МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»
Институт естественных и точных наук
Кафедра уравнений математической физики

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент, зав. кафедрой «Алгебры и геометрии» ФГБОУ ВО "НовГУ",
д-р физ.-мат. наук, профессор
__________________/ Т.Г. Сукачева
«____»_____________2019 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой,
д-р физ.-мат. наук, профессор
_______________/ Г.А. Свиридюк
«____»_____________2019 г.

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ДИХОТОМИЯХ В ОДНОЙ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ В ПРОСТРАНСТВАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ С "ШУМАМИ"

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
ЮУрГУ–01.04.01.2019.020.ВКР

Руководитель работы, заведующий кафедрой, д-р физ.-мат. наук, профессор
___________/ Г.А. Свиридюк
«____»_____________2019 г.

Автор работы,
студент группы ЕТ-221
_____________/ О.Г. Китаева
«____»_____________2019 г.

Нормоконтролер, доцент кафедры, канд. физ.-мат. наук
_____________/ Е.В. Бычков
«____»_____________2019 г.

Челябинск 2019

УДК 517.9

Китаева О.Г.

Об экспоненциальных дихотомиях в одной неклассической модели в пространствах дифференциальных форм с "шумами"/ О.Г. Китаева. — Челябинск, 2019. — 36 с.

В выпускная квалификационная работа посвящена исследованию устойчивости решений в линейных стохастических моделях соболевского типа с относительно ограниченным оператором в пространствах гладких дифференциальных форм, определенных на гладких компактных римановых многообразиях без края. В качестве примера используется стохастический вариант уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной.

Библиографический список — 35 наименований.

Содержание

Обозначения и соглашения

1. Множества, как правило, обозначаются заглавными буквами готического алфавита. Исключения составляют множества с уже устоявшимися обозначениями, например,

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел,

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел,

$\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : \quad a > 0\}$,

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

2. Элементы множеств обозначаются строчными буквами латинского и греческого алфавитов. Отображения множеств называются операторами и обозначаются заглавными буквами латинского алфавита, например,

$L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ — линейный оператор, действующий из векторного пространства $\mathfrak{U}$ в векторное пространство $\mathfrak{F}$,

$\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ — множество линейных непрерывных операторов, определенных на пространстве $\mathfrak{U}$ и действующих в пространство $\mathfrak{F}$,

$\mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ — множество линейных замкнутых операторов, определенных в пространстве $\mathfrak{U}$ и действующих в пространство $\mathfrak{F}$.

Если пространство $\mathfrak{U} = \mathfrak{F}$, то мы пишем $\mathcal{L}(\mathfrak{U})$ вместо $\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ и $\mathcal{C}l(\mathfrak{U})$ вместо $\mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{U})$.

$\ker L$ — ядро, $\operatorname{im} L$ — образ, $\operatorname{dom} L$ — область определения линейного оператора L.

Символами $\mathbb{I}$ и $\mathbb{O}$ обозначаются сответственно "тождественный" и "нулевой" операторы, области определения которых следуют из контекста.

3. Все рассуждения проводятся в вещественных банаховых пространствах, но при рассмотрении "спектральных" вопросов вводится их естественная комплексификация.

4. Все контуры ориентированы движением "против часовой стрелки" и ограничивают область, лежащую "слева" при таком движении, если не оговорено противное.

5. Символом const обозначаются, вообще говоря, различные константы.

6. Полные доказательства приводятся только для новых результатов.

7. Основные результаты каждого параграфа называются теоремами. Вспомогательные и второстепенные результаты называются леммами. Частные случаи условий теорем и лемм, а также выводы из них формулируются как следствия. Очевидные факты излагаются в замечаниях.

Постановка задачи. Уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной

$$(\lambda - \Delta)\dot{u} = \alpha\Delta u + f \tag{0.1}$$

моделирует динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещинновато-пористой среде [1]. Параметры α и λ — вещественны и характеризуют соответственно среду и свойства жидкости, функция $f = f(x)$ играет роль внешнего воздействия. Целью работы является исследование дихотомий решений однородного стохастического уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в пространстве дифференциальных форм определенных на гладком компактном ориентированном римановом многообразии без края. Для этого уравнение (0.1) рассматривается как линейное стохастическое уравнение соболевского типа

$$L \overset{o}{\eta} = M\eta, \tag{0.2}$$

где $\eta = \eta(t)$ — искомый стохастический процесс, $\overset{o}{\eta}$ — его производная Нельсона – Гликлиха [2], [24], [31], операторы L, M — линейные и непрерывные, причем оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Актуальность темы исследования. Исследование разрешимости начально-краевых задач для уравнения (0.1) в банаховых пространствах с условием Коши основано на подходе, описанном, например, в [7] — [8], [30] — [31]. Там это уравнение сводилось к абстрактному линейному уравнению соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f \tag{0.3}$$

в подходящих функциональных пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$. В [9] впервые были рассмотрены дихотомии решений абстрактного однородного уравнения соболевского типа (0.1), где оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Расщепление подобных пространств и расщепление действия эллиптических операторов в пространствах гладких дифференциальных форм, определенных на гладких римановых многообразиях без края, были исследованы в [27]. В [5], [6] рассматривался вопрос существования экспоненциальных дихотомий решений динамических уравнений соболевского типа, рассматриваемых в квазибанаховых пространствах. Работы [22] ,[23] посвящены исследованию асимптотической устойчивости уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в смысле Ляпунова. Здесь применяется метод функций Ляпунова, построен вычислительный эксперимент на основе метода Галеркина.

Далее начались исследования стохастических уравнений [15] — [18], [33] соболевского типа

$$L \overset{o}{\eta} = M\eta + N\omega, \tag{0.4}$$

где $\eta = \eta(t)$ — стохастический процесс, $\overset{o}{\eta}$ — его производная Нельсона – Гликлиха, $w = w(t)$ — стохастический процесс, отвечающий внешнему воздействию; операторы $L, M, N \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, причем оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. В [15] приведены результаты изучения уравнения (0.4) в случае, когда оператор M (L,p)-секториален, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Затем в [16] было рассмотрено уравнение (0.4) в случае, когда оператор M (L,p)-радиален, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Причем во всех трех случаях [33], [15], [16] наряду с классической задачей Коши

$$\eta(0) = \eta_0 \tag{0.5}$$

рассматривалась и задача Шоуолтера – Сидорова [28], [29]

$$P(\eta(0) - \eta_0) = 0. \tag{0.6}$$

В работе [17], где рассмотрены более общие начально-конечные условия для уравнения (0.4), и [18], где задачи Коши и Шоуолтера – Сидорова поставлены для уравнения соболевского типа высокого порядка. Отметим также, что имеются иные подходы к исследованиям стохастических уравнений, например, [12], [14], [20], [21]. В [33] в качестве конкретной интерпретации абстрактного стохастического уравнения (0.4) была рассмотрена стохастическая модель Баренблатта – Желтова – Кочиной с аддитивным "белым шумом", заданная в ограниченной области. В [26], [27] данная модель была перенесена на риманово многообразие без края. В [36] изучался вопрос со разрешимости стохастического уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной пространстве дифференциальных форм.

Работа кроме введения и списка литературы содержит из две главы. Сразу отметим, что список литературы не претендует на полноту, а отражает лишь личные вкусы и пристрастия автора. Первая глава носит пропедевтический характер. В ней содержатся все известные на данный момент факты, которые так или иначе используются при доказательстве основных результатов диссертации. В первых двух параграфах представлены основные факты теории относительно σ-ограниченных операторов, а также соответствующих вырожденных аналитических группах операторов. Все факты почерпнуты из монографии Г.А. Свиридюка и В.Е. Федорова [31]. Третий параграф первой главы содержит результаты, почерпнутые из работы Г.А. Свиридюка и А.В. Келлер [9]. Здесь приводятся сведения об инвариантных пространствах и экспоненциальных дихотомиях линейных уравнений соболевского типа являющиеся продолжением на работ, например, [4], [10], [11], [27], [19]. В четвертом параграфе изложены основные факты теории гладких банаховых многообразий и векторных полей на них. Основным результатом этого параграфа следует считать классическую теорему Коши в обобщенной формулировке. Доказательства этих результатов можно найти в фундаментальной монографии С. Ленга [3].

Во второй главе содержатся основные результаты диссертации. В первом параграфе в вводится в рассмотрение производная Нельсона – Гликлиха K-случайного процесса со значениями в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве, строятся пространства "шумов". Во втором параграфе статьи развивается теория стохастических уравнений соболевского типа с относительно p-ограниченными операторами. Доказывается существование экспоненциальных дихотомий решений стохастического уравнения соболевского типа. В третьем параграфе описывается стохастический аналог уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в пространствах дифференциальных форм. Здесь приводится основной результат о существовании экспоненциальных дихотомий решений уравнений, опубликованный в [35].

