Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет
(Национальный исследовательский университет)»
Факультет математики, механики и компьютерных технологий

Кафедра уравнений математической физики

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент, канд. физ.-мат. наук,
доц. каф. МиКМ

____________________ / А.Л. Ушаков/
«____» ____________ 2019 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой,
д-р физ.-мат. наук, проф.

____________________ /Г.А. Свиридюк/
«____» ____________ 2019 г.

Исследование прямых спектральных задач для неклассических моделей математической физики

НАУЧНО-КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель, д-р. физ.-мат. наук, проф.

____________________ /Г.А. Свиридюк/
«____» ____________ 2019 г.

Автор, аспирант группы ЕТ-4101

____________________ /Е.В. Кириллов/
«____» ____________ 2019 г.

Нормоконтролер, канд. физ.-мат. наук, доцент

____________________ /Д.Е. Шафранов/
«____» ____________ 2019 г.

Челябинск 2019

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет (Национальный исследовательский университет)»
Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра уравнений математической физики

Исследование прямых спектральных задач для неклассических моделей математической физики

Автор: Кириллов Евгений Вадимович
Научный руководитель: Свиридюк Георгий Анатольевич

Челябинск 2019

Введение

$$Mu = \lambda Lu. \tag{1}$$

$$(T + P)u = \lambda Lu. \tag{2}$$

Цель работы

Целью работы является разработка метода решения прямых спектральных задач для неклассических моделей математической физики, с последующей реализацией алгоритмов вычисления относительных собственных чисел возмущенного оператора в виде программы. Для достижения цели поставлены следующие задачи:

1. Разработать аналитический метод решения прямых спектральных задач вида $(T+P)u=\lambda Lu$ для абстрактного дискретного полуограниченного самосопряженного оператора T возмущенного ограниченным оператором умножения P.

2. Разработать метод вычисления собственных чисел возмущенного оператора $T+P$ относительно оператора L.

3. На основе разработанного метода написать программу для вычисления собственных чисел возмущенного оператора $T+P$ относительно оператора L, входящего в модель эволюции свободной поверхности фильтрующейся жидкости.

Историография

1. Садовничий, В.А. Замечания об одном новом методе вычисления собственных значений и собственных функций дискретного оператора / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. – 1994. – Т.17. – С. 244 – 248.
2. Кадченко, С.И. Численные методы регуляризованных следов спектрального анализа / С.И Кадченко, С.Н. Какушкин. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2015. – 206 с.
3. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equation and Degenerator Semigroups of Operators // Utrecht, Boston:VSP. – 2003. – 216 p.

Постановка задачи

$$(T + P)u = \nu Lu. \qquad (3)$$

Операторы $T, L : \mathfrak{F} \to \mathfrak{U}$, где $\mathfrak{F}, \mathfrak{U}$ сепарабельные гильбертовы пространства. Оператор T является дискретным самосопряженным полуограниченным. Оператор L линейный замкнутый непрерывно обратимый. Оператор P является оператором умножения на некоторую вещественную гладкую функцию.

Необходимо найти собственные числа оператора $T + P$ относительно оператора L.

Необходимые обозначения

$\rho^L(T) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - T)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})\}$ – резольвентное множество оператора T относительно оператора L.
$R_0(\mu) = (\mu L - T)^{-1}$ — L–резольвента оператора T.
$R(\mu) = (\mu L - T - P)^{-1}$ — L–резольвента оператора $T + P$.
$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — собственные числа оператора T.
$\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ — собственные числа оператора T относительно оператора L.
$\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ — собственные числа оператора $T + P$ относительно оператора L.
Далее собственные числа оператора T и $T + P$ относительно оператора L для краткости будем называть относительными собственными числами оператора и относительными собственными числами возмущенного оператора, соответственно.
Введем контур $\gamma_{r_n} = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu_n - \mu| = r_n\}$, где $r_n = \frac{1}{2}\min_n\{\mu_{n+1} - \mu_n; \mu_n - \mu_{n-1}\}$. Положим $r_0 = \inf_n r_n$.

