МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»
Институт естественных и точных наук
Кафедра уравнений математической физики

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент, доцент кафедры МиКМ,
канд. физ.-мат. наук
_____/ А.Л. Ушаков
«____»_____2019 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой,
д-р физ.-мат. наук, профессор
_____/ Г.А. Свиридюк
«____»_____2019 г.

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ БАРЕНБЛАТТА–ЖЕЛТОВА–КОЧИНОЙ С УСЛОВИЕМ НЕЙМАНА И МНОГОТОЧЕЧНЫМ НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНЫМ УСЛОВИЕМ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
ЮУрГУ–01.04.01.2019.026.ВКР

Руководитель работы, доцент
кафедры МиКМ,
канд. физ.-мат. наук, доцент
_____/ М.А. Сагадеева
«____»_____2019 г.

Автор работы,
студент группы ЕТ-221
_____/ Е.А. Солдатова
«____»_____2019 г.

Нормоконтролер, доцент кафедры,
канд. физ.-мат. наук
_____/ Е.В. Бычков
«____»_____2019 г.

Челябинск 2019

АННОТАЦИЯ

Солдатова Е.А. Исследование уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной с условием Неймана и многоточечным начально-конечным условием. – Челябинск: ЮУрГУ, ЕТ-221, 37 с., библиогр. список – 48 наим.

Выпускная работа посвящена построению решения уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной с условием Неймана и многоточечным начально-конечным условием. При рассмотрении вопроса разрешимости в работе решена задача Штурма–Лиувилля для оператора Лапласа с условием Неймана в прямоугольнике. Полученные собственные значения и собственные функции были использованы для построения решения многоточечной начально-конечной задачи. Кроме того, условие Неймана и многоточечное начально-конечное условие для уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной рассматриваются впервые.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВЕДЕНИЕ 4
1. АБСТРАКТНАЯ СХЕМА 10
1.1. Относительно ограниченные операторы 10
1.2. Голоморфные вырожденные группы операторов 12
1.3. Относительно спектральные проекторы 17
1.4. Многоточечная начально-конечная задача 20
2. ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БАРЕНБЛАТТА–ЖЕЛТОВА–КОЧИНОЙ 22
2.1. Вывод уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной 22
2.2. Задача Штурма–Лиувилля для оператора Лапласа в прямоугольнике 24
2.3. Условие Неймана и многоточечная начально-конечная задача для уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной 29
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 31
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 32

ВВЕДЕНИЕ

Постановка задачи.

Рассмотрим заданное в открытой ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^d$, уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной, моделирующее динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещиновато-пористой среде [3].

Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область с границей ∂G класса C^∞. Будем искать функцию $u = u(x,t)$, удовлетворяющую в цилиндре $G \times \mathbb{R}_+$ уравнению

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha \Delta u + f, \tag{0.0.1}$$

моделирует динамику движения жидкости в трещиновато-пористой среде [1], [2]. Параметры α, λ – вещественные, характеризуют среду; параметр $\alpha \in \mathbb{R}_+$, а параметр λ в случаях, когда не возникает противоречия физическому смыслу задачи, может принимать и отрицательные значения [21]; функция $f = f(x,t)$ описывает внешнее воздействие. Примером такого внешнего воздействия может служить изменение температуры окружающей среды в силу природных явлений или физического процесса при различных способах добычи нефти, например при искусственном нагнетании давления в глубоких или труднодоступных скважинах на месторождениях нефти. Большой интерес со стороны исследователей к уравнению (0.0.15) вызван еще и потому, что оно описывает и другие физические процессы. Например, процесс влагопереноса в почве [38], процесс теплопроводности с "двумя температурами" [36], а, кроме этого, динамику некоторых неньютоновских жидкостей [37], [40].

Часто при математическом моделировании классических задач математической физики производится решение начально–краевых задач, однако, еще в середине прошлого века была предложена редукция уравнения в частных производных, заданного в функциональных пространствах, к операторному уравнению, заданному в гильбертовых или банаховых пространствах. В диссертации данный подход, разработанный А. Фавини и

А. Яги, Г.А. Свиридюком и В.Е. Федоровым, А.Б. Альшином и М.О. Корпусовым [34] применяется к описанном выше уравнению (0.0.1). В результате редукции мы приходим к операторному уравнению

$$L\dot{u} = Mu + f. \tag{0.0.2}$$

Затем в предположении, что свободный член $f = f(t)$ определен на интервале $\mathfrak{I} = (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, будем искать (классическое) решение уравнения (0.0.1), удовлетворяющее условию Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} u(x,t) = 0(x), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \tag{0.0.3}$$

и многоточечному начально-конечному условию [7].

$$P_j(u(\tau_j) - u_j) = 0, \ j = \overline{0, n}, \tag{0.0.4}$$

Здесь для условия Неймана $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$, $x \in \partial\Omega$, – единичная нормаль внешняя к области Ω, а для многоточечной начально-конечной задачи $\tau_j \in \mathfrak{I}$ $(\tau_j < \tau_{j+1})$, $u_j \in \mathfrak{U}$, P_j – относительно спектральные проекторы (которые будут определены позже), а u_j – произвольные векторы из банахова пространства $\mathfrak{U}$.

Историография вопроса.

Наиболее широкое применение из всего многообразия гидродинамических моделей фильтрации жидкости в трещиновато-пористых пластах получило модельное представление Баренблатта–Желтова–Кочиной, в которой описание течения в трещиновато-пористой породе производится методами механики сплошных сред. Основные положения и уравнения теории нестационарных фильтраций в трещиновато-пористых пластах сформулированы в работе Г. Баренблатта, Ю.П. Желтова и И.Н. Кочиной, а затем развиты многими авторами.

Условие Неймана являются частным случаем условия "баланса потоков"для уравнений соболевского типа, рассмотренных на связном ориентированном графе,то есть в одномерном случае. Эта теория в настоящее

время активно развивается, первые же исследования были проведены в [43]. Уравнения соболевского типа с условиями Коши – Неймана в ограниченной области были изучены в [14], исследования же в случае замены условия Коши на многоточечное начально-конечное условие для такой задачи рассматривается впервые.

Перейдем теперь к обсуждению многоточечной начально-конечной задачи для уравнения соболевского типа. Впервые задача (0.0.4) была сформулирована в [9] (см. обзор [5]). Заметим, что если $n = 1$, то (0.0.4) становится более простой задачей

$$P_0(u(\tau_0) - u_0) = P_1(u(\tau_1) - u_1) = 0, \tag{0.0.5}$$

которая в [22] названа начально-конечной. Задача (0.0.3), (0.0.5) в последнее время весьма активно изучается в различных аспектах [5, 11, 46, 17, 41]. Если же в (0.0.4) положить $n = 0$, то задача (0.0.4) редуцируется к обобщенной задаче Шоуолтера – Сидорова [28]

$$P_0(u(\tau_0) - u_0) = 0, \tag{0.0.6}$$

которая уже сыграла важную роль в численных исследованиях экономических [16] и технических [33] моделей. Отметим еще, что задача (0.0.6) является обобщением классической задачи Коши (см. обзоры [22, 39])

$$u(\tau_0) = u_0.$$

Сказанное выше позволяет задачу (0.0.4) для уравнения (0.0.3) считать последовательным (через (0.0.5) и (0.0.6)) обобщением задачи Коши. Поскольку в дальнейшем будет изучаться задача (0.0.4) для уравнения (0.0.3), то скажем несколько слов о ситуации, в которой она возникла. Представим, что некоторый объект, например, конструкция из двутавровых балок, движется в околоземном пространстве. С поверхности Земли в различные моменты времени τ_k, $k = \overline{0, l}$, можно наблюдать только проекции этого объекта. Многоточечная начально-конечная задача (0.0.4) задает только

те проекции этого объекта из возможных, которые определены создателем этой конструкции.

Данная работа посвящена изучению разрешимости уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной (0.0.1) с условием Неймана (0.0.3) и многоточечным начально-конечным условием (0.0.4) при любом $n \in \mathbb{N}$. Для этого подробно доказывается обобщенная теорема о расщеплении пространств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ на инвариантные подпространства операторов L и M линейного уравнения соболевского типа с относительно p-ограниченным оператором в соответствии с расщеплением относительного спектра. Необходимость в обобщенной теореме о расщеплении возникла при изучении многоточечных начально-конечных условий (0.0.4).

