховом пространстве $\mathfrak{V}$. Оператор $E \in \mathcal{L}(\mathfrak{V})$ называется единицей этой полугруппы, если*

$$E = s\text{-}\lim_{t \to 0+} V^t.$$

Для посторoения единицы полугрупп $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, $\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, определенных на банаховых пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$, соответственно, необходимо ввести более сильное условие на оператор $M$.

**Определение 2.16.** *Оператор $M$ называется сильно $(L,p)$-секториальным справа (слева), если он $(L,p)$-секториален и*

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1} M u\|_{\mathfrak{U}} \le \frac{const}{|\lambda| \prod\limits_{q=0}^{p} |\mu_q|} \quad \forall u \in \operatorname{dom} M,$$

*где $const = const(u)$*

*(существует плотный в $\mathfrak{F}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{F}}$ такой, что*

$$\|M(\lambda L - M)^{-1} L^L_{(\mu,p)}(M) f\|_{\mathfrak{F}} \le \frac{const}{|\lambda| \prod\limits_{q=0}^{p} |\mu_q|} \quad \forall f \in \overset{\circ}{\mathfrak{F}},$$

*где $const = const(f)$), а $\lambda, \mu_q \in S^L_\Theta(M)$, $q = 0, 1, \ldots, p$.*

В работе [20, 28] была доказана теорема о существовании единиц полугрупп $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, $\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, определенных на банаховых пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$, соответственно.

**Теорема 2.10.** *Пусть оператор $M$ $(L,p)$-секториален справа (слева). Тогда существует единица полугруппы (11) (полугруппы (12)), причем*

$$P = s\text{-}\lim_{t\to 0+} U^t, \tag{13}$$

$$Q = s\text{-}\lim_{t\to 0+} F^t. \tag{14}$$

Через $L_1$ $(M_1)$ обозначают сужение оператора $L$ $(M)$ на $\mathfrak{U}^1$ $(\mathrm{dom}\, M_1 = M \cap \mathfrak{U}^1)$. Через $\mathrm{dom}\, M_0$ соответственно обозначают $\mathrm{dom}\, M \cap \mathfrak{U}^0$. Через $L_0$ $(M_0)$ обозначают сужение оператора $L$ $(M)$ на $\mathfrak{U}^0$ $(\mathrm{dom}\, M \cap \mathfrak{U}^0)$. Для построения обратного оператора $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$ к оператору $L_1$ вводят более сильное условие на оператор $M$.

**Определение 2.17.** *Оператор $M$ называется сильно $(L,p)$-секториальным, если он сильно $(L,p)$-секториален слева и*

$$\|(\lambda L - M)^{-1} L^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})} \leq \frac{const}{|\lambda| \prod\limits_{q=0}^{p} |\mu_q|}$$

*при любых $\lambda, \mu_q \in S^L_\Theta(M)$, $q = 0, 1, \ldots, p$.*

Для доказательства основных свойств операторов $L_k$, $M_k$, $k = 0, 1$, рассмотрены различные условия на оператор $M$. От менее сильного условия $(L,p)$-секториальности до более сильного условия сильно $(L,p)$-секториальности на оператор $M$. В работах [20] была доказана теорема о расщеплении.

**Теорема 2.11.** *(Теорема о расщеплении) 1) Пусть оператор $M$ $(L,p)$-секториален. Тогда операторы $L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$ и $M_0 : \mathrm{dom}\, M \cap \mathfrak{U}^0 \to \mathfrak{F}^0$; и существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$.*

*2) Пусть оператор $M$ сильно $(L,p)$-секториален справа и слева. Тогда оператор $L_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{F}^1)$, а операторы $M_k \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $k = 0,1$.*

*3) Пусть оператор $M$ сильно $(L,p)$-секториален. Тогда существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$.*

Сужение $\{U_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ ($\{F_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$) полугруппы $\{U^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ ($\{F^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$) на подпространство $\mathfrak{U}^1$ ($\mathfrak{F}^1$) является невырожденной аналитической полугруппой. В работе [22, 39, 35] была доказана теорема о инфинитезимальных генераторах полугрупп $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, $\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, определенных на банаховых пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$, соответственно. В работе [70, 35] была доказана следующая теорема.