Основной результат

Теорема 1. Пусть T дискретный самосопряженный положительный оператор, L линейный замкнутый непрерывно обратимый оператор. Если оператор P ограниченный и выполняется неравенство $\|P\| < \frac{r_n}{2}$, тогда имеет место спектральное тождество:

$$\nu_n = \lambda_n + (L^{-1}P\varphi_n, \varphi_n) + \alpha_n(k), \tag{4}$$

где

$$\alpha_n(k) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} \mu \mathrm{Sp}[R_0(\mu)P]^k L R_0(\mu) d\mu. \tag{5}$$

Теорема 2. Пусть T дискретный самосопряженный положительный оператор, L линейный замкнутый непрерывно обратимый оператор. Если оператор P ограниченный и выполняется неравенство $q = \frac{2\|P\|}{r_n} < 1$, тогда числовые ряды

$$\sum_{k=2}^{\infty} \alpha_n(k) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} \mu \mathrm{Sp}[R_0(\mu)P]^k L R_0(\mu) d\mu$$

поправок теории возмущений абсолютно сходятся и справедлива оценка

$$\sum_{k=2}^{\infty} |\alpha_n(k)| < r_n^2 \left(\frac{3q^2}{1-q} + \frac{q^3}{(1-q)^2} \right). \tag{6}$$

Теорема 3. Пусть T дискретный, самосопряженный, положительный оператор, L линейный, замкнутый, непрерывно обратимый оператор. Если оператор P ограниченный и выполняется неравенство $\|P\| < \frac{r_n}{2}$. Тогда поправки теории возмущений можно вычислить по формуле

$$\alpha_n(k) = \frac{(-1)^k}{2\pi i} \sum_{j_1,\ldots,j_{k+1}}^{\infty} \left(\prod_{c=1}^{k} V_{j_c j_s} \right) \operatorname*{res}_{\mu_n} \left(\frac{\mu}{\prod\limits_{c=1}^{k} \xi_{j_s}(\mu - \mu_{j_s})} \right), \quad (7)$$

где $V_{ij} = (P\varphi_i, \varphi_j), s = \begin{cases} c+1, c < k, \\ 1, c = k. \end{cases}$

Прямая спектральная задача для модели эволюции поверхности фильтрующейся жидкости

Уравнение Дзекцера:

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u - \beta\Delta^2 u + f.$$

$$T, L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}, \;\; T = \alpha\Delta - \beta\Delta^2, \;\; \Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \;\; L = \lambda - \Delta, \quad (8)$$

где $\mathfrak{U} = \{u \in W_2^{k+2}(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$,
$\mathfrak{F} = \{u \in W_2^k(\Omega)\}, k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$,
$domT = \left\{u \in W_2^{k+2}(\Omega) : u''|_{\partial\Omega} = 0\right\} \cap \mathfrak{U}$.
Здесь $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Положим, что a^2 не совпадает с λ_n для любых n, где λ_n собственные числа оператора Лапласа. Пусть P оператор умножения на гладкую функцию $p \in C^\infty(\Omega)$.

$$(T + P)u = \nu Lu, \quad (9)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (10)$$

Теорема 4. Относительные собственные числа оператора $T + P$ имеют вид

$$\nu_n = \lambda_n + \frac{(P\varphi_n, \varphi_n)}{a^2 - \lambda_n} + \alpha_n(k), \tag{11}$$

$$\alpha_n(k) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} \mu \mathrm{Sp}[R_0(\mu)P]^k L R_0(\mu) d\mu,$$

поправки теории возмущений $\alpha_n(k)$ абсолютно сходятся и могут быть вычислены по формуле (7).