Как известно, теорему о расщеплении в случае (L, p)-ограниченного и (L, p)-секториального операторов M первым сформулировал и доказал Г.А. Свиридюк [26]. А.В. Келлер эти результаты были развиты в [15], и применены к исследованию дихотомий решений [27]. Теорема о расщеплении в случае (L, p)-радиального оператора M применительно к дихотомиям решений появилась, например, в [20]. Впервые краткое доказательство обобщенной теоремы о расщеплении в случае (L, p)-ограниченного оператора M появилось в [9]. Случаи (L, p)-секториального и (L, p)-радиального операторов M рассмотрены соответственно в [44], [45].

Целью данной работы является исследование уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной с условием Неймана и многоточечным начально-конечным условием. Для того, чтобы достичь поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

– изучить основную литературу об уравнении Баренблатта–Желтова–Кочиной, об условии Неймана и о многоточечном начально-конечном условии;

– ознакомится с методами исследования уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной с начально-краевыми условиями;

– изучить разрешимость уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной с

начально-краевыми условиями;

– используя полученные результаты построить абстрактную схему исследования уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной с начально-краевыми условиями;

– найти решение уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной с условием Неймана и многоточечным начально-конечным условием.

Краткое содержание.

Кроме введения, заключения и списка литературы работа содержит две главы. Список литературы не претендует на полноту и отражает лишь вкусы и пристрастия автора. Первая глава является пропедевтической, в ней приводятся необходимые сведения теории (L, p)-ограниченных операторов и голоморфных вырожденных групп операторов, предложенной Г.А. Свиридюком [26] и развитой его учениками. Основные положения этой теории адаптированы к нашей ситуации. Здесь же содержится доказательство обобщенной теоремы о расщеплении в случае (L, p)-ограниченного оператора M, а так же доказательство однозначной разрешимости многоточечной начально-конечной задачи для уравнения соболевского типа в случае (L, p)-ограниченности оператора M.

Во второй главе работы исследуется разрешимость задачи Неймана (0.0.3) и многоточечной начально-конечной задачи (0.0.4) для уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной (0.0.1), заданного в ограниченной области. В первом параграфе приводится вывод уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной (0.0.1). Результаты второй главы опубликованы в [48]. Во втором параграфе второй главы приводится конкретный пример решения задачи Неймана и многоточечной начально-конечной задачи в прямоугольнике, для чего используются сведения из [12] о решении задачи Штурма – Лиувилля.

Благодарности.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю признательность профессору Георгию Анатольевичу Свиридюку за возможность прикоснуться к науке. Особую благодарность автор выражает своему научному руководителю Минзиле Алмасовне Сагадеевой за четкое и грамотное руководство, а также за доброе сердце и чуткость. Автор выражает признательность своему наставнику Софье Александровне Загребиной, а также коллективу кафедр уравнений математической физики и математического и компьютерного моделирования Южно-Уральского государственного университета за конструктивную критику, а так же своему супругу Краснову Илье Борисовичу за веру, терпение и юмор в сложных ситуациях.

1. АБСТРАКТНАЯ СХЕМА

1.1. Относительно ограниченные операторы

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (линейный и непрерывный) и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (линейный, замкнутый и плотно определенный).

Введем в рассмотрение L-резольвентное множество

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$$

и L-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C}\backslash\rho^L(M)$ оператора M ([42], п.2.1). Множество $\rho^L(M)$ всегда открыто, поэтому L-спектр $\sigma^L(M)$ всегда замкнут, а L-резольвента $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M голоморфна на $\rho^L(M)$.

Определение 1.1.1. [26] Оператор M называется спектрально ограниченным относительно оператора L (или просто (L,σ)-ограниченным), если

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Замечание 1.1.1. Пусть $\mathrm{dom}M = \mathfrak{U}$ и оператор L непрерывно обратим. Тогда оператор M (L,σ)-ограничен. Если же оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ компактен, то оператор M не будет (L,σ)-ограниченным.

Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, возьмем контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ и построим операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^L_\mu(M)d\mu \text{ и } Q = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma L^L_\mu(M)d\mu,$$

где $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ – правая, а $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ – левая L-резольвенты оператора M, причем интегралы понимаются в смысле Римана. По построению операторы $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$.

Лемма 1.1.1. Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, тогда операторы $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ – проекторы.

Лемма 1.1.2. Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда для любого $u \in \mathrm{dom}M$ вектор $Pu \in \mathrm{dom}M$.

Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{U}^1 = \mathrm{im}P$, $\mathfrak{F}^1 = \mathrm{im}Q$, и через L_k обозначим сужение оператора L на $\mathfrak{U}^k$, а через M_k обозначим сужение оператора M на $\mathrm{dom}M \cap \mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$. Из леммы 1.1.2 следует, что линеалы $\mathrm{dom}M_k = \mathrm{dom}M \cap \mathfrak{U}^k$ плотны в $\mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$.

Теорема 1.1.1. (Теорема Свиридюка о расщеплении). Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда
(i) операторы $L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0;\mathfrak{F}^0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{F}^1)$;
(ii) операторы $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^0;\mathfrak{F}^0)$, $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{F}^1)$;
(iii) существуют операторы $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$ и $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$.

Положим $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$, $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$.

Следствие 1.1.1. В условиях теоремы 1.1.1 для любых $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| > a$, имеем

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} Q.$$

Замечание 1.1.2. Пусть $G = L_0 M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0)$, $T = M_1 L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1)$ и выполнены условия следствия 1.1.1. Тогда

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k M_0^{-1} G^k(\mathbb{I} - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} L_1^{-1} T^{k-1} Q.$$

Определение 1.1.2. Для L-резольвенты $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M бесконечно удаленную точку будем называть
(i) устранимой особой точкой, если $H = \mathbb{O}$;
(ii) полюсом порядка $p \in \mathbb{N}$, если $H^p \neq \mathbb{O}$, а $H^{p+1} = \mathbb{O}$;
(iii) существенно особой точкой, если $H^p \neq \mathbb{O}$ при любом $p \in \mathbb{N}$.

Замечание 1.1.3. В дальнейшем удобно называть устранимую особую точку полюсом порядка нуль. Оператор M назовем (L,p)-ограниченным,

$p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, если он (L, σ)-ограничен, и точка ∞ – полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ его L-резольвенты.

Пусть $\ker L \neq \{0\}$, вектор $\varphi_0 \in \ker L \backslash \{0\}$ будем называть собственным вектором оператора L. Упорядоченное множество векторов $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$ называется цепочкой M-присоединенных векторов собственного вектора φ_0, если $L\varphi_{q+1} = M\varphi_q$, $q = 0, 1, \ldots$, $\varphi_l \notin \ker L \setminus \{0\}$, $l = 1, 2, \ldots$. Порядковый номер вектора в цепочке будем называть его высотой. Условимся собственные векторы оператора L называть M-присоединенными векторами высоты 0. Линейную оболочку M-присоединенных векторов оператора L назовем его M-корневым линеалом. M-корневым пространством будем называть замкнутый M-корневой линеал оператора L. Цепочка M-присоединенных векторов может быть бесконечной. В частности, она может быть заполнена нулями, если $\varphi_0 \in \ker M \bigcap \ker L$. Но она будет конечной в случае существования такого M-присоединенного вектора φ_q, что либо $\varphi_q \notin \mathrm{dom} M$, либо $M\varphi_q \notin \mathrm{im} L$. Высоту q последнего M-присоединенного вектора в конечной цепочке $\{\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_q\}$ будем называть длиной этой цепочки.

Напомним, что оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ называется фредгольмовым, если $\dim \ker L = \mathrm{codim}\ \mathrm{im} L < \infty$.

Теорема 1.1.2. Пусть оператор L-фредгольмов. Тогда следующие утверждения эквивалентны:
(i) оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$;
(ii) длины всех цепочек M-присоединенных векторов не превосходят p, и существует по крайней мере одна цепочка длины p.