**Теорема 2.12.** *Пусть оператор $M$ сильно $(L,p)$-секториален. Тогда инфинитезимальным генератором полугруппы $\{U_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ ($\{F_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$) является оператор $S_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^1)$ ($T_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{F}^1)$).*

**Генераторы аналитических полугрупп с ядрами**

В работах [35, 70] было установлено отображение множества пар операторов $(L,M)$, где оператор $M$ сильно $(L,p)$-секториален, во множество пар аналитических и равномерно ограниченных полугрупп ($\{U^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$, $\{F^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$), где $\bar{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+$, операторов с ядрами. В работах [35, 70] было установлено обратное соответствие и построены условия сильной $(L,p)$-секториальности оператора $M$. Приведем эти условия.

**(D1)** Существует пара ($\{U^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$, $\{F^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$) аналитических в некотором секторе $\{\tau \in \mathbb{C} : |\arg\tau| < \Theta - \frac{\pi}{2}\}, \Theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, сильно непрерывных и равномерно ограниченных на $\bar{\mathbb{R}}_+$ полугрупп операторов $U^t \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $F^t \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$.

**(D2)** Существует топлинейный изоморфизм $L_1 : \mathfrak{U}^1 \to \mathfrak{F}^1$ такой, что $L_1 S_1 = T_1 L_1$.

**(D3)** Существует линейный, замкнутый, плотно определенный биективный оператор $M_0 : \mathrm{dom}\, M_0 \to \mathfrak{F}^0$, $\mathrm{dom}\, M_0 \subset \mathfrak{U}^0$.

**(D4)** Существует оператор $L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0;\mathfrak{F}^0)$ такой, что оператор $H = M_0^{-1} L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ нильпотентен, причем его степень нильпотентности не превосходит некоторого числа $p \in \mathbb{N}$.

**(D5)** $$L = L_0(I-P)+L_1P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})\,,$$

$$M = M_0(I-P)+M_1P \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})\,,$$

$$\operatorname{dom} M = \operatorname{dom} M_0 \dot{+} \operatorname{dom} M_1\,.$$

В работе [35, 70] была доказана следующая теорема.

**Теорема 2.13.** *Пусть выполнены все условия (D1) – (D5). Тогда оператор $M$ $(L,p)$-секториален, причем для полугрупп $\{U^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$ и $\{F^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$ справедливы формулы (11) и (12) соответственно.*

В работе [35, 70] была доказана следующая теорема.

**Теорема 2.14.** *Пусть выполнены все условия (D1) – (D5). Тогда оператор $M$ сильно $(L,p)$-секториален.*

В работе [45] были построены условия сильной $(L,p)$-секториальности оператора $M$.

**Теорема 2.15.** *Оператор $M$ сильно $(L,p)$-секториален точно тогда, когда выполняются следующие условия:*

*1) оператор $M$ $(L,p)$-радиален;*

*2) $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$;*

*3) существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$.*

# 3. $(L, p)$-радиальные операторы

В третьем параграфе вводятся и изучаются $(L, p)$-радиальные операторы и порождаемые ими вырожденные разрешающие полугруппы уравнения (3). В работах [19, 25, 35, 36, 38, 40, 70] было установлено отображение множества пар операторов $(L, M)$ во множество пар сильно непрерывных полугрупп $\{U^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$, $\{F^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$, где $\bar{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+$, операторов с ядрами. Обобщение теоремы Хилле – Иосиды – Феллера – Миядеры – Филлипса на случай сильно непрерывных и равномерно ограниченных полугрупп с ядрами получено в работе [70, 35]. Впервые рассмотрение относительно радиальных операторов было начато в работе [19]. В данной работе такие операторы назывались $L$-лучевыми.