Благодарности. Автор считает своим приятным долгом выразить свою искреннюю признательность проф. Г.А. Свиридюку за постановку задачи и многочисленные стимулирующие дискуссии.

1. Вспомогательные сведения

1.1. Относительно σ-ограниченные операторы

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линеен и непрерывен), а оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линеен, замкнут и плотно определен).

Определение 1.1.1. Множество

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$$

называется *L-резольвентным множеством* оператора M. Множество $\sigma^L(M) = \mathbb{C}\backslash\rho^L(M)$ называется *L-спектром* оператора M.

Замечание 1.1.1. Пусть оператор L непрерывно обратим. Тогда $\rho^L(M) = \rho(L^{-1}M) = \rho(ML^{-1})$.

Замечание 1.1.2. L-резольвентное множество оператора M всегда открыто, и, следовательно, L-спектр оператора M всегда замкнут.

Определение 1.1.2. Оператор-функции комплексного переменного с областью определения $\rho^L(M)$ $(\mu L - M)^{-1}$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ называются соответственно *L-резольвентой, правой L-резольвентой, левой L-резольвентой* оператора M.

Справедливы L-резольвентные тождества, являющиеся аналогами тождества Гильберта:

$$(\mu - \lambda)R^L_\lambda(M)R^L_\mu(M) = R^L_\lambda(M) - R^L_\mu(M),$$

$$(\mu - \lambda)L^L_\lambda(M)L^L_\mu(M) = L^L_\lambda(M) - L^L_\mu(M).$$

В случае существования оператора $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$ правая (левая) L-резольвента оператора M совпадает с резольвентой оператора $L^{-1}M$ (ML^{-1}).

Лемма 1.1.1. *Пусть оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, а оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Тогда L-резольвен та, правая и левая L-резольвенты оператора M непрерывны в $\rho^L(M)$.*

Теорема 1.1.1. *Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Тогда L-резольвента, правая и левая L-резольвенты оператора M аналитичны в $\rho^L(M)$.*

Определение 1.1.3. Пусть $\ker L \neq \{0\}$, вектор $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$ будем называть *собственным вектором* оператора L. Упорядоченное множество $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\} \subset \mathfrak{U}$ назовем *цепочкой M-присоединенных векторов* собственного вектора φ_0, если

$$L\varphi_{q+1} = M\varphi_q,\ q = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\varphi_q \notin \ker L \setminus \{0\},\ q = 1, 2, \ldots.$$

Цепочка может быть бесконечной, в частности, она может быть заполнена нулями, если $\ker L \cap \ker M \neq \{0\}$. Цепочка конечна, если существует такой M-присоединенный вектор φ_p, что либо $\varphi_p \notin \operatorname{dom} M$, либо $M\varphi_p \notin \operatorname{im} L$. В частности, собственный вектор φ_0 не иммет M-присоединенных векторов, если $\varphi_0 \notin \operatorname{dom} M$, либо $M\varphi_0 \notin \operatorname{im} L$. Мощность конечной цепочки называется ее *длиной*.

Линейная оболочка всех собственных и M-присоединенных векторов оператора L называется *M-корневым линеалом* оператора L. Если M-корневой линеал замкнут, то он называется *M-корневым пространством* оператора L.

Утверждение 1.1.1. M-корневой линеал оператора L состоит только из M-присоединенных векторов оператора L и нуля.

Лемма 1.1.2. *(i) Пусть φ_p — M-присоединенный вектор собственного вектора φ_0 оператора L и точка $\mu \in \rho^L(M)$. Тогда*

$$-R^L_\mu(M)\varphi_p = \varphi_{p-1} + \mu\varphi_{p-2} + \ldots + \mu^{p-1}\varphi_0,$$

где $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ — цепочка M-присоединенных векторов оператора L.

(ii) Пусть ψ_p — присоединенный вектор собственного вектора ψ_0 оператора $R^L_\mu(M)$ и точка $\mu \in \rho^L(M)$. Тогда

$$-L\psi_p = M(\psi_{p-1} + \mu\psi_{p-2} + \ldots + \mu^{p-1}\psi_0),$$

где $\{\psi_1, \ldots, \psi_p\}$–цепочка присоединенных векторов оператора $R^L_\mu(M)$.

Лемма 1.1.3. *Вектор φ является M-присоединенным вектором высоты не больше q оператора L точно тогда, когда $(R^L_\mu(M))^{q+1} = 0$.*

Определение 1.1.4. Оператор M называется *спектрально ограниченным* относительно оператора L (короче, (L, σ)-ограниченным), если

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \, \forall \mu \in \mathbb{C} \; (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Утверждение 1.1.2. Пусть $\mathrm{dom} M = \mathfrak{U}$ и существует $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$. Оператор $M(L, \sigma)$-ограничен точно тогда, когда ограничен оператор $L^{-1}M$ (или ML^{-1}).

Пусть оператор $M(L, \sigma)$-ограничен. Выберем в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ замкнутый контур $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$. Тогда имеют смысл следующие интегралы, как интегралы от аналитических функций по замкнутому контуру:

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} R^L_\mu(M) d\mu, \;\; Q = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} L^L_\mu(M) d\mu. \tag{1.1.1}$$

Лемма 1.1.4. *Пусть оператор $M(L, \sigma)$-ограничен. Тогда операторы $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$–проекторы.*

Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker P, \mathfrak{U}^1 = \operatorname{im} P, \mathfrak{F}^0 = \ker Q, \mathfrak{F}^1 = \operatorname{im} Q$. Через $L_k(M_k)$ обозначим сужение оператора $L(M)$ на подпространство $\mathfrak{U}^k$ ($\mathrm{dom} M^k = \mathrm{dom} M \cap \mathfrak{U}^k$), $k = 0, 1$.

Теорема 1.1.2. *Пусть оператор M (L, σ)-ограничен. Тогда*

(i) операторы $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$;

(ii) $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$, $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$;

(iii) существуют операторы $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1), M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$.

В силу теоремы 1.1.2 существуют операторы $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ и $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$, посредством которых можно разложить L-резольвенту оператора M в ряд Лорана

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} Q,$$

в кольце $|\mu| > a$.

Определение 1.1.5. Точка ∞ для L-резольвенты $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M называется

(i) устранимой особой точкой, если $H \equiv \mathbb{O}$;

(ii) полюсом порядка p, если $H^p \neq \mathbb{O}$ и $H^{p+1} \equiv \mathbb{O}$;

(iii) существенно особой точкой, если $H^q \neq \mathbb{O}$ при любом $q \in \mathbb{N}$.

Теорема 1.1.3. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен и точка ∞ является*

(i) существенно особой точкой L-резольвенты оператора M, тогда M-корневой линеал оператора L содержится в $\mathfrak{U}^0$;

(ii) полюсом порядка $p \in \mathbb{N}$ L-резольвенты оператора M, тогда M-корневое пространство оператора L совпадает с $\mathfrak{U}^0$ и ни один собственный вектор не имеет цепочки M-присоединенных векторов длиной большей, чем p;

(iii) устранимой особой точкой L-резольвенты оператора M, тогда $\ker L = \mathfrak{U}^0, \mathrm{im} L = \mathfrak{F}^1$, *и ни один собственный вектор оператора L не имеет M-присоединенных векторов.*

Кроме того, в дальнейшем удобно считать устранимую особую точку полюсом порядка нуль. Далее сформулируем утверждение в некотором смысле обратное к теоремам 1.1.2 и 1.1.3. Для этого необходимо сформулировать ряд условий, которые в случае (L,σ)-ограниченности оператора M вытекают из этих теорем.

(A1) Длины всех цепочек M-присоединенных векторов ограничены числом $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Обозначим через $\mathfrak{U}^0$ M-корневой линеал оператора L.

(A2) $\mathfrak{U}^0$ дополняемое в $\mathfrak{U}$ подпространство.

Обозначим через $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U} \ominus \mathfrak{U}^0$ некоторое дополнение к $\mathfrak{U}^0$. Положим $\mathfrak{F}^0 = M[\mathfrak{U}^0]$, $\mathfrak{F}^1 = L[\mathfrak{U}^1]$.

(A3) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$.

Обозначим через M_0 сужение оператора M на $\mathfrak{U}^0$.

(A4) Существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$.