1.2. Голоморфные вырожденные группы операторов

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Рассмотрим линейное однородное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu. \tag{1.2.1}$$

Решением $u = u(t)$ уравнения (1.2.1) будем называть вектор-функцию $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$, удовлетворяющую этому уравнению. Решение $u(t)$ уравнения (1.2.1) назовем решением задачи Коши для уравнения (1.2.1), если оно вдобавок удовлетворяет условию Коши

$$u(0) = u_0 \tag{1.2.2}$$

при некотором векторе $u_0 \in \mathfrak{U}$.

Определение 1.2.1. Множество $\mathfrak{P}$ назовем фазовым пространством уравнения (1.2.1), если

(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (1.2.1) лежит в $\mathfrak{P}$ как траектория (т.е. $u(t) \in \mathfrak{P}$ при любом $t \in \mathbb{R}$);

(ii) при любом $u_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (1.2.1), (1.2.2).

Теорема 1.2.1. Пусть оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда фазовым пространством уравнения (1.2.1) служит подпространство $\mathfrak{U}^1$.

• Действительно, в силу теоремы 1.1.1 уравнение (1.2.1) эквивалентно системе

$$H\dot{u}^0 = u^0, \quad u^1 = Su^1, \tag{1.2.3}$$

где $u^0 = (\mathbb{I} - P)u$, $u^1 = Pu$. Дифференцируя правое уравнение системы (1.2.3) и умножая слева на H, последовательно получим

$$0 = H^{p+1}u^{0(p+1)} = H^p u^{0(p)} = \ldots H\dot{u}^0 = u^0. \quad \bullet$$

Определение 1.2.1. Отображение $U^\cdot \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$ будем называть группой разрешающих операторов (или, коротко, группой) уравнения (1.2.1), если

(i) $U^s U^t = U^{s+t}$ при любых s, $t \in \mathbb{R}$;

(ii) для любого $u_0 \in \mathfrak{U}$ вектор-функция $u(t) = U^t u_0$ является решением уравнения (1.2.1).

Следуя традиции [13], отождествим группу с ее графиком $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$. Группу $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ назовем голоморфной, если она аналитически продолжима во всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с сохранением свойств (i), (ii); и

вырожденной, если ее единица U^0 является проектором. Для голоморфной вырожденной группы корректным является понятие ядра $\ker U^{\cdot} = \ker U^0 = \ker U^t$ при любом $t \in \mathbb{R}$ и образа $\mathrm{im} U^{\cdot} = \mathrm{im} U^0 = \mathrm{im} U^t$ при любом $t \in \mathbb{R}$. Голоморфную вырожденную группу $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ назовем разрешающей группой уравнения (1.2.1), если ее образ $\mathrm{im} U^{\cdot}$ совпадает с фазовым пространством уравнения (1.2.1).

Теорема 1.2.2. Пусть оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда существует единственная разрешающая группа уравнения (1.2.1), которая к тому же имеет вид

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} R^L_{\mu}(M) e^{\mu t} d\mu, \ t \in \mathbb{R},$$

где замкнутый контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$.

• Пусть контур $\gamma' = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r' > r\}$, тогда

$$U^s U^t = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma'} \int\limits_{\gamma} R^L_{\lambda}(M) R^L_{\mu}(M) e^{\mu t + \lambda s} d\lambda d\mu =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \left(\int\limits_{\gamma'} \frac{e^{\lambda s} d\lambda}{\lambda - \mu} \int\limits_{\gamma} R^L_{\mu}(M) e^{\mu t} d\mu + \int\limits_{\gamma'} R^L_{\lambda}(M) e^{\lambda s} d\lambda \int\limits_{\gamma} \frac{e^{\mu t} d\mu}{\mu - \lambda} \right) = U^{s+t}$$

в силу теоремы Фубини, теоремы о вычетах и правого относительно резольвентного тождества Гильберта (тождество (2.1.4) [42])

$$R^L_{\lambda} - R^L_{\mu}(M) = (\mu - \lambda) R^L_{\mu}(M) R^L_{\lambda}(M).$$

Теперь пусть $u_0 \in \mathfrak{U}$, тогда

$$L \frac{d}{dt}(U^t u_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \mu L R^L_{\mu}(M) u_0 e^{\mu t} d\mu = \frac{1}{2\pi i} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\gamma} (\mu L - M)(\mu L - M)^{-1} L u_0 e^{\mu t} d\mu + \int\limits_{\gamma} M R^L_{\mu}(M) u_0 e^{\mu t} d\mu \right) = M(U^t u_0).$$

Далее, в силу теоремы 1.1.1

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} R^L_{\mu}(M) e^{\mu t} d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} (\mu H - \mathbb{I})^{-1} H (\mathbb{I} - P) e^{\mu t} d\mu +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}(\mu\mathbb{I}-S)^{-1}Pe^{\mu t}d\mu=\mathbb{O}(\mathbb{I}-P)+e^{tS}P.$$

Поэтому единственность группы $\{U^t : t\in\mathbb{R}\}$ вытекает из единственности группы $\{e^{tS} : t\in\mathbb{R}\}$. Кроме того, $U^0=P$. •

Единственная разрешающая группа уравнения (1.2.1) может оказаться далеко не единственной голоморфной вырожденной группой данного уравнения. Введем в рассмотрение условие

$$\begin{cases} \sigma^L(M)=\bigcup\limits_{j=0}^{n}\sigma_j^L(M),\ n\in\mathbb{N},\ \text{причем}\ \sigma_j^L(M)\neq\emptyset,\ \text{существует} \\ \text{замкнутый контур}\ \gamma_j\subset\mathbb{C},\ \text{ограничивающий область}\ D_j\supset\sigma_j^L(M), \\ \text{такой, что}\ \overline{D_j}\cap\sigma_0^L(M)=\emptyset,\ \overline{D_k}\cap\overline{D_l}=\emptyset\ \forall j,k,l=\overline{1,n}, k\neq l. \end{cases} \tag{1.2.4}$$

Теорема 1.2.3. Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p\in\{0\}\cup\mathbb{N}$, и выполнено условие (1.2.4). Тогда существуют голоморфные вырожденные группы уравнения (1.2.1).

• Построим интегралы типа Данфорда – Тейлора (понимаемые в смысле Римана)

$$U_j^t=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j}R_\mu^L(M)e^{\mu t}d\mu, j=\overline{1,n}.$$

Затем, рассуждая аналогично теореме 1.2.2, получим требуемое. •

Следствие 1.2.1. Пусть выполнены условия теоремы 1.2.3. Тогда
(i) $U^tU_j^s=U_j^sU^t=U_j^{s+t}$ при всех s, $t\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,n}$;
(ii) $U_k^tU_l^s=U_l^sU_k^t=\mathbb{O}$ при всех s, $t\in\mathbb{R}$, k, $l=\overline{1,n}$, $k\neq l$.

$$\bullet\quad (i)\quad U^tU_j^s=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\gamma}\int\limits_{\gamma_j}R_\mu^L(M)R_\lambda^L(M)e^{\mu t+\lambda s}d\mu d\lambda=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\left(\int\limits_{\gamma}\frac{e^{\mu t}d\mu}{\mu-\lambda}\int\limits_{\gamma_j}R_\lambda^L(M)e^{\lambda s}d\lambda+\int\limits_{\gamma}R_\mu^L(M)e^{\mu t}d\mu\int\limits_{\gamma_j}\frac{e^{\lambda s}d\lambda}{\lambda-\mu}\right)=U_j^{s+t}$$

в силу теоремы Фубини, теоремы о вычетах и правого относительно резольвентного тождества Гильберта. Второе равенство в (i) и доказываются

аналогично.

(ii) Теперь, применяя те же теоремы и то же тождество, что и в (i), получим

$$U_k^t U_l^s = \frac{1}{(2\pi i)^2}\left(\int\limits_{\gamma_k} \frac{e^{\mu t}d\mu}{\mu-\lambda}\int\limits_{\gamma_l} R_\lambda^L(M)e^{\lambda s}d\lambda + \int\limits_{\gamma_k} R_\mu^L(M)e^{\mu t}d\mu\int\limits_{\gamma_l}\frac{e^{\lambda s}d\lambda}{\lambda-\mu}\right) = \mathbb{O},$$

если $k \neq l$. •

Положим $U_0^t = U^t - \sum\limits_{k=1}^{n} U_k^t$, $t \in \mathbb{R}$.