**Определение 3.18.** Оператор $M$ называется $(L, p)$-радиальным, если

(i) $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \mu > a\ \mu \in \rho^L(M)$;

(ii) $\exists K \in \mathbb{R}_+\ \forall \mu > a\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\max\{\|(R^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|(L^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\} \leq \frac{K}{\prod\limits_{k=0}^{p}(\mu_k - a)^n}.$$

**Замечание 3.4.** *1) Как отмечено в работах* [70, 35] *без потери общности в определении 3.18 можно положить $a = 0$.*

*2) В случае непрерывной обратимости оператора $L$ и радиалности оператора $L^{-1}M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U})$ (или $ML^{-1}$) оператор $M$ $(L, p)$-радиален. При $p = 0$ справедливо и обратное.*

*3) Впервые было введено понятие $L$-лучевого оператора в работе* [19]. *Данное определение совпадает с понятием $(L, 0)$-радиального оператора.*

### Сильно непрерывные полугруппы

Проведена редукция уравнения (3) к паре эквивалентных уравнений (9), (10). Данные уравнения рассмотрены на основе уравнения (2). Под решением уравнения (2) понимают любую вектор-функцию $v \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathfrak{V})$, удовлетворяющую этому уравнению на $\mathbb{R}_+$.

**Определение 3.19.** Сильно непрерывное отображение $V^{\cdot} : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathcal{L}(\mathfrak{V})$ называется *сильно непрерывной полугруппой разрешающих операторов* (*разрешающей полугруппой*) уравнения (2), если

(i) $V^s V^t v = V^{s+t} v$ для любых $s, t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ и любого $v$ из пространства $\mathfrak{V}$;

(ii) $v(t) = V^t v$ есть решение уравнения (2) для любого $v$ из плотного в $\mathfrak{V}$ множества.

Введены обозначения:

$$\mathfrak{U}^1 = \overline{\operatorname{im}(R^L_\mu(M))^{p+1}}, \quad \mathfrak{F}^1 = \overline{\operatorname{im}(L^L_\mu(M))^{p+1}},$$

$$\tilde{\mathfrak{U}} = \overline{\mathfrak{U}^0 \dot{+} \operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)}, \quad \tilde{\mathfrak{F}} = \overline{\mathfrak{F}^0 \dot{+} \operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M)}.$$

Замыкания здесь берутся в норме пространств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно.

В работах [70, 35] была доказана теорема о существовании полугрупп операторов $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, $\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, определенных на $\tilde{\mathfrak{U}}$ и $\tilde{\mathfrak{F}}$, соответственно.

**Теорема 3.16.** *Пусть оператор $M$ $(L, p)$-радиален. Тогда существует равномерно ограниченная и сильно непрерывная разрешающая полугруппа уравнения (9) ((10)), рассматриваемого на подпространстве $\tilde{\mathfrak{U}}$ $(\tilde{\mathfrak{F}})$.*

**Определение 3.20.** Оператор $M$ называется *сильно $(L, p)$-радиальным справа* (*слева*), если он $(L, p)$-радиален и

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1} M u\|_{\mathfrak{U}} \leq \frac{\operatorname{const}(u)}{\lambda \prod_{k=0}^{p} \mu_k} \quad \forall u \in \operatorname{dom} M$$

(существует плотный в $\mathfrak{F}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{F}}$ такой, что

$$\|M(\lambda L - M)^{-1} L^L_{(\mu,p)}(M) f\|_{\mathfrak{F}} \leq \frac{\operatorname{const}(f)}{\lambda \prod_{k=0}^{p} \mu_k} \quad \forall f \in \overset{\circ}{\mathfrak{F}})$$

при любых $\lambda, \mu_0, \mu_1, ..., \mu_p \in \mathbb{R}_+$.

В работах [70, 35] была доказана теорема о существовании полугрупп операторов $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, $\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, определенных на пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$, соответственно.