Как нетрудно видеть, условия **(A1)** — **(A4)** служат достаточными условиями в теоремах 1.1.2 и 1.1.3. Если оператор M (L,σ)-ограничен и точка ∞ является полюсом порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ L-резольвенты оператора M, то оператор M будем называть (L,p)-*ограниченным.*

Теорема 1.1.4. *Пусть выполнены условия* **(A1)** — **(A4)**. *Тогда оператор M (L,p)-ограничен.*

Условия **(A1)** — **(A4)** проверять в приложениях бывает подчас очень непросто. Однако в некоторых частных случаях эти трудности удается существенно уменьшить.

Теорема 1.1.5. *Пусть L — фредгольмов оператор. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) оператор $M(L,p)$-ограничен.

(ii) ни один собственный вектор оператора L не имеет цепочки M-присоединенных векторов длиной большей, чем $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

1.2. Аналитические группы уравнений соболевского типа

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Нас будут интересовать разрешающие группы линейного операторно-дифференциального уравнения вида

$$L\dot{u} = Mu. \tag{1.2.1}$$

Определение 1.2.1. Функцию $u \in C^\infty(\mathbb{R};\mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (1.2.1), назовем *решением* этого *уравнения*.

Чтобы найти решения уравнения (1.2.1), его удобно представить в одном из следующих видов:

$$R^L_\alpha(M)\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1}Mu, \tag{1.2.2}$$

$$L^L_\alpha(M)\dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1}f, \tag{1.2.3}$$

где $u = (\alpha L - M)^{-1}f, \alpha \in \rho^L(M)$. Оба уравнения (1.2.2), (1.2.3) удобно рассматривать как конкретные интерпретации абстрактного уравнения

$$A\dot{v} = Bv, \tag{1.2.4}$$

где операторы $A, B \in \mathcal{L}(\mathfrak{V})$, $\mathfrak{V}$ — банахово пространство.

Определение 1.2.2. Отображение $V^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R};\mathcal{L}(\mathfrak{V}))$ называется группой разрешающих операторов (или просто — разрешающей группой) уравнения (1.2.4), если

(i) $V^sV^t = V^{s+t}$ при всех $s, t \in \mathbb{R}$;

(ii) для любого $v_0 \in \mathfrak{V}$ функция $v(t) = V^tv_0$ является решением уравнения (1.2.4).

Отождествим разрешающую группу с ее графиком $\{V^t : t \in \mathbb{R}\}$. Группу $\{V^t : t \in \mathbb{R}\}$ назовем аналитической, если она аналитически продолжается во всю комплексную плоскость.

Теорема 1.2.1. *Пусть оператор M (L, σ)-ограничен. Тогда существуют аналитические разрешающие группы $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ и $\{F^t : t \in \mathbb{R}\}$ уравнений соответственно* (1.2.2) *и* (1.2.3), *причем*

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} R^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu, \tag{1.2.5}$$

$$F^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} L^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu, \tag{1.2.6}$$

где $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$.

Определение 1.2.3. *Ядром (образом)* группы $\{V^t : t \in \mathbb{R}\}$ назовем множество $\ker V^\bullet = \{v \in \mathfrak{V} : \exists t \in \mathbb{R} V^t v = 0\}$ $(\mathrm{im} V^\bullet = \{v \in \mathfrak{V} : V^0 v = v\})$.

Очевидно,

$$\ker V^\bullet = \ker V^t, \ \mathrm{im} V^\bullet = \mathrm{im} V^t \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Следствие 1.2.1. В условиях теоремы 1.2.1

$$\ker U^\bullet = \mathfrak{U}^0, \ \mathrm{im} U^\bullet = \mathfrak{U}^1, \ \ker F^\bullet = \mathfrak{F}^0, \ \mathrm{im} F^\bullet = \mathfrak{F}^1.$$

Определение 1.2.4. Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ называется *фазовым пространством* уравнения (1.2.4), если

(i) любое решение $v = v(t)$ уравнения (1.2.4) лежит в $\mathfrak{P}$, т.е. $v(t) \in \mathfrak{P}$ при каждом $t \in \mathbb{R}$;

(ii) при любом $v_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи Коши $v(0) = v_0$ для уравнения (1.2.4).

Теорема 1.2.2. *Пусть оператор M (L, p)-ограничен. Тогда фазовое пространство уравнения* (1.2.2) *(уравнения* (1.2.3)*) совпадает с образом разрешающей группы* (1.2.5) *(разрешающей группы* (1.2.6)*).*

1.3. Относительный спектр и инвариантные пространства

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ - банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Пусть L-спектр оператора M таков, что выполнено следующее условие:

$$\left.\begin{array}{c} \sigma^L(M) = \sigma_0^L(M) \cup \sigma_1^L(M), \quad \sigma_1^L(M) \neq \emptyset, \\ \textit{причем существует замкнутый контур } \gamma \in \mathbb{C} \\ \textit{ограничивающий область, содержащую } \sigma_1^L(M), \text{ а} \\ \sigma_0^L(M) \textit{ лежит вне этой области,} \\ \gamma \bigcap \sigma_0^L(M) = \emptyset. \end{array}\right\} \tag{1.3.1}$$

Лемма 1.3.1. *Пусть выполнено условие (1.3.1), тогда операторы*

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} R_\mu^L(M)d\mu \quad \textit{и} \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} L_\mu^L(M)d\mu \tag{1.3.2}$$

являются проекторами.

Проекторы P и Q расщепляют пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ следующим образом:

$$\mathfrak{U} = \mathrm{im}P \oplus \ker P, \ \mathfrak{F} = \mathrm{im}Q \oplus \ker Q.$$

Положим

$$\ker P = \mathfrak{U}^0, \ \mathrm{im}P = \mathfrak{U}^1, \ \ker Q = \mathfrak{F}^0, \ \mathrm{im}Q = \mathfrak{F}^1,$$

а через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{L} \bigcap \mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$.

Теорема 1.3.1. *Пусть выполнено условие (1.3.1), тогда операторы* $L^k, \ M^k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F}), \ k = 0, 1.$

Теорема 1.3.2. *Пусть выполнено условие (1.3.1), тогда относительный спектр оператора M распадается следующим образом*

$$\sigma_k^L(M) = \sigma^{L_k}(M_k), \ k = 0, 1.$$

Следствие 1.3.1. В условиях теоремы 1.3.2

(i) существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$;

(ii) если $0 \notin \sigma_k^L(M)$, то существует оператор $M_k^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^k;\mathfrak{U}^k)$, $k = 0, 1$.

Обозначим через $\sigma^L(M)$ L-спектр оператора M, а через $\sigma^{L_k}(M_k)$ — L_k-спектр оператора M_k, $k = 0, 1$. Перейдем к вопросу о поведении решений уравнения

$$L\dot{u} = Mu \tag{1.3.3}$$

в терминах инвариантных пространств и дихотомий его решений.

Определение 1.3.1. Подпространство $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{U}$ называется *инвариантным пространством* уравнения (1.3.3), если для любого $u_0 \in \mathfrak{J}$ решение задачи $u(0) = u_0$, (1.3.3) $u \in C^1(\mathbb{R}; \mathfrak{J})$.

Заметим, если уравнение (1.3.3) обладает фазовым пространством $\mathfrak{P}$, то любое его инвариантное пространство $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{P}$.

Определение 1.3.2. *Решения $u = u(t)$ уравнения (1.3.3) имеют экспоненциальную дихотомию* , если

(i) фазовое пространство $\mathfrak{P}$ уравнения (1.3.3) расщепляется в прямую сумму двух инвариантных пространств (т.е. $\mathfrak{P} = \mathfrak{J}^+ \oplus \mathfrak{J}^-$), причем

(ii) существуют такие константы $N_k \in \mathbb{R}_+, \nu_k \in \mathbb{R}_+, k = 1, 2$, что

$$\begin{aligned}
\|u^1(t)\|_{\mathfrak{U}} &\leq N_1 e^{-\nu_1(s-t)} \|u^1(s)\|_{\mathfrak{U}} \quad \text{при} \quad s \geq t, \\
\|u^2(t)\|_{\mathfrak{U}} &\leq N_2 e^{-\nu_2(t-s)} \|u^2(s)\|_{\mathfrak{U}} \quad \text{при} \quad t \geq s,
\end{aligned}$$

где $u^1 = u^1(t) \in \mathfrak{J}^+$ и $u^2 = u^2(t) \in \mathfrak{J}^-$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Пространство $\mathfrak{J}^+(\mathfrak{J}^-)$ называется *устойчивым (неустойчивым)* инвариантным пространством уравнения (1.3.3), причем если $\mathfrak{J}^+ = \mathfrak{P}$ $(\mathfrak{J}^- = \mathfrak{P})$, то говорят об устойчивости (неустойчивости) стационарного решения уравнения (1.3.3).