Следствие 1.2.2. Пусть выполнены условия теоремы 1.2.3. Тогда $\{U_0^t : t \in \mathbb{R}\}$ – голоморфная вырожденная группа уравнений (1.2.1).

• Голоморфность группы $\{U_0^t : t \in \mathbb{R}\}$ очевидна. Докажем выполнение свойства (i) определения 1.2.1

$$U_0^s U_0^t = (U^s - \sum_{k=1}^{n} U_k^s)(U^t - \sum_{l=1}^{n} U_l^t) = U^{s+t} - \sum_{k=1}^{n} U_k^s U^t -$$

$$- \sum_{l=1}^{n} U^s U_l^t + \sum_{k,l=1}^{n} U_k^s U_l^t = U^{s+t} - 2\sum_{k=1}^{n} U_k^{s+t} + \sum_{k=1}^{n} U_k^{s+t} = U_0^{s+t}$$

в силу теоремы 1.2.2, 1.2.3 и следствия 1.2.1. •

Замечание 1.2.1. Рассмотрим единицы $P_j = U_j^0$, $j = \overline{0,n}$, построенных (в силу условия (1.2.4)) голоморфных вырожденных групп $\{U_j^t : t \in \mathbb{R}\}$, $j = \overline{0,n}$ уравнения (1.2.1). Легко показать, опираясь на результаты следствия 1.2.1, что

(i) $PP_j = P_jP = P_j$, $j = \overline{0,n}$;

(ii) $P_kP_l = P_lP_k = \mathbb{O}$, k, $l = \overline{0,n}$, $k \neq l$.

Например, (i)

$$P_jP = (2\pi i)^{-2}\int\limits_{\gamma_j}\int\limits_{\gamma} R_\mu^L(M)R_\lambda^L(M)d\mu d\lambda =$$

$$= (2\pi i)^{-2}\left(\int\limits_{\gamma_j}\frac{d\lambda}{\lambda-\mu}\int\limits_{\gamma} R_\mu^L(M)d\mu + \int\limits_{\gamma_j} R_\lambda^L(M)d\lambda\int\limits_{\gamma}\frac{d\mu}{\mu-\lambda}\right).$$

Отсюда, в силу теоремы о вычетах, $P_jP = P_j$.

(ii)

$$P_kP_l = (2\pi i)^{-2} \int\limits_{\gamma_k} \int\limits_{\gamma_l} R^L_\mu(M) R^L_\lambda(M) d\mu d\lambda =$$

$$= (2\pi i)^{-2} \left(\int\limits_{\gamma_k} \frac{d\lambda}{\lambda - \mu} \int\limits_{\gamma_l} R^L_\mu(M) d\mu + \int\limits_{\gamma_k} R^L_\lambda(M) d\lambda \int\limits_{\gamma_l} \frac{d\mu}{\mu - \lambda} \right) = \mathbb{O}$$

в силу теоремы о вычетах и правого L-резольвентного тождества.

1.3. Относительно спектральные проекторы

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, причем выполнено условие (1.2.4). Рассмотрим проекторы P_j, $j = \overline{j, n}$, которые в силу теоремы 1.2.3 и замечания 1.2.1 имеют вид

$$P_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} R^L_\mu(M) d\mu, \ j = \overline{1, n}.$$

Построим операторы

$$Q_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} L^L_\mu(M) d\mu, \ j = \overline{1, n},$$

которые по построению лежат в пространстве $\mathcal{L}(\mathfrak{F})$.

Лемма 1.3.1. Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, причем выполнено условие (1.2.4), а оператор M (L, σ)-ограничен. Тогда операторы $Q_j : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$, $j = \overline{1, n}$, – проекторы, причем
(i) $QQ_j = Q_jQ = Q_j$, $j = \overline{1, n}$;
(ii) $Q_kQ_l = Q_lQ_k = \mathbb{O}$, k, $l = \overline{1, n}$, $k \neq l$.

- $$QQ_j = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma} \int\limits_{\gamma_j} L^L_\mu(M) L^L_\lambda(M) d\mu d\lambda =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \left(\int\limits_{\gamma} \frac{d\mu}{\mu - \lambda} \int\limits_{\gamma_j} L^L_\lambda(M) d\lambda + \int\limits_{\gamma} L^L_\mu(M) d\mu \int\limits_{\gamma_j} \frac{d\lambda}{\lambda - \mu} \right) = Q_j$$

в силу теоремы Фубини, теоремы о вычетах и левого относительно резольвентного тождества Гильберта ([42])

$$L_\lambda^L(M) - L_\mu^L(M) = (\mu - \lambda) L_\mu^L(M) L_\lambda^L(M).$$

Второе равенство в (i) и доказываются аналогично.

(ii) Теперь, применяя те же теоремы и то же тождество, что и в (i), получим

$$Q_k Q_l = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma_k} \int\limits_{\gamma_l} L_\mu^L(M) L_\lambda^L(M) d\mu d\lambda =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \left(\int\limits_{\gamma_k} \frac{d\lambda}{\lambda - \mu} \int\limits_{\gamma_l} L_\mu^L(M) d\mu + \int\limits_{\gamma_k} L_\lambda^L(M) d\lambda \int\limits_{\gamma_l} \frac{d\mu}{\mu - \lambda} \right) = \mathbb{O},$$

если $k \neq l$. •

Замечание 1.3.1. Построим оператор $Q_0 = Q - \sum\limits_{k=1}^{n} Q_k$, который тоже является проектором, причем

(i) $QQ_0 = Q_0 Q = Q_0$;

(ii) $Q_0 Q_j = Q_j Q_0 = \mathbb{O}$, $j = \overline{1, n}$.

Учитывая сказанное в замечаниях 1.2.1, 1.3.1 и лемме 1.3.1, назовем проекторы P_j и Q_j, $j = \overline{0, n}$, относительно спектральными проекторами.

Введем в рассмотрение подпространства $\mathfrak{U}^{1j} = \mathrm{im} P_j$, $\mathfrak{F}^{1j} = \mathrm{im} Q_j$, $j = \overline{0, n}$. По построению $\mathfrak{U}^1 = \bigoplus\limits_{j=0}^{n} \mathfrak{U}^{1j}$ и $\mathfrak{F}^1 = \bigoplus\limits_{j=0}^{n} \mathfrak{F}^{1j}$. Через L_{1j} обозначим сужение оператора L на $\mathfrak{U}^{1j}$, $j = \overline{0, n}$, а через M_{1j} обозначим сужение оператора M на $\mathrm{dom} M \cap \mathfrak{U}^{1j}$, $j = \overline{0, n}$. Поскольку, как нетрудно показать, $P_j \varphi \in \mathrm{dom} M$, если $\varphi \in \mathrm{dom} M$, то область определения $\mathrm{dom} M_{1j} = \mathrm{dom} M \cap \mathfrak{U}^{1j}$ плотна в $\mathfrak{U}^{1j}$, $j = \overline{0, n}$.

Теорема 1.3.1. (Обобщенная спектральная теорема). Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, а оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, причем выполнено условие (1.2.4). Тогда

(i) операторы $L_{1j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^{1j}; \mathfrak{F}^{1j})$, $M_{1j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^{1j}; \mathfrak{F}^{1j})$, $j = \overline{0, n}$;

(ii) существуют операторы $L_{1j}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^{1j}; \mathfrak{U}^{1j})$, $j = \overline{0, n}$.