**Теорема 3.17.** *Пусть оператор $M$ сильно $(L,p)$-радиален справа (слева). Тогда $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$ $(\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1)$.*

В работах [70, 35] было показано, что при условии сильной $(L,p)$-радиальности оператора $M$ справа (слева) разрешающая полугруппа уравнения (9) ((10)) задана на всем пространстве $\mathfrak{U}$ $(\mathfrak{F})$, а ее единицей является проектор $P$ $(Q)$.

**Замечание 3.5.** *В случае непрерывной обратимости оператора $L$ и радиальности оператор $S = L^{-1}M$ вытекает, что оператор $M$ сильно $(L,p)$-радиален справа и слева.*

### Инфинитезимальный генератор сильно непрерывной полугруппы

При построении вырожденных полугрупп операторов $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, $\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, определенных на банаховых пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$, соответственно, достаточно условия $(L,p)$-секториальности оператора $M$. Для постороения единицы полугрупп введены более сильное условие на оператор $M$.

Для постороения единицы полугрупп $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, $\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, определенных на банаховых пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$, соответственно, введено более сильное условие на оператор $M$.

В работах [70, 35] была доказана теорема о существовании единиц полугрупп $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, $\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, определенных на банаховых пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$, соответственно.

Через $L_1$ $(M_1)$ обозначено сужение оператора $L$ $(M)$ на $\mathfrak{U}^1$ $(\operatorname{dom} M_1 = M \cap \mathfrak{U}^1)$. Через $\operatorname{dom} M_0$ соответственно обозначают $\operatorname{dom} M \cap \mathfrak{U}^0$. Через $L_0$ $(M_0)$ обозначают сужение оператора $L$ $(M)$ на $\mathfrak{U}^0$ $(\operatorname{dom} M \cap \mathfrak{U}^0)$. Для построения обратного оператора $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$ к оператору $L_1$ вводят более сильное условие на оператор $M$.

**Определение 3.21.** Оператор $M$ называется *сильно $(L,p)$-радиальным*, если он сильно $(L,p)$-радиален слева и для всех $\lambda, \mu_0, ..., \mu_p \in \mathbb{R}_+$

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})} \leq \frac{K}{\lambda \prod\limits_{k=0}^{p} \mu_k}.$$

Для доказательства основных свойств операторов $L_k$, $M_k$, $k = 0, 1$, рассмотрены различные условия на оператор $M$. От менее сильного условия $(L,p)$-радиальности до более сильного условия сильно $(L,p)$-радиальности на оператор $M$. В работе [70] была доказана теорема о расщеплении.

**Теорема 3.18.** *(Теорема о расщеплении) 1) Пусть оператор $M$ $(L,p)$-радиален. Тогда операторы $L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0;\mathfrak{F}^0)$ и $M_0 : \operatorname{dom} M \cap \mathfrak{U}^0 \to \mathfrak{F}^0$; и существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$.*

*2) Пусть оператор $M$ сильно $(L,p)$-радиален справа и слева. Тогда оператор $L_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{F}^1)$, а операторы $M_k \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$.*

*3) Пусть оператор $M$ сильно $(L,p)$-радиален. Тогда существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$.*

Сужение $\{U_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ $(\{F_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\})$ полугруппы $\{U^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ $(\{F^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\})$ на подпространство $\mathfrak{U}^1$ $(\mathfrak{F}^1)$ является невырожденной сильно непрерывной полугруппой. В работе [70, 35] была доказана теорема о инфинитезимальных генераторах полугрупп $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, $\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, определенных на банаховых пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$, соответственно. В работе [70, 35] была доказана следующая теорема.