Экспоненциально дихотомичное поведение решений заключается в следующем: фазовое пространство уравнения (1.3.3) распадается на прямую сумму инвариантных пространств, причем решения, начинающиеся в $\mathfrak{J}^+$, экспоненциально убывают (оставаясь в $\mathfrak{J}^+$), а решения, начинающиеся в $\mathfrak{J}^-$, экспоненциально растут (оставаясь в $\mathfrak{J}^-$). Другими словами, решения из $\mathfrak{J}^+$ экспоненциально убывают при $t \to +\infty$, а решения из $\mathfrak{J}^-$ экспоненциально убывают при $t \to -\infty$.

Теорема 1.3.3. [30] *Пусть оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и относительный спектр $\sigma^L(M) \cap \{i\mathbb{R}\} = \emptyset$. Тогда решения $u = u(t)$ уравнения (1.3.3) имеют экспоненциальную дихотомию.*

Замечание 1.3.1. В стандартной ситуации

$$\dot{u} = Su \tag{1.3.4}$$

спектр оператора S распадается на "отрицательную" и "положительную" части $\sigma(S) = \sigma_r(S) \cup \sigma_l(S)$. И здесь фазовое пространство уравнения (1.3.4) распадается на прямую сумму инвариантных пространств $\mathfrak{U} = \mathfrak{I}^+ \oplus \mathfrak{I}^-$.

1.4. Банаховы многообразия и векторные поля

Пусть $\mathfrak{U}$ — банахово пространство, $\mathfrak{M}$ – некоторое множество. Пусть $U \subset \mathfrak{U}$ – некоторое открытое множество. Дифференцируемое многообразие $\mathfrak{M}$ моделируемое пространством $\mathfrak{U}$ – это множество $\mathfrak{M}$ вместе со структурой дифференцируемого многообразия на нем. В множестве $\mathfrak{M}$ введена структура многообразия, если задан атлас, состоящий из карт, которые согласованы.

Картой называется область U вместе с взаимно однозначным отображением $m : M \to U$ подмножества M множества $\mathfrak{M}$ на U. Назовем $\varphi(x)$ *изображением* точки $m \in M \subset \mathfrak{M}$ на карте U. Рассмотрим карты

$$\varphi_i : M_i \to U_i, \ \varphi_j : M_j \to U_j.$$

Если множества M_i и M_j пересекаются, то их пересечение $M_i \cap M_j$ имеет изображение на обеих картах

$$U_{ij} = \varphi_i(M_i \cap M_j), \ U_{ji} = \varphi_j(M_j \cap M_i).$$

Переход с одной карты на другую задается отображением

$$\varphi_{ij} : U_{ij} \to U_{ji}, \ \varphi_{ij}(m) = \varphi_j(\varphi_i^{-1}(m)).$$

Две карты

$$\varphi_i : M_i \to U_i, \ \varphi_j : M_j \to U_j$$

называются *согласованными*, если множества $U_{ij}, \ U_{ji}$ открыты и отображения φ_{ij} и φ_{ji} (определены, если $M_i \cap M_j$ непусто) являются диффеоморфизмами. Если отображения φ_{ij} и φ_{ji} являются диффеоморфизмами класса C^k, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, то многообразие (которое мы определим ниже) называется *дифференцируемым многообразием* класса C^k.

Атласом на $\mathfrak{M}$ называется совокупность карт $\varphi_i : M_i \to U_i$, если

(i) любые две карты согласованы;

(ii) любая точка $m \in \mathfrak{M}$ имеет изображение хотя бы на одной карте. Два атласа на $\mathfrak{M}$ называются *эквивалентными,* если их объединение тоже атлас. *Структурой дифференцируемого многообразия* на $\mathfrak{M}$ называется класс эквивалентных атласов.

Многообразие $\mathfrak{M}$ называется *связным*, если для любых его двух точек m, n существует конечная цепочка карт $\varphi_i : M_i \to U_i$ таких, что M_1 содержит m, M_n содержит n и $M_i \cap M_{i+1}$ непусто, а U_i связно. Связное C^k-многообразие $\mathfrak{M}$ называется *простым*, если класс эквивалентности его атласов содержит атлас, состоящий из единственной карты.

В дальнейшем нам понадобится понятие *касательного расслоения*, которое относится к числу основных в топологии и в анализе. Касательное расслоение позволяет перенести на многообразия теорию дифференциальных уравнений. Пусть $\mathfrak{M}$ – C^k-многообразие, $k \geq 1$, моделируемое банаховым пространством $\mathfrak{U}$ и m — точка многообразия $\mathfrak{M}$. Рассмотрим тройку $(\varphi; U; v)$, где $(\varphi; U)$ — карта на $\mathfrak{M}$ и v — элемент векторного пространства φU. Будем говорить, что две такие тройки $(\varphi; U; v)$ и $(\psi; V; w)$ эквивалентны, если производная отображения $\psi\varphi^{-1}$ в точке φm отображает v в w. Иначе говоря,

$$(\psi\varphi^{-1})(\varphi m)v = w.$$

Класс эквивалентных троек будем называть *касательным вектором к* $\mathfrak{M}$ *в точке* m.

Множество всех касательных векторов в точке называется *касательным пространством к* $\mathfrak{M}$ *в точке* M и обозначается $T_m\mathfrak{M}$. Каждая карта определяет биективное отображение пространства $T_m\mathfrak{M}$ на банахово пространство, сопоставляя классу эквивалентности тройки $(\varphi; U; v)$ вектор v. С помощью этого биективного отображения на $T_m\mathfrak{M}$ можно ввести структуру топологического векторного пространства, задаваемую рассматриваемой картой. Эта стуктура не зависит от выбора карты. *Касательным расслоением* C^k-многообразия $\mathfrak{M}$

называется множество

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{m \in \mathfrak{M}} T_m \mathfrak{M}.$$

Сечением касательного расслоения и *каноническим проектором* назовем отображения задаваемые формулами

$$m \to (m; \mu(m))\,,\ \mu(m) \in T_m \mathfrak{M},$$

$$(m; v) \to m\,,\ m \in \mathfrak{M}\,,\ v \in T_m \mathfrak{M}$$

соответственно. Немного отходя от стандарта [3], отображение $\mu : \mathfrak{M} \to \mathfrak{U}$ назовем *векторным полем* на $\mathfrak{M}$.

Пусть на C^k-многообразии $\mathfrak{M}$ задано векторное поле μ. Под *кривой* в $\mathfrak{M}$ понимаем C^k-диффеоморфизм $\alpha = \alpha(t)$, $t \in S$, где интервал $S \in \mathbb{R}$ содержит нуль и $k \geq 1$. *Интегральной кривой* называется кривая $\alpha = \alpha(t)$ этого поля, если $\alpha(t) = \mu \circ \alpha(t),\ t \in S$.

Теорема 1.4.1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — банахово C^k-многообразие, $\mu : \mathfrak{M} \to T\mathfrak{M}$ векторное поле на $\mathfrak{M}$ класса C^l, $l \leq k$. Тогда для любой точки $u_0 \in \mathfrak{M}$ существует единственная интегральная кривая $u \in C^l((-t_0; t_0); \mathfrak{M})$, $t = t_0(u_0) > 0$, проходящая через точку u_0 и удовлетворяющая уравнению $\dot{u} = \mu(u)$.*

2. Дихотомии решений в пространствах дифференцируемых "шумов"

2.1. Пространства "шумов"

Пусть $\Omega \equiv (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – полное вероятностное пространство, $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, наделенное борелевой σ-алгеброй. Измеримое отображение $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной*. Множество случайных величин, у которых математическое ожидание равно нулю ($\mathbf{E}\xi = 0$), а дисперсия конечна, образует гильбертово пространство со скалярным произведением $(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{E}\xi_1\xi_2$. Обозначим его символом $\mathbf{L_2}$. Пусть $\mathcal{A}_0$ – σ-подалгебра σ-алгебры $\mathcal{A}$. Построим подпространство $\mathbf{L_2^0} \subset \mathbf{L_2}$ случайных величин, измеримых относительно $\mathcal{A}_0$. Обозначим через $\Pi : \mathbf{L_2} \to \mathbf{L_2^0}$ – ортопроектор. Пусть $\xi \in \mathbf{L_2}$, тогда $\Pi\xi$ называется *условным математическим ожиданием* случайной величины ξ и обозначается символом $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{A}_0)$.