• Доказательство теоремы идейно опирается на доказательство теоремы Свиридюка о расщеплении (теорема 1.1.1), поэтому приводится в сокращенном виде.

$$(i) \qquad L_{1j}P_j = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j} L_{1j}(\mu L_{1j} - M_{1j})^{-1}L_{1j}P_j d\mu = Q_j L_{1j} P_j,$$

где $j = \overline{0,n}$. Далее, пусть $\varphi \in \mathrm{dom} M_{1j}$, тогда

$$M_{1j}P_j\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j} M_{1j}(\mu L_{1j} - M_{1j})^{-1}L_{1j}P_j\varphi d\mu = Q_j M_{1j} P_j \varphi.$$

Поскольку

$$M_{1j}(\mu L_{1j} - M_{1j})^{-1}L_{1j} = \mu L_{1j}(\mu L_{1j} - M)^{-1}L_{1j} - L_{1j},$$

и в правой части стоит непрерывный оператор, то плотно определенный непрерывный оператор $M_{1j}P_j$ может быть единственным образом продолжен до непрерывного оператора, определенного на всем подпространстве $\mathfrak{U}^{1j}$. Через $M_{1j}P_j$ обозначим это продолжение, $j = \overline{0,n}$.

(ii) Поскольку

$$L_{1j}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j}(\mu L - M)^{-1}Q_j d\mu\right) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j} L_{1j}(\mu L_{1j} - M_{1j})^{-1}Q_j d\mu = Q_j$$

и

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j}(\mu L - M)^{-1}Q_j d\mu\right)L_{1j} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j}(\mu L_{1j} - M_{1j})^{-1}L_{1j}P_j d\mu = P_j,$$

то оператор $L_{1j}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^{1j};\mathfrak{U}^{1j})$ есть сужение оператора

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j}(\mu L - M)^{-1}Q_j d\mu$$

на подпространство $\mathfrak{F}^{1j}$, $j = \overline{0,n}$. •

В условиях теоремы 1.3.1 существуют операторы $S_j = L_{1j}M_{1j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^{1j})$, $j = \overline{0,n}$. Построим голоморфные группы операторов $e^{tS_j} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{S_j^k}{k!} t^k$, $t \in \mathbb{R}$, $j = \overline{0,n}$.

Следствие 1.3.1. Пусть выполнены условия теоремы 1.3.1. Тогда $U_j^t = e^{tS_j}P_j$, $j = \overline{1,n}$.

• Поскольку

$$U_j^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j} (\mu L - M)^{-1} L P_j e^{\mu t} d\mu = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j} (\mu \mathbb{I} - S_j)^{-1} e^{\mu t} d\mu P_j = e^{tS_j}P_j,$$

при $j = \overline{1,n}$, то утверждение доказано. •

1.4. Многоточечная начально-конечная задача

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, а оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Кроме того, выполнено условие (1.2.4). Возьмем $\tau_j \in \mathfrak{I}$ $(\tau_j < \tau_{j+1})$, $u_j \in \mathfrak{U}$,, векторы $u_j \in \mathfrak{U}$, $j = \overline{0,n}$, вектор-функцию $f \in C^\infty(\mathfrak{I};\mathfrak{F})$ и рассмотрим линейное неоднородое уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f. \tag{1.4.1}$$

Вектор-функцию $u \in C^\infty(\mathfrak{I};\mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (1.4.1), назовем решением уравнения (1.4.1). Решение $u = u(t)$, $t \in \mathfrak{I}$ уравнения (1.4.1), удовлетворяющее условиям

$$P_j(u(\tau_j) - u_j) = 0, \quad j = \overline{0,n}, \tag{1.4.2}$$

назовем решением многоточечной начально-конечной задачи для уравнения (1.4.1). Здесь проекторы P_j, $j = \overline{0,n}$, взяты из п.1.3.

Теорема 1.4.1. Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ причем выполнено условие (1.2.4). Тогда для любых $f \in C^\infty(\mathfrak{I};\mathfrak{F}))$, $u_j \in \mathfrak{U}$, $j = \overline{0,n}$ существует единственное решение задачи (1.4.1), (1.4.2), которое к тому же

имеет вид

$$u(t) = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) f^{(k)}(t) + \\ + \sum_{j=0}^{n} U_j^{t-\tau_j} u_j + \sum_{j=0}^{n} \int_{\tau_j}^{t} U_j^{t-s} L_{1j}^{-1} Q_j f(s) ds. \tag{1.4.3}$$

• Уравнение (1.4.1) посредством теорем 1.1.1 и 1.3.1 сведем к системе

$$H\dot{u}^0 = u^0 + M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) f, \ \dot{u}^{1j} = S_j u^{1j} + L_{1j}^{-1} Q_j f, \ j = \overline{0, n}, \tag{1.4.4}$$

где $u^0 = (\mathbb{I} - P)u$, $u^{1j} = P_j u$, $j = \overline{0, n}$, и каждое уравнение определено на "своем" подпространстве. Из первого уравнения (1.4.4), последовательно его дифференцируя и умножая слева на H, в силу нильпотентности оператора H получим

$$u^0(t) = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) f^{(k)}(t). \tag{1.4.5}$$

Заметив, что проекторы P_j являются единичными операторами на $\mathfrak{U}_j^1$, $j = \overline{0, n}$, в силу (1.4.2) поставим задачи Коши для остальных уравнений (1.4.4)

$$\dot{u}^{1j} = S_j u^{1j} + L_{1j}^{-1} Q_j f, \quad u^{1j}(\tau_j) = P_j u_j, \quad j = \overline{0, n}. \tag{1.4.6}$$

Последовательно решая задачи (1.4.6), получим

$$u^{1j}(t) = U_j^{t-\tau_j} u_j + \int_{\tau_j}^{t} U_j^{t-s} L_{1j}^{-1} Q_j f(s) ds, \ j = \overline{0, n}. \tag{1.4.7}$$

Складывая (1.4.5) и (1.4.7), получим (1.4.3). Единственность решения задачи (1.4.1), (1.4.2) в силу приведенного доказательства очевидна. •

2. ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БАРЕНБЛАТТА–ЖЕЛТОВА–КОЧИНОЙ

2.1. Вывод уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной

В этом пункте будем следовать [1]. Пусть жидкость фильтруется в среде, состоящей из пористых блоков, разделенных трещинами. Выберем масштаб длины так, чтобы объём, в котором протекает интересующий нас процесс, был велик по сравнению с размером блока. Закон фильтрации (закон Дарси) представим в виде

$$u_i \equiv -\frac{K_{ij}}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x_j} \equiv -\frac{h^3}{\mu l}K^0_{ij}\frac{\partial P}{\partial x_j}, \quad i,j = 1,2,3,...,n \tag{2.1.1}$$

где u_i – компоненты вектора скорости фильтрации U, μ – вязкость, h – среднее раскрытие трещин, l – размер блока, K^0_{ij} – тензор трещинной проницаемости. Пусть давление в трещинах P_1, в блоках P_2. Составим уравнение баланса жидкости в трещинах

$$\frac{\partial(m_1\rho)}{\partial t} + div(\rho\vec{u}) - q = 0 \tag{2.1.2}$$

и в блоках, пренебрегая фильтрационным потоком,

$$\frac{\partial(m_2\rho)}{\partial t} + q = 0, \tag{2.1.3}$$

где m_1 – трещинноватая пористость (равная отношению объёма пор в блоках к общему объёму), ρ – плотность жидкости,

$$q = \rho\alpha\frac{P_2 - P_1}{\mu} = \alpha\frac{\rho K_2}{l^2}\cdot\frac{P_2 - P_1}{\mu}, \tag{2.1.4}$$

α – безразмерный коэффициент, характеризующий интенсивность обмена жидкостью блоков и трещин,K_2 – проницаемость блоков. Трещинноватая пористость m_1 мала, ею можно пренебречь,а следовательно и $\dfrac{\partial(m_1\rho)}{\partial t} = 0$; а m_2 – пористость блоков – есть функция обоих давлений, но влиянием на m_2 давления P_1 можно пренебречь. Берем линейное приближение

$$\frac{\partial m_2}{\partial t} = \beta_{22}\,\frac{\partial P_2}{\partial t}, \tag{2.1.5}$$

где β_{22} постоянная величина. Кроме того, для капельных жидкостей имеет место соотношение

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \beta_* \left(P_* - P_0\right)\right), \tag{2.1.6}$$