**Теорема 3.19.** *Пусть оператор $M$ сильно $(L,p)$-секториален. Тогда инфинитезимальным генератором полугруппы $\{U_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ $(\{F_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\})$ является оператор $S_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^1)$ $(T_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{F}^1))$, где $S_1 = L_1^{-1}M_1$, $T_1 = M_1L_1^{-1}$.*

### Генераторы сильно непрерывных полугрупп с ядрами

В работах [70, 35] было установлено отображение множества пар операторов $(L,M)$, где оператор $M$ сильно $(L,p)$-радиален, во множество пар сильно непрерывных полугрупп ($\{U^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$, $\{F^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$), где $\bar{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+$, операторов с ядрами. В работах [70, 35] было установлено обратное соответствие и построены условия сильной $(L, p)$-радиальности оператора $M$. Приведем эти условия.

**(E1)** *Существуют две сильно непрерывные и равномерно ограниченные полугруппы* $\{U^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ *и* $\{F^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ *операторов* $U^t \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $F^t \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$.

**(E2)** *Существует линейный гомеоморфизм* $L_1 : \mathfrak{U}^1 \to \mathfrak{F}^1$ *такой, что* $L_1 S_1 = T_1 L_1$.

**(E3)** *Существует биективный оператор* $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$.

**(E4)** *Существует оператор* $L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$ *такой, что оператор* $H = M_0^{-1} L_0$ *нильпотентен степени не больше* $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

**(E5)** $L = L_0(I - P) + L_1 P, \quad M = M_0(I - P) + L_1 S_1 P, \quad \operatorname{dom} M = \operatorname{dom} M_0 \dot{+} \operatorname{dom} S_1$.

В работе [70, 35] была доказана следующая теорема.

**Теорема 3.20.** *Оператор* $M$ *сильно* $(L, p)$*-радиален тогда и только тогда, когда выполнены все условия (E1) – (E5).*

В работе [45] были построены условия сильной $(L, p)$-радиальности оператора $M$.

**Теорема 3.21.** *Оператор* $M$ *сильно* $(L, p)$*-радиален точно тогда, когда выполняются следующие условия:*

*1) оператор* $M$ $(L, p)$*-радиален;*

*2)* $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$;

*3) существует оператор* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$.

# Заключение

В процессе написания выпускной квалификационной работы, проведен анализ публикаций по теории вырожденных (полу)групп разрешающих операторов в случаях относительно ограниченного, относительно секториального и относительно радиального операторов. Для описания понятийного поля проблемы в случаях относительно ограниченного, относительно секториального и относительно радиального операторов применялся понятийно-терминологический анализ. С целью получения объективной информации взято интервью по теме исследования у доктора физико-математических наук, профессора Г.А. Свиридюка. В результате исследовательской работы проанализировано современное состояние теории вырожденных (полу)групп операторов; представлена историография развития данной теории в случаях относительно ограниченного, относительно секториального и относительно радиального операторов. Проведенный нами анализ современного состояния и истории развития теории вырожденных (полу)групп разрешающих операторов, показал необходимость систематизирования полученных результатов. По теме исследования составлена подробная библиография.

# Библиографический список


[1] Бокарева, Т.А. Исследование фазовых пространств уравнений типа Соболева с относительно секториальными операторами: дис. . . канд. физ.-мат. наук / Т.А. Бокарева. – Л., 1993.

[2] Васильев, В.В. Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения / В.В. Васильев, С.Г. Крейн, С.И. Пискарев // Итоги науки и техн. Серия: Математический анализ. – 1990. – Т. 28. – С. 87–202.

[3] Вайнберг, М.М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг, В.А. Треногин. – М.: Наука, 1969.

[4] Дудко, Л.Л. Исследование полугрупп операторов с ядрами: дис... канд. физ.-мат. наук / Л.Л. Дудко. – СПб., 1996.

[5] Загребина, С.А. О существовании и устойчивости решений уравнений Навье – Стокса / С.А. Загребина // Вестник МаГУ. Серия: Математика. – 2005. – № 8. – С. 74–86.

[6] Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ. – 2012.

[7] Замышляева, А.А. Голоморфные вырожденные полугруппы операторов и эволюционные уравнения соболевского типа в квазисоболевых пространствах последовательностей / А.А. Замышляева, Дж.К. Аль Исави // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика, механика, физика. – 2015. – Т. 7, № 4. – С. 31–40.