Возьмем множество $\mathfrak{I} \subset \mathbb{R}$ и рассмотрим два отображения: $f : \mathfrak{I} \to \mathbf{L_2}$, которое каждому $t \in \mathfrak{I}$ ставит в соответствие случайную величину $\xi \in \mathbf{L_2}$, и $g : \mathbf{L_2} \times \Omega \to \mathbb{R}$, которое каждой паре (ξ, ω) ставит в соответствие точку $\xi(\omega) \in \mathbb{R}$. Отображение $\eta : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$, имеющее вид $\eta = \eta(t, \omega) = g(f(t), \omega)$, назовем *(одномерным) стохастическим процессом.* Таким образом, при каждом фиксированном $t \in \mathfrak{I}$ стохастический процесс $\eta = \eta(t, \cdot)$ является случайной величиной, т.е. $\eta(t, \cdot) \in \mathbf{L_2}$, а при каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ стохастический процесс $\eta = \eta(\cdot, \omega)$ называется *(выборочной) траекторией.* Стохастический процесс η назовем *непрерывным,* если п.н. все его траектории непрерывны (т.е. при п.в. (почти всех) $\omega \in \Omega$ траектории $\eta(\cdot, \omega)$ непрерывны). Множество непрерывных стохастических процессов образует банахово пространство, которое мы обозначим символом $\mathbf{CL_2}$. Зафиксируем $\eta \in \mathbf{CL_2}$ и $t \in \mathfrak{I}$, через $\mathcal{N}_t^\eta$ обозначим σ-алгебру, порожденную случайной величиной $\eta(t)$. Переобозначим для краткости $\mathbf{E}_t^\eta = \mathbf{E}(\cdot|\mathcal{N}_t^\eta)$. Пусть $\eta \in \mathbf{CL_2}$, *производной в среднем справа* $D\eta(t, \cdot)$ *(слева* $D_*\eta(t, \cdot)$*) случайного процесса* η *в точке* $t \in (\varepsilon, \tau)$ называется случайная величина

$$D\eta\left(t,\cdot\right)=\lim_{\triangle t\to 0+}E_t^{\eta}\ \left(\frac{\eta\left(t+\triangle t,\cdot\right)-\eta(t,\cdot)}{\triangle t}\right)$$

$$\left(D_*\eta\left(t,\cdot\right)=\lim_{\triangle t\to 0-}E_t^{\eta}\ \left(\frac{\eta\left(t,\cdot\right)-\eta\left(t-\triangle t,\cdot\right)}{\triangle t}\right)\right),$$

если предел существует в смысле равномерной метрики на $\mathbb{R}$. Случайный процесс η называется *дифференцируемым в среднем справа (слева) на* (ε,τ), если в каждой точке $t\in(\varepsilon,\tau)$ существует производная в среднем справа (слева).

Итак, пусть случайный процесс $\eta\in\mathbf{CL_2}$ дифференцируем в среднем справа (слева) на (ε,τ). Его производная в среднем справа (слева) тоже будет случайным процессом, который мы обозначим символом $D\eta$ $(D_*\eta)$. Если случайный процесс $\eta\in\mathbf{CL_2}$ дифференцируем в среднем как справа, так и слева на (ε,τ), то можно определить *симметрическую (антисимметрическую) производную в среднем* $D_S\eta=\frac{1}{2}\left(D+D_*\right)\eta$ $\left(D_A\eta=\frac{1}{2}\left(D_*-D\right)\eta\right)$. Симметрическую производную в среднем D_S случайного процесса η будем называть *производной Нельсона – Гликлиха* и обозначать $\overset{o}{\eta}$, т.е. $D_S\eta\equiv\overset{o}{\eta}$. Отметим, что если траектории случайного процесса η п.н. непрерывно дифференцируемы в «обычном смысле» на (ε,τ), то их производная Нельсона – Гликлиха совпадает с «обычной» производной. Так, например, обстоит дело со случайным процессом $\eta=\alpha\sin(\beta t)$, где α – гауссова случайная величина, $\beta\in\mathbb{R}_+$ – некоторая фиксированная константа, а $t\in\mathbb{R}$ имеет физический смысл времени. Через $\mathbf{C}^l\mathbf{L}_2$, $l\in\mathbb{N}$ обозначим пространство стохастических процессов, чьи траектории п.н. дифференцируемы по Нельсону – Гликлиху на $\mathfrak{I}$ до порядка l включительно. Пространства $\mathbf{C}^l\mathbf{L}_2$ будем называть *пространствами дифференцируемых "шумов".*

Пусть $\mathfrak{I}=\{0\}\cup\mathbb{R}_+$, тогда хорошо известным примером [33], [15] вектора пространства $\mathbf{C}^l\mathbf{L}_2$ служит стохастический процесс, описывающий броуновское движение в модели Энштейна – Смолуховского. Он обладает следующими свойствами:

(W1) п.н. $\beta(0)=0$, п.н. все его траектории $\beta(t)$ непрерывны, и при всех $t\in\overline{\mathbb{R}}_+(=\{0\}\cup\mathbb{R})$ случайная величина $\beta(t)$ гауссова;

(W2) математическое ожидание $\mathbf{E}\left(\beta\left(t\right)\right)=0$ и автокорреляционная функция $\mathbf{E}\left(\left(\beta\left(t\right)-\beta\left(s\right)\right)^2\right)=|t-s|$ при всех $s,t\in\overline{\mathbb{R}}_+$;

(W3) траектории $\beta(t)$ недифференцируемы в любой точке $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ и на любом сколь угодно малом промежутке имеют неограниченную вариацию.

Теорема 2.1.1. *С вероятностью 1 существует единственный случайный процесс β, удовлетворяющий свойствам (W1) – (W2), причем его можно представить в виде*

$$\beta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \sin \frac{\pi}{2}(2k+1)t,$$

где ξ_k – независимые гауссовы величины, $\mathbf{E}\xi_k = 0$, $\mathbf{D}\xi_k = [\frac{\pi}{2}(2k+1)]^{-2}$.

В дальнейшем случайный процесс β, удовлетворяющий свойствам (W1) — (W3), назовем *броуновским движением.*

$$\beta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \sin \frac{\pi}{2}(2k+1)t,$$

где независимые случайные величины $\xi_k \in \mathbf{L}_2$ таковы, что дисперсия $D\xi_k = [\frac{\pi}{2}(2k+1)]^{-2}$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Как показано в [31]

$$\overset{o}{\beta}(t) = \frac{\beta(t)}{2t}, t \in \mathbb{R}_+$$

и

$$\overset{o}{\beta}{}^{(l)}(t) = (-1)^{l+1}(2t)^{-l}\beta(t) \text{ при всех } t \in \mathbb{R}_+,\ l \in \mathbb{N}.$$

Пусть теперь $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{F}$) — вещественное сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{\varphi_k\}$($\{\psi_k\}$). Символом $\mathbf{U_L L}_2$ ($\mathbf{F_M L}_2$) обозначим гильбертово пространство, являющееся пополнением линейной оболочки *случайных* $\mathbf{L}$*-величин*

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \varphi_k \ (\omega = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \zeta_k \psi_k) \tag{2.1.1}$$

по норме

$$\|\eta\|^2_{\mathbf{U}} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \mathbf{D}\xi_k \ (\|\omega\|^2_{\mathbf{F}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 \mathbf{D}\zeta_k).$$

Здесь последовательность $\mathbf{L} = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ ($M = \{\mu_k\} \subset \mathbb{R}_+$) такова, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 < +\infty$ ($\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 < +\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\lambda_k}{\mu_k} <$ const), $\{u_k\}$ ($\{f_k\}$) — последовательность коэффициентов разложения вектора $u \in \mathfrak{U}$ ($f \in \mathfrak{F}$) по базису $\{\varphi_k\}$ ($\{\psi_k\}$), последовательность случайных величин $\{\xi_k\} \subset \mathbf{L}_2$ ($\{\zeta_k\} \subset \mathbf{L}_2$). Заметим, что для существования случайной $\mathbf{L}$-величины $\eta \in \mathbf{U_L L}_2$ ($\omega \in \mathbf{F_M L}_2$) достаточно взять последовательность случайных величин $\{\xi_k\} \subset \mathbf{L}_2$ ($\{\zeta_k\} \subset \mathbf{L}_2$), чьи дисперсии равномерно ограничены, т.е. $\mathbf{D}\xi_k \leq \mathrm{const},\ k \in \mathbb{N}$ ($\mathbf{D}\zeta_k \leq \mathrm{const},\ k \in \mathbb{N}$).