где $\beta_* = \text{const}$, а $P_* = P_{1,2}$ в зависимости от того, где оно рассматривается. Подставляя (2.1.1), (2.1.4) – (2.1.6) в (2.1.2), (2.1.3) получаем

$$\rho_0 div(\vec{u}) - \rho_0 \alpha \frac{P_2 - P_1}{\mu} = 0 \tag{2.1.7}$$

$$\frac{\partial m_2}{\partial t}\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} m_2 + \rho_0 \alpha \frac{P_2 - P_1}{\mu} = 0 \tag{2.1.8}$$

Но

$$\rho_0 div(\vec{u}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{K_{ij}}{\mu}\frac{\partial P_1}{\partial x_j}\right) = \frac{\rho_0}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}\frac{\partial P1}{\partial x_i}\right),$$

отсюда

$$\frac{\rho_0}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}\frac{\partial P_1}{\partial x_i}\right) - \rho_0 \alpha \frac{P_2 - P_1}{\mu} = 0, \tag{2.1.9}$$

$$\frac{\partial m_2}{\partial t}\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} m_2 + \rho_0 \alpha \frac{P_2 - P_1}{\mu} = 0, \tag{2.1.10}$$

Подставляя в (1.3.2) (2.1.5) и

$$m_{20}\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial\left(\rho_0 + \rho_0 \beta_*(P_2 - P_0)\right)}{\partial t} = m_{20}\rho_0\beta_*\frac{\partial P_2}{\partial t};$$

Получаем

$$\frac{\rho_0}{\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}\frac{\partial P_1}{\partial x_j}\right) - \rho_0 \alpha \frac{P_2 - P_1}{\mu} = 0, \tag{2.1.11}$$

$$\rho_0\left(\beta_{22} + m_{20}\beta_*\right)\frac{\partial P_2}{\partial t} + \rho_0 \alpha \frac{P_2 - P_1}{\mu}, \tag{2.1.12}$$

где m_{20} пористость блоков при стандартном давлении P_0 (в формуле (2.1.5) полагаем $dm_2 \approx \Delta m_2 = m_2 - m_{20}$). Считаем среду однородной и изотропной, тогда $K_{ij} = K_1\delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$, и (2.1.7), (2.1.8) получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}\frac{\partial P_1}{\partial x_j}\right) = K_1\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_i}\right) = K_1\frac{\partial^2 P_1}{\partial x_i} = K_1\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 P_1}{\partial x_i} = K_1\Delta P_1.$$

Так как $\rho_0 \neq 0$ можно разделить обе части уравнений (1.7) и (1.8), которые преобразуются к виду

$$\frac{K_1}{\mu}\Delta P_1 - \rho_0\alpha\frac{P_2 - P_1}{\mu} = 0, \tag{2.1.13}$$

$$(\beta_{22} + m_{20}\beta_*)\frac{\partial P_2}{\partial t} + \rho_0\alpha\frac{P_2 - P_1}{\mu} = 0. \tag{2.1.14}$$

Выражая P_2 из уравнения (2.1.9) и подставляя в (2.1.10), получим

$$(1 - \eta\Delta)\,\frac{\partial P_1}{\partial t} = \kappa\Delta P_1, \tag{2.1.15}$$

где

$$\kappa = \frac{K_1}{\mu\left(\beta_{22} + m_{20}\right)\beta_*}$$

– коэффициент пьезопроводности трещиноватой породы, а $\eta = \frac{K_1}{\alpha}$.

Для уравнений движения жидкости в среде с двойной пористостью ($m_1 \neq 0$), частным случаем которых является получившиеся уравнения (2.1.9),(2.1.10), физический смысл допускает существование соболевских уравнений с операторами при производной по времени, не являющихся положительно определенными.

2.2. Задача Штурма–Лиувилля для оператора Лапласа в прямоугольнике

Пусть $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi\}$

Рассмотрим

$$\begin{cases} u_t - æ\Delta u_t = \nu\Delta u, & (2.2.1)\\ u = u(x, y, t), \quad (x, y) \in \Omega, t \in \mathbb{R}, & (2.2.2)\\ \frac{\partial}{\partial n}u(x, t) = 0(x), & (2.2.3)\\ \|u\| = 1 & (2.2.4)\end{cases}$$

$u = u(x, y, t)$ – неизвестная функция в уравнении (2.2.1), $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – двумерный оператор Лапласа.

Решение уравнения будем искать в виде

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t), \tag{2.2.5}$$

и условиями для функций $X(x), Y(y)$

$$\begin{cases} X(x) \neq 0, \\ Y(y) \neq 0, \\ T(t) \neq 0, \end{cases} \tag{2.2.6}$$

где функция $X(x)$ – функция только переменного x, $Y(y)$ – функция переменного только y, $T(t)$ – функция только переменного t. Найдем собственные числа и собственные функции оператора Лапласа

$$\Delta u = \lambda u$$

в квадрате $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi\}$, причем на границе квадрата выполняются следующие условия

$$u'(x, 0) = 0,$$

$$u'(0, y) = 0,$$

$$u'(\pi, y) = 0,$$

$$u'(x, \pi) = 0.$$

Тогда уравнение Лапласа на плоскости имеет вид:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = \lambda X(x)Y(y) \tag{2.2.7}$$

Разделим переменные в уравнении (2.2.7), поделив его на $X(x)Y(y)$, и получим

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda - \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \mu$$

Для нахождения функций $X(x)$ и $Y(y)$ сформулируем задачу Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа в прямоугольнике Ω

$$\begin{cases} X''(x) = \mu X(x) & (2.2.8) \\ Y''(y) = (\lambda - \mu)Y(y) & (2.2.9) \end{cases}$$

По условию (2.2.3) производная функции $u(x,y)$ на границе квадрата $\partial\Omega$ равна нулю. То есть

$$\begin{aligned}
&\text{на нижней границе квадрата} \quad u'(x,0)=0 \quad \Rightarrow \quad Y'(0)=0,\\
&\text{на левой границе квадрата} \quad u'(0,y)=0 \quad \Rightarrow \quad X'(0)=0,\\
&\text{на правой границе квадрата} \quad u'(\pi,y)=0 \quad \Rightarrow \quad X'(\pi)=0,\\
&\text{на нижней границе квадрата} \quad u'(x,\pi)=0 \quad \Rightarrow \quad Y'(\pi)=0.
\end{aligned}$$

Тогда условие (2.2.8) примет вид

$$\begin{cases} X''(x)=\mu X(x), \\ X'(0)=X'(\pi)=0. \end{cases} \tag{2.2.10}$$

А условие (2.2.9)

$$\begin{cases} Y''(y)=(\lambda-\mu)Y(y), \\ Y'(0)=Y'(\pi)=0. \end{cases} \tag{2.2.11}$$

Найдём те значения параметров μ, при которых существуют нетривиальные решения задач (2.2.10). Также найдём решения $X(x)$ и $Y(y)$. Для этого рассмотрим три случая относительно параметра μ.

1) При $\mu>0$ задача не имеет нетривиальных решений, так как общее решение для задачи (2.2.10) имеет вид

$$X(x)=C_1e^{\sqrt{\mu}x}+C_2e^{-\sqrt{\mu}x}.$$

Граничные условия дают

$$\begin{aligned} u'(0,t)&=X'(0)T(t)=0,\\ u'(\pi,t)&=X'(\pi)T(t)=0. \end{aligned}$$

Найдем

$$X'(x)=C_1\sqrt{\mu}e^{\sqrt{\mu}x}-C_2\sqrt{\mu}e^{-\sqrt{\mu}x}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} X'(0)&=(C_1-C_2)^{\mu}=0,\\ X'(\pi)&=(C_1e^{\sqrt{\mu}\pi}-C_2e^{-\sqrt{\mu}\pi}\sqrt{\mu}=0, \end{aligned}$$

то есть

$$C_1 = C_2 \quad \text{и} \quad C_1(e^{\sqrt{\mu}\pi} + e^{-\sqrt{\mu}\pi}) = 0.$$

Но в рассматриваемом случае степень экспоненты – действительна и положительна, так что $e^{\sqrt{\mu}\pi} + e^{-\sqrt{\mu}\pi} \neq 0$. Поэтому

$$C_1 = 0 \quad \text{и} \quad C_2 = 0.$$

Это значит, что $X(x) \equiv 0$. Получено противоречие условию (2.2.4).