[8] Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967.

[9] Келлер, А.В. Исследование ограниченных решений линейных уравнений типа Соболева: дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.В. Келлер. – Челябинск, 1997.

[10] Келлер, А.В. Голоморфные вырожденные группы операторов в квазибанаховых пространствах / А.В. Келлер, Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2015. – Т. 7, № 1. – С. 20–27.

[11] Китаева, О.Г. Исследование устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий полулинейных уравнений соболевского типа: дис... канд. физ.-мат. наук / О.Г. Китаева. – Магнитогорск, 2006.

[12] Мельникова, И.В. Задача Коши для включения в банаховых пространствах и пространствах распределений // И.В. Мельникова // Сибирский математический журнал. – 2001. – Т. 42, № 4. – С. 892–910.

[13] Мельникова, И.В. Корректность вырожденной задачи Коши в банаховом пространстве // И.В. Мельникова, М.А. Альшанский // ДАН СССР. – 1994. – Т. 336, № 1. – С. 17–20.

[14] Свешников, А.Г. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.В. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – М.: Физмалит, 2007. – 736 с.

[15] Сагадеева, М.А. Дихтомии решений линейных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012.

[16] Свиридюк, Г.А. Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно ограниченным оператором / Г.А. Свиридюк // ДАН. – 1991. – Т. 318, № 4. – С. 828–831.

[17] Свиридюк, Г.А. Исследование полулинейных уравнений типа Соболева в банаховых пространствах: дис. . . докт. физ.-мат. наук / Г.А. Свиридюк. – Челябинск: ЧелГУ, 1992.

[18] Свиридюк, Г.А. Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно секториальным оператором / Г.А. Свиридюк // ДАН. – 1993. – Т. 329, № 3. –С. 274–277.

[19] Свиридюк, Г.А. Линейные уравнения типа Соболева и сильно непрерывные полугруппы разрешающих операторов с ядрами / Г.А. Свиридюк // ДАН СССР. – 1994. – Т. 337, № 5. – С. 581–584.

[20] Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47–74.

[21] Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором / Г.А. Свиридюк // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6, № 5. – С. 252–272.

[22] Свиридюк, Г.А. Аналитические полугруппы с ядрами и линейные уравнения типа Соболева // Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров // Сибирский математический журнал. – 1995. – Т. 36, № 5. – С. 1130–1145.

[23] Свиридюк, Г.А. Оптимальное управление линейными уравнениями типа Соболева с относительно -секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, А.А. Ефремов // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31. – С. 1912–1919.

[24] Свиридюк, Г.А. Необходимые и достаточные условия относительной сигма-ограниченности линейных операторов / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева, Л.Л. Дудко // ДАН. – 1995. – Т. 345, № 1. – С. 25–27.

[25] Свиридюк, Г.А. Уравнения типа Соболева с относительно радиальными операторами / Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров, Г.В. Верясов. – Челябинск, 1995. – Деп. ВИНИТИ, № 988–В95.

[26] Свиридюк, Г.А. Относительная сигма-ограниченность линейных операторов / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева, Л.Л. Дудко // Известия ВУЗ. Математика. – 1997. – № 7. – С. 68–73.

[27] Свиридюк, Г.А. Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер // Известия ВУЗ. Математика. – 1997. – № 5. – С. 60–68.

[28] Свиридюк, Г.А. О единицах аналитических полугрупп операторов с ядрами / Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров // Сибирский математический журнал. – 1998. – Т. 39, № 3. – С. 604–616.

[29] Свиридюк, Г.А. Об относительной -секториальности дифференциальных операторов / Г.А. Свиридюк, Г.А. Кузнецов // Неклассические уравнения мат. физики. – Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1998. – С. 49–57.

[30] Свиридюк, Г.А. Об относительно сильной -секториальности линейных операторов / Г.А. Свиридюк, Г.А. Кузнецов // ДАН. – 1999. – Т. 365, № 6. – С. 736–738.