Далее, возьмем интервал $\mathfrak{I} = (\varepsilon, \tau) \subset \mathbb{R}$. Отображение $\eta : (\varepsilon, \tau) \to \mathbf{U_L L}_2$, задаваемое формулой

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k(t) \varphi_k, \tag{2.1.2}$$

где некоторая последовательность $\{\xi_k\} \subset \mathbf{CL}_2$, назовем *$\mathfrak{U}$-значным непрерывным стохастическим $\mathbf{L}$-процессом*, если ряд в правой части равномерно сходится на любом компакте в $\mathfrak{I}$ по норме $\|\cdot\|_{\mathbf{U}}$, и траектории процесса $\eta = \eta(t)$ п.н. непрерывны. Непрерывный стохастический $\mathbf{L}$-процесс $\eta = \eta(t)$ назовем, *непрерывно дифференцируемым по Нельсону – Гликлиху на $\mathfrak{I}$*, если ряд

$$\overset{o}{\eta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overset{o}{\xi}_k(t) \varphi_k \tag{2.1.3}$$

равномерно сходится на любом компакте в $\mathfrak{I}$ по норме $\|\cdot\|_{\mathbf{U}}$, и траектории процесса $\overset{o}{\eta} = \overset{o}{\eta}(t)$ п.н. непрерывны. Символом $\mathbf{C}(\mathfrak{I}, \mathbf{U_L L}_2)$ обозначим пространство непрерывных стохастических $\mathbf{L}$-процессов, а символом $\mathbf{C}^l(\mathfrak{I}, \mathbf{U_L L}_2)$ пространство непрерывно дифференцируемых до порядка $l \in \mathbb{N}$ стохастических $\mathbf{L}$-процессов. Примером непрерывно дифференцируемого до любого порядка $l \in \mathbb{N}$ включительно стохастического $\mathbf{L}$-процесса является (см. [33], [15])

$$W_{\mathbf{L}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \beta_k(t) \varphi_k,$$

где $\{\beta_k\} \subset \mathbf{C}^l\mathbf{L}_2$ — последовательность броуновских движений на $\mathbb{R}_+$. Аналогично строятся пространства $\mathbf{C}(\mathfrak{I}, \mathbf{F_M L}_2)$ и $\mathbf{C}^l(\mathfrak{I}, \mathbf{F_M L}_2), l \in \mathbb{N}$. Заметим еще, что пространства $\mathbf{C}_l\mathbf{L}_2, \mathbf{C}(\mathfrak{I}, \mathbf{U_L L}_2)$ и $\mathbf{C}^l(\mathfrak{I}, \mathbf{F_M L}_2), l \in \mathbb{N}$, получили название *пространства дифференцируемых* $\mathbf{L}$-"*шумов*" [33].

2.2. Инвариантные пространства стохастического уравнения соболевского типа

Возьмем оператор $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Ясно, что тот же оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbf{U_L L}_2; \mathbf{F_M L}_2)$. Более того справедлива

Лемма 2.2.1. *Пусть операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем оператор M (L,p)-ограничен $p \in \{0\}\cup\mathbb{N}$. Тогда оператор $M \in \mathcal{L}(\mathbf{U_L L}_2;\mathbf{F_M L}_2)$ тоже будет (L,p)-ограничен, $p \in \{0\}\cup\mathbb{N}$, где оператор $L \in \mathcal{L}(\mathbf{U_L L}_2;\mathbf{F_M L}_2)$. Причем L-спектр оператора $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ совпадет с L-спектром оператора $M \in \mathcal{L}(\mathbf{U_L L}_2;\mathbf{F_M L}_2)$.*

Благодаря лемме 2.2.1 все результаты п. 1.1 с банаховых пространств переносятся на пространства дифференцируемых $\mathbf{L}$-"шумов".

Пусть операторы $L,\ M \in \mathcal{L}(\mathbf{U_L L}_2;\mathbf{F_M L}_2)$, рассмотрим уравнение

$$L \overset{o}{\eta} = M\eta. \tag{2.2.1}$$

Стохастический $\mathbf{L}$-процесс $\eta \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R};\mathbf{U_L L}_2)$ назовем *решением уравнения (2.2.1)*, если при подстановке его в (2.2.1) он обращает уравнение в тождество. Решение $\eta = \eta(t)$ уравнения (2.2.1) назовем *решением задачи Коши*

$$\eta(0) = \eta_0, \tag{2.2.2}$$

если (2.2.2) выполняется для некоторой случайной $\mathbf{L}$-величины $\eta_0 \in \mathbf{U_L L}_2$.

Определение 2.2.1. Множество $\mathbf{P_L L}_2 \subset \mathbf{U_L L}_2$ назовем *стохастическим фазовым пространством* уравнения (2.2.1), если

(i) п.н. каждая траектория решения $\eta = \eta(t)$ уравнения (2.2.1) лежит в $\mathbf{P_L L}_2$, т.е. $\eta(t) \in \mathbf{P_L L}_2, t \in \mathbb{R}$, для п.в. траекторий;

(ii) для п.в. $\eta_0 \in \mathbf{P_L L}_2$ существует единственное решение задачи (2.2.1), (2.2.2).

Замечание 2.2.1. Поскольку решением задачи (2.2.1), (2.2.2) является стохастический $\mathbf{L}$-процесс, а в реальности мы можем наблюдать только какую-либо его траекторию, то сделаем пояснения. Напомним [15], [16], [17], что стохастические $\mathbf{L}$-процессы $\eta = \eta(t)$ и $\zeta = \zeta(t)$ считаются равными, если п.н. каждая траектория одного из них совпадает с какой-либо траекторией другого.

Далее распространим проектор P из п.1.1 с банахова пространства $\mathfrak{U}$ на пространство случайных $\mathbf{L}$-величин $\mathbf{U_L L}_2$. Оператор $P \in \mathcal{L}(\mathbf{U_L L}_2)$ так же будет проектором. Положим $\mathbf{U^0_L L}_2 = \ker P$, $\mathbf{U^1_L L}_2 = \mathrm{im} P$, так что $\mathbf{U_L L}_2 = \mathbf{U^0_L L}_2 \oplus \mathbf{U^1_L L}_2$.

Теорема 2.2.1. *Пусть операторы* $L, M \in \mathcal{L}(\mathbf{U_L L}_2; \mathbf{F_M L}_2)$, *причем оператор* M (L,p)*-ограничен. Тогда фазовым пространством уравнения (2.2.1) служит пространство* $\mathbf{U^1_L L}_2$.

Заметим, что если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{F_M L}_2; \mathbf{U_L L}_2)$, то $\mathbf{U^1_L L}_2 = \mathbf{U_L L}_2$.

Определение 2.2.2. Подпространство $\mathbf{I_L L}_2 \subset \mathbf{U_L L}_2$ называется *инвариантным пространством уравнения (2.2.1)*, если при любом $\eta_0 \in \mathbf{I_L L}_2$ решение задачи (2.2.1), (2.2.2) $\eta \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}; \mathbf{I_L L}_2)$.

Заметим, что если уравнение (2.2.1) имеет фазовое пространство $\mathbf{P_L L}_2$ и инвариантное пространство $\mathbf{I_L L}_2$, то $\mathbf{I_L L}_2 \subset \mathbf{P_L L}_2$.

Определение 2.2.3. Решения $\eta = \eta(t)$ уравнения (2.2.1) имеют *экспоненциальную дихотомию*, если

(i) фазовое пространство $\mathbf{P_L L}_2$ уравнения (2.2.1) расщепляется в прямую сумму двух инвариантных пространств (т.е. $\mathbf{P_L L}_2 = \mathbf{I^+_L L}_2 \oplus \mathbf{I^-_L L}_2$), причем

(ii) существуют такие константы $N_k \in \mathbb{R}_+, \nu_k \in \mathbb{R}_+, k = 1, 2$, что

$$\begin{aligned} \|\eta^1(t)\|_{\mathbf{U}} &\le N_1 e^{-\nu_1(s-t)} \|\eta^1(s)\|_{\mathbf{U}} \quad \text{при} \quad s \ge t, \\ \|\eta^2(t)\|_{\mathbf{U}} &\le N_2 e^{-\nu_2(t-s)} \|\eta^2(s)\|_{\mathbf{U}} \quad \text{при} \quad t \ge s, \end{aligned}$$

где $\eta^1 = \eta^1(t) \in \mathbf{I^+_L L}_2$ и $\eta^2 = \eta^2(t) \in \mathbf{I^-_L L}_2$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Пространство $\mathbf{I^+_L L}_2$ ($\mathbf{I^-_L L}_2$) называется *устойчивым (неустойчивым)* инвариантным пространством уравнения (2.2.1).