2) При $\mu = 0$ существует единственное нетривиальное решение. В этом случае решение задачи Штурма – Лиувилля (2.2.10) имеет вид

$$X(x) = C_1 x + C_2, \quad \text{причем } X'(x) = C_1,$$

граничные условия дают

$$X'(0) = C_1 = 0,$$
$$X'(\pi) = C_2 = 0.$$

При этом $C_2 \in \mathbb{R}$.

3) При $\mu < 0$ общее решение уравнения может быть записано в виде

$$X(x) = D_1 \cos\sqrt{-\mu}x + D_2 \sin\sqrt{-\mu}x,$$

производная которого

$$X'(x) = \sqrt{-\mu}(-D_1 \sin\sqrt{-\mu}x + D_2 \cos\sqrt{-\mu}x),$$

граничные условия дают

$$X'(0) = \sqrt{-\mu}D_2 = 0,$$
$$X(\pi) = \sqrt{-\mu}D_1 \sin\sqrt{-\mu}\pi = 0.$$

Если выполняется условие (2.2.6), то $D_1 \neq 0$, поэтому

$$\sin\sqrt{-\mu}\pi = 0,$$

что соответствует

$$\sqrt{-\mu} = \frac{\pi k}{\pi} = k, \quad \text{при} \quad k = 1, 2, 3, \ldots \quad .$$

Следовательно, нетривиальные решения задачи (2.2.10) возможны лишь при значениях

$$\mu = \mu_k = -k^2, \quad k \in \{0\} \cup \mathbb{N} \tag{2.2.12}$$

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_k(x) = D_k \cos kx,$$

где D_1 - произвольная постоянная. Аналогично решаем систему (2.2.11) и получаем решение функции

$$Y_n(y) = \sum D_n \cos(ny), \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

Поэтому значение параметров

$$\mu_n = -k^2, \tag{2.2.13}$$

$$\lambda - \mu = -n^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{k,n} = -(n^2 + k^2). \tag{2.2.14}$$

Таким образом, собственные числа в квадрате – это сумма собственных чисел по осям. Пользуясь формулой (2.2.6), получим, что

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} D_{k,n} X_k(x) Y_n(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} D_{k,n} \cos kx \cos ny. \tag{2.2.15}$$

Постоянные $D_{k,n}$ подберем так, чтобы выполнялось условие (2.2.4). Для этого вычислим

$$\|D_{k,n} \cos kx \cos ny\| = \sqrt{\int\int_K (D_{k,n} \cos kx \cos ny)^2 dxdy} =$$

$$= D_{k,n} \sqrt{\int_0^{\pi} (\cos kx)^2 dx \int_0^{\pi} (\cos ny)^2 dy} = D_{k,n} \sqrt{\frac{\pi^2}{4}}.$$

Поскольку $\|u\| = 1$, то $D_{k,n} = \dfrac{2}{\pi}$.

Значит,

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos kx \cos ny, \tag{2.2.16}$$

$$\lambda_{k,n} = -(n^2 + k^2).$$

2.3. Условие Неймана и многоточечная начально-конечная задача для уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – ограниченная область с границей класса C^∞. Будем рассматривать уравнение Баренблатта-Желтова–Кочиной

$$u_t - æ\Delta u_t = \nu\Delta u + f \tag{2.3.5}$$

и условие Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} u(x,t) = 0(x), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}, \tag{2.3.6}$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$, $x \in \partial\Omega$, – единичная нормаль внешняя к области Ω.

Редуцируем задачу (2.3.1) с условием (2.3.2) к уравнению соболевского типа вида

$$L\dot{u} = Mu + f. \tag{2.3.7}$$

.

Для этого положим

$$\mathfrak{U} = \left\{ u \in W_2^{m+2} : \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ на } \partial\Omega \right\}, \ \mathfrak{F} = W^m, \ m \in \mathbb{N}.$$

Все функциональные пространства определены на области Ω. Зададим операторы $L = \mathbb{I} - æ\Delta$, $M = \nu\Delta$, причем L, $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ при всех $æ \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\nu \in \mathbb{R}$, и оператор L – фредгольмов (т.е. $\mathrm{ind}L = 0$).

Обозначим через $\{\lambda_k\}$ множество собственных значений однородной задачи Неймана для оператора Лапласа Δ в области Ω, занумерованное по невозрастанию с учетом кратности, а через $\{\varphi_k\}$ – ортонормированное (в смысле L_2) множество соответствующих собственных функций. Отметим, что первое собственное значение однородной задачи Неймана для оператора Лапласа в области Ω равно нулю, а соответствущая ему собственная функция, равна константа.

Лемма 2.3.1. [43] При всех $æ$, $\nu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ оператор M $(L,0)$-ограничен.

Отметим, что

$$\ker L = \begin{cases} \{0\}, & \text{если} \quad æ^{-1} \notin \{\lambda_k\}, \\ \mathrm{span}\{\varphi_l : æ^{-1} = \lambda_l\}. \end{cases}$$

По Лемме 1.1.1 построим проектор

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, \quad \text{если} \quad æ^{-1} \notin \{\lambda_l\}, \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{l:(æ^{-1}=\lambda_l)} \langle \cdot, \varphi_l \rangle \varphi_l, \quad \text{если} \quad æ^{-1} \in \{\lambda_l\}, \end{cases}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в L^2. Проектор Q имеет тот же вид, но определен на пространстве $\mathfrak{F}$. Относительный спектр $\sigma^L(M)$ оператора M имеет вид

$$\sigma^L(M) = \left\{ \mu_k = \frac{\nu \lambda_k}{1 - æ\lambda_k}, \, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Выберем части L-спектра оператора M $\sigma_j^L(M)$, $j = \overline{0, n}$, так, чтобы выполнялось условие (1.2.4) (понятно, что это можно сделать не одним способом). Построим проекторы

$$P_j = \sum_{k:\mu_k \in \sigma_j^L(M)} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, \;\; j = \overline{0, n}.$$

Возьмем $\tau_j \in \mathbb{R}$, $(\tau_j < \tau_{j+1})$, $u_j \in \mathfrak{U}$, $j = \overline{0, n}$, $f \in C^\infty((a, b); \mathfrak{F})$ и для задачи (2.3.1), (2.3.2) рассмотрим многоточечную начально-конечную задачу

$$\sum_{k:\mu_k \in \sigma_j^L(M)} \langle u_j(\tau^j, x) - u^j(x), \varphi_k \rangle \varphi_k = 0, \;\; j = \overline{0, n}. \tag{2.3.1}$$

В силу леммы 2.3.1 и теоремы 1.4.1 вытекает

Теорема 2.3.2. Пусть выполнено условие (A). При любых $æ \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $u_j \in \mathfrak{U}$, $j = \overline{0, n}$, уравнение (0.3) с условиями (0.4), (2.2) имеет единственное решение $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$, которое к тому же имеет вид

$$u(t) = (Q - \mathbb{I}) f(t) + \sum_{j=0}^{n} \sum_{\mu_k \in \sigma_j^L(M)} e^{\mu_k (t - \tau_j)} \langle u_j, \varphi_k \rangle \varphi_k +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n} \sum_{\mu_k \in \sigma_j^L(M)} \int_{\tau_j}^{t} e^{\mu_k (t-s)} \langle f(s), \varphi_k \rangle \varphi_k ds.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в первой главе приводится алгоритм решения задачи Неймана и многоточечной начально-конечной задачи для уравнений соболевского типа с (L, p)-органиченным оператором M. Полученный алгоритм применяется для исследования конкретных детерминированных вырожденных моделей соответствующего класса. А именно, в работе доказывается однозначная разрешимость уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной в области, а также уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной в области с условием Неймана и многоточечными начально-конечными условиями. Полученные результаты иллюстрируются конкретными примерами.

В дальнейшем, полученные результаты можно применять при разработке численных методов решения уравнений Баренблатта–Желтова–Кочиной в области с условием Неймана и многоточечными начально-конеч--ными условиями. Кроме того, полученные результаты могут быть применены для исследования вырожденных моделей Баренблатта–Желтова–Кочиной в области с «белым шумом».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещинноватых средах /Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикл. мат. и механ. 1960. Т.24, №5. С.58–73.