Алгоритм работы программы для вычисления относительных собственных чисел возмущенного оператора

1. Вводим индексы искомого относительного собственного числа и количество поправок теории возмущений, которые нужно вычислить.
2. Вычисляем собственные числа операторов T и L с данными индексами.
3. Вычисляем собственное число оператора T относительно оператора L с данными индексами.
4. Вычисляем собственные функции оператора T с данными индексами.
5. Вычисляем поправки теории возмущений.
6. Вычисляем с помощью формулы (11) искомое относительное собственное число возмущенного оператора.

Вычислительный эксперимент

1. $0 < x < 3,\ 0 < y < 2\pi,\ \alpha = 1, \beta = \frac{1}{\pi^2}, a = 2\pi, p = \frac{x+y}{12\pi}$

(n,m)	$\nu_{(n,m)}$	(n,m)	$\nu_{(n,m)}$
$(1,1)$	-0.87270	$(3,6)$	-25.24044
$(1,2)$	-1.00915	$(3,7)$	-25.87694
$(1,3)$	-1.24534	$(3,8)$	-26.97059
$(1,4)$	-1.58816	$(3,9)$	-28.59817
$(1,5)$	-2.03968	$(4,0)$	-41.01238
$(1,6)$	-2.59887	$(4,1)$	-41.75381
$(1,7)$	-3.26963	$(4,2)$	-43.61861
$(1,8)$	-4.06969	$(2,5)$	-9.36709
$(1,9)$	-5.03157	$(2,6)$	-9.98999
$(2,0)$	-6.78318	$(2,7)$	-10.71380
$(2,1)$	-6.95162	$(4,6)$	-48.24312
$(2,2)$	-7.41147	$(4,7)$	-48.60621
$(2,3)$	-8.04680	$(4,8)$	-49.69275
$(2,4)$	-8.72564	$(4,9)$	-51.55731

Вычислительный эксперимент

2. $0 < x < 1,\ 0 < y < \pi,\ \alpha = 0, \beta = \frac{1}{4}, a = 2, p = (xy + 4)/24$

(n, m)	$\nu_{(n,m)}$	(n, m)	$\nu_{(n,m)}$
$(1, 4)$	-7.8363	$(4, 5)$	-55.43724
$(1, 7)$	-17.57302	$(4, 9)$	-72.67991
$(2, 1)$	-11.14458	$(5, 2)$	-78.25926
$(2, 3)$	-14.56834	$(3, 9)$	-28.59817
$(2, 8)$	-30.59097	$(5, 7)$	-87.04383
$(3, 2)$	-28.90877	$(6, 2)$	-112.18794
$(4, 1)$	-44.22083	$(6, 4)$	-108.51771
$(6, 7)$	-119.19609	$(8, 6)$	-201.90826
$(6, 9)$	-132.06256	$(8, 7)$	-200.97580
$(7, 1)$	-135.17481	$(9, 0)$	-199.74843
$(7, 4)$	-146.10973	$(9, 4)$	-238.63935
$(7, 8)$	-164.77967	$(9, 7)$	-250.61631
$(8, 1)$	-176.51735	$(10, 1)$	-275.73938
$(8, 2)$	-198.55194	$(10, 4)$	-293.57774

Апробация

1. Kirillov, E.V. Spectral identity for the operator with non-nuclear resolvent / Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2017. – Vol. 4. – № 1. — p. 95-99
2. Kirillov E.V., Zakirova G.A. A direct spectral problem for L-spectrum of the perturbed with a multiple spectrum / Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2017. – Vol. 4. – № 3. — p. 19-26
3. Kirillov E.V., Zakirova G.A. Spectral problem for a mathematical model of hydrodynamics / Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2018. – Vol. 5. – № 1. – p. 51-56
4. Kirillov E.V., Zakirova G.A. Numerical solution of spectral problems for the mathematical model of hydrodynamics / 2018 International Automation Conference, RusAutoCon 2018, ID 8501656

Спасибо за внимание!