Теорема 2.2.2. *Пусть оператор* M (L,p)*-ограничен,* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ *и относительный спектр* $\sigma^L(M) \cap \{i\mathbb{R}\} = \emptyset$. *Тогда решения* $\eta = \eta(t)$ *уравнения (2.2.1) имеют экспоненциальную дихотомию.*

Доказательство. Формулами

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1} R^L_\mu(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathbf{U_L L}_2), \quad P_2 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_2} R^L_\mu(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathbf{U_L L}_2),$$

где контур Γ_1 (Γ_2) лежит в левой (правой) полуплоскости комплексной плоскости и ограничивает часть L-спектра оператора M $\sigma^L(M) \cap \{\mu : \mathrm{Re}\, \mu < 0\}$

$(\sigma^L(M) \cap \{\mu : \mathrm{Re}\,\mu > 0\})$, определим проекторы в пространстве случайных $\mathbf{L}$-величин $\mathbf{U_L L}_2$. Положим $\mathbf{I_L^+ L}_2 = \mathrm{im} P_1$ и $\mathbf{I_L^- L}_2 = \mathrm{im} P_2$. Очевидно, $\mathbf{U_L^1 L}_2 = \mathbf{I_L^+ L}_2 \oplus \mathbf{I_L^- L}_2$. Пусть $\eta_1 \in \mathbf{I_L^+ L}_2$. Если $s \geq t$, то

$$\|\eta_1(t)\|_{\mathbf{U}} \leq e^{-\nu_1(t-s)} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_1'} |R_\tau^L(M)|\, |e^{\tau(t-s)}|\, |d\tau|\, \|\eta^1(s)\|_{\mathbf{U}} \leq$$

$$\leq e^{-\nu_1(t-s)} N_1 \|\eta^1(s)\|_{\mathbf{U}},$$

где $\tau = \mu + \nu_1$, причем $Re\tau > 0$, $\tau \in \Gamma_1'$. Далее, пусть $\eta_2 \in \mathbf{I_L^- L}_2$ и $t \geq s$. Тогда

$$\|\eta_2(t)\|_{\mathbf{U}} \leq e^{-\nu_2(s-t)} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_2'} |R_\tau^L(M)|\, |e^{\tau(s-t)}|\, |d\tau|\, \|\eta^1(s)\|_{\mathbf{U}} \leq$$

$$\leq e^{-\nu_1(s-t)} N_2 \|\eta^2(s)\|_{\mathbf{U}},$$

где $\tau = \mu + \nu_2$, причем $Re\tau < 0$, $\tau \in \Gamma_2'$. Пространства $\mathbf{I_L^+ L}_2$ и $\mathbf{I_L^- L}_2$ являются устойчивым и неустойчивым инвариантными пространствами уравнения (2.2.1).

□

2.3. Экспоненциальные дихотомии стохастического уравнения Баренблата – Желтова – Кочиной в пространствах дифференциальных форм

Рассмотрим n-мерное гладкое компактное ориентированное связное риманово многообразие без края Ω_n и пространство дифференциальных q-форм на Ω_n, обозначим через $E^q = E^q(\Omega_n), 0 \leq q \leq n$. В частности, $E^0(\mathbb{R}^n)$ – пространство функций n переменных. Рассмотрим оператор Лапласа – Бельтрами $\Delta : E^q \to E^q$, определяемый равенством $\Delta = \delta d + d\delta$, где $d : E^q \to E^{q+1}$ оператор внешнего дифференциала от дифференциальных форм, $\delta : E^q \to E^{q-1}$, представим в виде $\delta = (-1)^{n(q+1)+1} * d *$, $* : E^q \to E^{n-q}$ – линейный оператор Ходжа, который сопоставляет q-форме на Ω_n $(n-q)$-форму. Обозначим пространство гармонических q-форм $H^q = \{\omega \in E^q : \Delta\omega = 0\}$.

Из разложения Ходжа (см., например, в [36])

$$E^q = \Delta(E^q) \oplus H^q = d\delta(E^q) \oplus \delta d(E^q) \oplus H^q \tag{2.3.1}$$

следует, что уравнение $\Delta\omega = \alpha$ имеет решение $\omega \in E^q$ точно тогда, когда q-форма α ортогональна пространству гармонических форм H^q.

Формулой

$$(\xi, \eta)_0 = \int\limits_{\Omega_n} \xi \wedge *\eta,\ \xi, \eta \in E^q, \tag{2.3.2}$$

где $*$ — оператор Ходжа, определим скалярное произведение в пространстве E^q, $q = 0, 1, \ldots, n$, а соответствующую норму обозначим через $||\cdot||_0$. Продолжим скалярное произведение (2.3.2) на прямую сумму $\overset{n}{\underset{q=0}{\oplus}} E^q$, требуя, чтобы различные пространства E^q были ортогональны. Пополнение пространства E^q по норме $||\cdot||_0$ обозначим через $\mathfrak{H}_0^q$. Через $P_{q\Delta}$ обозначим ортопроектор на $\mathfrak{H}_\Delta^q$. Формулами

$$(\xi, \eta)_1 = (\Delta\xi, \eta)_0 + (\xi_\Delta, \eta_\Delta)_0, \tag{2.3.3}$$

$$(\xi, \eta)_2 = (\Delta\xi, \Delta\eta)_0 + (\xi, \eta)_1 \tag{2.3.4}$$

определим скалярные произведение на E^q , где $\omega_\Delta = P_{q\Delta}\omega$. Пополнения линеала E^q по соответствующим нормам $||\cdot||_1$ и $||\cdot||_2$ обозначим через $\mathfrak{H}_1^q$ и $\mathfrak{H}_2^q$, соответственно. Фактически нижний индекс означает сколько раз дифференцируемы в обобщенном смысле k-формы в соответствующих пространствах. Пространства $\mathfrak{H}_l^q$, $l = 1, 2$ — банаховы (их гильбертова структура нас в дальнейшем не интересует), причем имеем непрерывные и плотные вложения $\mathfrak{H}_2^q \subset \mathfrak{H}_1^q \subset \mathfrak{H}_0^q$, и для любого $q = 0, 1, \ldots, n$ существуют расщепления пространств

$$\mathfrak{H}_l^q = \mathfrak{H}_{l\Delta}^{q1} \oplus \mathfrak{H}_\Delta^q,$$

где $\mathfrak{H}_{l\Delta}^{q1} = (\mathbb{I} - P_\Delta)[\mathfrak{H}_l^q],\ l = 0, 1, 2.$

Определим пространства $\mathfrak{H}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{2}}\mathbf{L}_2$ гладких дифференциальных q-форм с коэффициентами являющихся стохастическими $\mathbf{L}$-процессами

$$w(t, x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{|i_1, i_2, ..., i_q| = q} \chi_{i_1, i_2, ..., i_q}(t, x_1, x_2, ..., x_n) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_n},$$

где коэффициенты $\chi_{i_1, i_2, ..., i_q}(t, x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}; \mathbf{U_L}\mathbf{L}_2)$, а x_i — одномерные броуновские процессы. При нерелятивистских скоростях мы можем разделять время и локальные координаты. Здесь от единого, во всех точках многообразия, времени t зависят только коэффициенты дифференциальных форм, являющиеся стохастическими непрерывными **L**-процессами, дифференцируемыми в смысле Нельсона – Гликлиха.

Спектр оператора Лапласа – Бельтрами $\sigma(\Delta)$ в пространстве q-форм неположителен, дискретен, конечнократен и сгущается только к точке ∞. Обозначим через $\{\lambda_l\}$ последовательность собственных значений оператора Лапласа – Бельтрами, занумерованных по невозрастанию с учетом кратности. Через $\{\varphi_l\}$ обозначим ортонормированную (в смысле (2.3.2)) последовательность собственных функций. Если $\lambda_l = 0$, то при некотором фиксированном l выполняется $\varphi_l \in \mathfrak{H}^q_{l\Delta}$.

Для фиксированных $\alpha \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$ вводим операторы

$$L = (\lambda + \Delta),\ M = \alpha\Delta, \tag{2.3.5}$$

где Δ – оператор Лапласа – Бельтрами. Рассмотрим стохастическое уравнение с дифференциальными формами

$$L \overset{o}{\eta} = M\eta \tag{2.3.6}$$

с условием Коши

$$\eta(0) = \eta_0. \tag{2.3.7}$$

Лемма 2.3.1. *При любых* $\alpha,\ \beta,\ \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, *оператор* M *–* $(L, 0)$*-секториальный.*

Фазовое пространство стохастического уравнения (2.3.6) имеет вид

$$\mathbf{U}^1_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2 = \begin{cases} \mathfrak{H}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{q}}\mathbf{L}_2 \ \textit{при}\ \ \lambda_k \neq \lambda; \\ \eta \in \mathfrak{H}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{q}}\mathbf{L}_2 :\ (\cdot, \varphi_l)_0\varphi_l = 0 \ \textit{для любого}\ k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda_l = \lambda\}. \end{cases}$$

В [18] установлена разрешимость задачи (2.3.6), (2.3.7).