[31] Свиридюк, Г.А. Полугруппы операторов с ядрами // Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров // Вестник ЧелГУ. Серия: Математика, Механика. – 2002. – № 1. – С. 42–70.

[32] Свиридюк, Г.А. Вырожденные $C_0$-непрерывные полугруппы операторов в квазибанаховых пространствах / Г.А. Свиридюк, М.А. Сагадеева, А.С.Р. Рашид // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 3. – С. 134–144.

[33] Сидоров, Н.А. О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений / Н.А. Сидоров, О.А. Романова // Дифференциальные уравнения. – 1983. – Т. 19, № 9. – С. 1516–1526.

[34] Сидоров, Н.А. Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления / Н.А. Сидоров. – Иркутск: Иркут. ун-т, 1982.

[35] Федоров, В.Е. Исследование разрешающих полугрупп линейных уравнений типа Соболева: дис... канд. физ.-мат. наук / В.Е. Федоров. – Челябинск, 1996.

[36] Федоров, В.Е. Линейные уравнения типа Соболева с относительно $p$-радиальными операторами / В.Е. Федоров // ДАН. – 1996. – Т. 351, № 3. – С. 316–318.

[37] Федоров, В.Е. Полугруппы и группы операторов с ядрами / В.Е. Федоров. – Челябинск: ЧелГУ, 1998.

[38] Федоров, В.Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов / В.Е. Федоров // Алгебра и анализ. – 2000. – Т. 12, № 3. – С. 173–200.

[39] Федоров, В.Е. Единицы вырожденных аналитических полугрупп операторов и относительная $p$-секториальность / В.Е. Федоров // Уравнения соболевского типа: сб. науч. работ. – Челябинск, 2002. – С. 138–155.

[40] Федоров, В.Е. Исследование разрещающих полугрупп линейных уравнений соболевского типа в банаховых и локально выпуклых пространствах: дис... д. физ.-мат. наук / В.Е. Федоров. – Челябинск, 2005.

[41] Федоров, В.Е. Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах / В.Е. Федоров // Математический сборник. – 2004. – Т. 195, № 8. – С. 131–160.

[42] Федоров, В.Е. Обобщение теоремы Хилле – Иосиды на случай вырожденных полугрупп в локально выпуклых пространствах / В.Е. Федоров // Сибирский математический журнал. – 2005. – Т. 46, № 2. – С. 426–448.

[43] Федоров, В.Е. Оптимальное управление линейными уравнениями Соболевского типа / В.Е. Федоров, М.В. Плеханова // Дифференциальные уравнения. – 2004. – С. 1548–1556.

[44] Федоров, В.Е. Существование экспоненциальных дихотомий некоторых классов вырожденных линейных уравнений / В.Е. Федоров, М.А. Сагадеева // Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11, № 2. – С. 82–92.

[45] Федоров, В.Е. О некоторых соотношениях в теории вырожденных полугрупп операторов / В.Е. Федоров // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2008. – № 15 (115), вып. 1. – С. 89–99.

[46] Хилле, Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле. – М.: Иностранная литература, 1951.

[47] Хилле, Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. – М. : Иностранная литература, 1962.

[48] Шароглазов, В.С. О некоторых свойствах решений операторы вырожденных дифференциальных уравнений / В.С. Шароглазов // Аналитические и конструктивные методы исследования дифференциальных уравнений. – Иркутск: Иркут. ун-т. – 1993.

[49] Шестаков, А.Л. Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 107–115.

[50] Banasiak, J. A Semigroup Related to a Convex Combination of Boundary Conditions Obtained as a Result of Averaging Other Semigroups / J. Banasiak, A. Bobrowski // Journal of Evolution Equations. –2015. – V. 15, № 1. – P. 223–237.

[51] Batkai, A. Semigroups for Delay Equations / A. Batkai, S. Piazzera. – Ottava: A.K. Peters, 2005.

[52] Clement, P. One-Parameter Semigroups / P. Clement, H.J.A.M. Heihmans. – Amsterdam: North-Holland, 1987.