2. Баренблатт, Г.И. Теория нестандартной фильтрации жидкости и газа/Г.И. Баренблатт, В.М. Енотов, В.М. Рыжик// М.: Наука, 1972.

3. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // ПММ. 1960. Т. 24, № 5. С. 58-73.

4. Вольмир, А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. – М.: Изд-во «Наука», гл. редакция физ.-мат. литературы, 1967.

5. Загребина, С.А. Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики / С.А. Загребина// Вестн. ЮУрГУ. Сер.: Мат. моделирование и программирование. — 2013. — Т. 6, No 2. — С. 5–24.

6. Загребина, С.А. Устойчивые и неустойчивые многообразия решений полулинейных уравнений соболевского типа / С.А. Загребина, М.А. Сагадеева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2016. – ISBN 978-5-696-04746-1 URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_25939498_14545266.pdf

7. Загребина, С.А. Многоточечная начально-конечная задача для уравнения соболевского типа с (L, p)-ограниченным оператором / С.А. Загребина // Вырожденные полугруппы и пропагаторы уравнений соболевского типа = Denegerate Semigroups and Propagatorsof Sobolev Type Eguattions: материалы докл. Междунар. Симпозиума, Челябинск, 10-14 нояб. 2014 г. / Юж.-Урал. гос. ун-т (нац. Исслед. Ун-т). – Челябинск, 2014. – С.19-31.

8. Загребина, С.А. О задаче Шоуолтера – Сидорова / С.А. Загребина // Известия высш. учеб. заведений. – 2007. - № 3. – С. 22-28.

9. Загребина С.А. Многоточечная начально-конечная задача для линейной модели Хоффа / С.А. Загребина // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. — 2012. — № 5 (264). — С. 4–12.

10. Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012.

11. Замышляева, А.А. Начально-конечная задача для неоднородного уравнения Буссинеска – Лява / А.А. Замышляева // Вестн. ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. — Челябинск, 2011. — No 37 (254), вып. 10. — С. 22–29.

12. Замышляева, А.А. Уравнения соболевского типа на графе / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова. – Изд. центр ЮУрГУ: Челябинск, 2016.

13. Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М.: Мир, 1967.

14. Казак, В.О. Исследование фазовых пространств одного класса полулинейных уравнений соболевского типа. .. Канд. диссертация, Челябинск, 2005.

15. Келлер, А.В. Относительно спектральная теорема / А.В. Келлер // Вестн. Челяб. гос. ун-та, сер. Математика. Механика. — 1996. — No 1 (3). — С. 62–66.

16. Келлер, А.В. Алгоритм решения задачи Шоуолтера – Сидорова для моделей леонтьевского типа / А.В. Келлер // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2011. – No 4 (241), вып. 7. – С. 40 – 46.

17. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2011. – No 17 (234), вып. 8. – С. 113 – 114.

18. Манакова, Н.А. Задачи оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012.

19. Сагадеева, М.А. Дихотимии решений линейных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012.

20. Сагадеева, М.А. Экспоненциальные дихотомии решений одного класса уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева // Вест. Челяб. ун-та. Серия. Математика. Механика. Информатика. – 2003. – No 1. – С. 136–145.

21. Свиридюк, Г.А. Задача Коши для линейного сингулярного уравнения типа Соболева // Дифференц. уравн. 1987. Т.23, №12. С.2169-2171.

22. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – Иркутск, 2010. – Т. 3, No 1. – С. 51 – 72.

23. Свиридюк, Г.А. Задача Коши для линейного сингулярного уравнения типа Соболева // Дифференц. уравн. 1987. Т. 23, № 12. С. 2169-2171.

24. Свиридюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк // Изв. РАН, сер. математическая. – 1993.– Т. 57, no 3.– С. 192 – 207.

25. Свиридюк, Г.А. Уравнения соболевского типа на графах / Г.А. Свиридюк // Неклассические уравнения математической физики: сб. статей. – 2002, Новосибирск, Изд-во ИМ СО РАН им. С.Л. Соболева. – С.221 – 225.

26. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. — 1994. — Т. 49, No 4. — С. 47–74.

27. Свиридюк, Г.А. Инвариантные пространства и дихотомии решений

одного класса линейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 60–68.

28. Свиридюк, Г.А. Об одной задаче Showalter /Г.А. Свиридюк // Дифференц.уравнения. – 1989. – Т. 25, No 2. – С. 338 – 339. URL: http://www.mathnet.ru/links/91d4417dd84af94b9264c13a79a71ea1/de6772.pdf

29. Свиридюк, Г.А. Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления / Н.А. Сидоров. – Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 1982.

30. Сидоров, Н.А. О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений / Н.А. Сидоров, О.А. Романова // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19, no 9.— С. 1516 – 1526.

31. Сидоров, Н.А. Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной / Н.А. Сидоров, М.В. Фалалеев // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т.23, no 4.– С. 726 – 728.

32. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики / (5-е изд.). М.: Наука, 1977

33. Шестаков, А.Л. Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2011. – Вып. 12. – С. 181 – 190.

34. Al'shin, A.B. Blow-up in nonlinear Sobolev-type equations / A.B. Al'shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov // Berlin; N.Y.: Walter GmbH&Co.KG, 2011.

35. Bayazitova, A.A. On the generalized boundary-value problem for linear Sobolev type equations on the geometric graph, Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz., 2018, vol. 10, no. 3, pp.5 – 11. DOI: https://doi.org/10.14529/mmph180301

36. Chen P.J., Gurtin M.E. On a theory of heat conduction involving two temperatures // Z.Angew. Math. Phys. 1968. V.19, P.614–627.

37. Coleman B.D., Duffin R.J., Mizel V.J. Instability, uniqness and nonexistance theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xxt}$ on a strip// Arch. Rat. Mech. Anal. 1965. V.19. P.100-116.

38. Hallaire M. On a theory of moisture-transfer // Inst. Rech. Agronom. 1964. №3. P.60–72.

39. Keller, A.V. Some generalizations of the Showalter - Sidorov problem for Sobolev-type models / A.V. Keller, S.A. Zagrebina// (2015) Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software, 8 (2), pp. 5-23. DOI: 10.14529/mmp150201

40. Levine H.A. Some nonexistance and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Du_t = -Au + F(u)$ // Arch. Rat. Mech. Anal. 1973. V.51, №5. P.371–386.

41. Manakova, N.A. Optimal Control of the Solutions of the Initial-Finish Problem for the Linear Hoff Model./ N.A. Manakova, A.G. Dylkov// Mathematical Notes, 2013, vol. 94, issue 2, pp. 220–230. DOI: 10.1134/S0001434613070225

42. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht: VSP, 2003. – 228 p.

43. Sviridyuk, G.A. The phase space of a nonclassical model. /G.A. Sviridyuk, V.V. Shemetova // Russian Math. (Iz. VUZ), 2005, V.49, issue, pp. 44–49.

44. Zagrebina, S.A. Multipoint initial-final value problem for the linear model of plane-parallel thermal convection in viscoelastic incompressible fluid / S.A. Zagrebina // Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software". — 2014. — Vol. 7, issue 3. — P.5–22.

45. Zagrebina, S.A. The Generalized Splitting Theorem for Linear Sobolev type Equations in Relatively Radial Case / S.A. Zagrebina, M.A. Sagadeeva //

The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics". — 2014. — Vol. 7. — P. 19–33.

46. Zamyshlyaeva, A.A. The Optimal Control over Solutions of the Initial-finish Value Problem for the Boussinesque–Löve Equation / A.A. Zamyshlyaeva, O.N. Tsyplenkova// Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software", 2012, vol. 5 (264), issue 11, pp. 13–24. (in Russian)

47. Favini, A. Multipoint initial-final value problems for dynamical Sobolev-type equations in the space of noises/A. Favini, S.A. Zagrebina, G.A. Sviridyuk // (2018) Electronic Journal of Differential Equations, 2018, article no. 128,

48. Kovaleva, L. A. The Barenblatt–Zheltov–Kochina equation with boundary Neumann condition and multipoint initial-final value condition / L.A. Kovaleva, E.A. Soldatova, S.A. Zagrebina // Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ., 29:2 (2019), 14–19