[53] Engel, K. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations / K. Engel, R. Nagel. – New York: Springer, 2000.

[54] Goldstein, J. Semigroups of Linear Operators and Applications / J. Goldstein. – New York: Oxford University Press, 1985.

[55] Favini, A. Laplace Transform Method for a Class of Degenerate Evolution Problems / A. Favini // Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova. – 1979. – V. 12. – P. 511–536.

[56] Favini, A. An Operational Method for Abstract Degenerate Evolution Equations of Hiperbolic Type / A. Favini // Journal of Functional Analysis. – 1988. – V. 76. – P. 432–456.

[57] Favini, A. Degenerate Differential Equations in Banach Spaces / A. Favini, A. Yagi. – New York: Marcel Dekker Inc., 1999.

[58] Favini, A. One Class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive "White Noise" / A. Favini, G.A. Sviridyuk, A.A. Zamyshlyaeva // Communications on Pure and Applied Analysis. – 2016. – V. 15, № 1. – P. 185–196.

[59] Favini, A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Radial Operators in Space of "Noises" / A. Favini, G. Sviridyuk , M. Sagadeeva // Mediterranean Journal of Mathematics. –2016. – V. 12, № 6. – P. 4607–4621.

[60] Favini, A. Regularity Results and Solution Semigroups for Retarded Functional Differential Equations / A. Favini, H. Tanabe // Bulletin of the South Ural. Series Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. – 2017. – V. 10, № 1. – P. 48–69.

[61] Favini, A. Multipoint Initial-Final Value Problems for Dynamical Sobolev-Type Equations in the Space of "Noises" / A. Favini, S.A. Zagrebina, G.A. Sviridyuk // Electronic Journal of Differential Equations. – 2018. – V. 2018, № 128. – P. 1–10.

[62] Feller, W. The Parabolic Differential Equations and the Associated Semi-Groups of Transformations / W. Feller // Ann. of Math. – 1952. – V. 55. – P. 468–519.

[63] Keller, A.V. Some Generalizations of the Showalter–Sidorov Problem for Sobolev-Type Models / A.V. Keller, S.A. Zagrebina // Bulletin of the South Ural. Series Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. – 2015. – V. 8, № 2. – P. 5–23.

[64] Lightbourne, J.H.A. Partial Functional Equations of Sobolev Type / J.H.A. Lightbourne // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1983. –V. 93, № 2. – P. 328–337.

[65] Lunardi, A. Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems / Lunardi, A. – Basel: Birkhauser, 1995.

[66] Poincare, H. Sur l'equilibre d'une mass fluide animee d'un mouvement de rotation / H. Poincaré // Acta Math. – 1885. – V. 7. – P. 259–380.

[67] Showalter, R.E. Partial Differential Equations of Sobolev – Galpern Type / R.E. Showalter // Pacific Journal of Mathematics. – 1963. – V. 31, № 3. – P. 787–793.

[68] Showalter, R.E. The Sobolev Type Equations I / R.E. Showalter // Applicable Analysis. – 1975. – V.5, № 1. – P. 15–22.

[69] Showalter, R.E. Nonlinear Degenerate Evolution Equations and Partial Differential Equations of Mixed Type / R.E. Showalter // SIAM Journal of Mathematical Analysis. – 1975. – V. 6, № 1. – P. 25–42.

[70] Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2003.

[71] Vrabie, I. $C_0$-Semigroups and Applications / I. Vrabie. – Amsterdam: North-Holland, 2003.

[72] Zamyshlyaeva, A.A. The Higher-Order Sobolev-Type Models / A.A.Zamyshlyaeva // Bulletin of the South Ural. Series Mathematical

Modelling, Programming and Computer Software. – 2014. – V. 7, № 2. –P. 5–28.

[73] Yagi, A. Generation Theorems of Semigroup for Multivalued Linear Operators / A. Yagi // Osaka J. Math. – 1991. – V. 28. – P. 385–410.