Теорема 2.3.1. *При любых* $\alpha,\ \beta,\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *существует единственное решение* $\eta = \eta(t)$ *задачи Коши* $\eta(0) = \eta_0 \in \mathbf{U}^1_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ *для уравнения (2.3.6), которое имеет вид*

$$\eta(t) = \sum_{l=1}^{\infty}{}' \left[exp\left(\frac{\alpha\nu_l}{\lambda - \nu_l}t\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\xi_k(\varphi_k, \varphi_l)_0\varphi_l\right)\right]. \tag{2.3.8}$$

Нашей целью является исследование устойчивости решений уравнения (2.3.6) в терминах инвариантных пространств и экспоненциальных дихотомий решений. Относительный спектр M оператора имеет вид

$$\sigma^L(M) = \sigma^L_+(M) \bigcap \sigma^L_-(M),$$

где

$$\sigma^L_+(M) = \left\{ \frac{\alpha\lambda_l}{\lambda+\lambda_l} : \lambda_l < -\lambda \right\}, \ \sigma^L_-(M) = \left\{ \frac{\alpha\lambda_l}{\lambda+\lambda_l} : \lambda_l > -\lambda \right\}.$$

Введем в рассмотрение

$$\mathbf{I^+_L L_2} = \left\{ \eta \in \mathfrak{H}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{q}}\mathbf{L_2} : (\cdot, \varphi_{\mathbf{l}})_{\mathbf{0}}\varphi_{\mathbf{l}} = \mathbf{0}, \lambda_{\mathbf{l}} < -\lambda \right\} \tag{2.3.9}$$

и

$$\mathbf{I^-_L L_2} = \left\{ \eta \in \mathfrak{H}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{q}}\mathbf{L_2} : (\cdot, \varphi_{\mathbf{l}})_{\mathbf{0}}\varphi_{\mathbf{l}} = \mathbf{0}, \lambda_{\mathbf{l}} > -\lambda \right\}. \tag{2.3.10}$$

Справедлива следующая

Теорема 2.3.2. *При любых $\alpha, \ \lambda \in \mathbb{R}_-$, $\eta_0 \in \mathbf{U_L L}_2$ решения $\eta = \eta(t)$ задачи (2.3.6), (2.3.7) имеют экспоненциальные дихотомии, а $\mathbf{I^+_L L_2}$ и $\mathbf{I^-_L L_2}$, имеющие вид (2.3.9), (2.3.10), являются бесконечномерным устойчивым и конечномерным неустойчивым инвариантными пространствами уравнения (2.3.6), соответственно.*

Замечание 2.3.1. При любых $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in \mathbb{R}_-$ и $\eta_0 \in \mathbf{U_L L}_2$ решения $\eta = \eta(t)$ задачи (2.3.6), (2.3.7) имеют экспоненциальные дихотомии и существуют конечномерное устойчивое и бесконечномерное неустойчивое инвариантные пространствами уравнения (2.3.6). При любых $\alpha \in \mathbb{R}_-$ и $\lambda \in \mathbb{R}_+$ можно говорить только об экспоненциальной устойчивости решений задачи (2.3.6), (2.3.7), а при $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+$ решения задачи (2.3.6), (2.3.7) экспоненциально неустойчивы.

Заключение

В работе доказано существование экспоненциальных дихотомий решений стохастического линейного уравнения соболевского типа (0.2) с относительно ограниченным оператором, разделяющих пространство решений на устойчивое и неустойчивое инвариантные подпространства. Описаны устойчивое и неустойчивое инвариантные пространства стохастического уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной, в пространстве дифференциальных форм, определенных на гладком компактном ориентированном римановом многообразии без края.

Библиографический список

1. Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // ПММ. – 1960. – Т. 24. – № 5. – С. 58–73.

2. Гликлих, Ю.Е. Изучение уравнений леонтьевского типа с белым шумом методами производных в среднем случайных процессов / Ю.Е. Гликлих // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 27 (286), вып. 13. – С. 24–34.

3. Ленг, С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий / С. Ленг. – Волгоград: Платон, 1996.

4. Лионс, Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. – М.: Мир, 1971.

5. Сагадеева, М.А. Существование инвариантных подпространств и экспоненциальных дихотомий решений динамических уравнений соболевского типа в квазибанаховых пространствах / М. А. Сагадеева, Ф. Л. Хасан // Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ. – 2015. – Т. 7, № 4. – С. 46-–53.

6. Сагадеева, М.А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева – Челябинск: Изд. Центр ЮУрГУ, 2012.

7. Свиридюк, Г.А. Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Сиб. матем. журн. – 1990. – Т.31, № 5. – С.109–119.

8. Свиридюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк // Изв. РАН, сер. матем. – 1993. – Т. 57, № 3. – С. 192–202.

9. Свиридюк, Г.А. Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер // Изв. ВУЗ. Матем. – 1997. – № 5. – С. 60–68.

9. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М.: Мир, 1970.

10. Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М.: Мир, 1985.

11. Arato, M. Linear Stochastic Systems with Constant Coefficients. A Statistical Approach / M. Arato. – Berlin; Heidelberg; N.-Y.: Springer, 1982.

12. Gliklikh, Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh // Springer, London, Dordrecht, Heidelberg, N.–Y. – 2011. – V. 17, № 1. – P. 91–105.

13. Da Prato, G. Stochastic Equations in Infinite Dimensions / G. Da Prato, J. Zabczyk. – Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

14. Favini, A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Sectorial Operators in Space of "noises"/ A. Favini, G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova // Abstract and Applied Analysis. – 2015. – V. 2015. – Article ID 697410. – 8.

15. Favini, A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Radial Operators in Space of "Noises"/ A. Favini, G.A. Sviridyuk, M.A. Sagadeeva // Mediterranean Journal of Mathematics. – 2016. – V. 13, № 6. – P. 4607–4621.

16. Favini, A. Multipoint initial-final value problems for dynamical Sobolev-type equations in the space of noises / A. Favini, S.A. Zagrebina, G.A. Sviridyuk // Electronic Journal of Differential Equations. – 2018. – V. 2018, № 128. – P. 1–10.

17. Favini, A. One class of sobolev type equations of higher order with additive "white noise"/ A. Favini, G.A. Sviridyuk, A.A. Zamyshlyaeva // Communications on Pure and Applied Analysis. Springer. – 2016. – V. 15, № 1. – P. 185–196.

18. Levinson, N. Transformation theory of nonlinear differential equation of the second order / N. Levinson // Ann. Math. – 1944. № 45. – P. 723–737.

19. Melnikova, I.V. Abstract Stochastic Equations II. Solutions in Spaces of Abstract Stochastic Distributions / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov, M.A. Alshansky // J. of Mathematical Sciences. – 2003. – V. 116, № 5. – P. 3620–3656.

20. Melnikova, I. V. Generalized solutions of abstract stochastic problems. B Pseudo-Differential Operators/ I.V. Melnikova, M.A. Alshanskiy // Generalized Functions and Asymptotics, Springer. – 2013. – P. 341–352.

21. Moskvicheva, P.O. The lyapunov stability of the Cauchy-Dirichlet problem for the generalized hoff equation / P.O. Moskvicheva, I.N. Semenova // Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software (Bulletin SUSU MMCS). – 2014. – V. 7, № 4. – P. 126–131.

22. Moskvicheva, P.O. A numerical experiment for the Barenblatt – Zheltov –

Kochina equation in a bounded domain / P. O. Moskvicheva // J. Comp. Eng. Math. – 2017. – V. 4, № 2. – P. 41–48.

23. Nelson, E. Dynamical Theories of Brownian Motion / E. Nelson. – Princeton: Princeton University Press, 1967.

24. Kovacs, M. Introduction to Stochastic Partial Differential Equations / M. Kovacs, S. Larsson // Proceedings of «New Directions in the Mathematical and Computer Sciences», National Universities Commission, Abuja, Nigeria, October 8–12, 2007. V. 4. – Lagos: Publications of the ICMCS, 2008. – P. 159–232.

25. Shafranov, D.E. Solvability of the Showalter-Sidorov problem for Sobolev type equations with operators in the form of first-order polynomials from the Laplace-Beltrami operator on differential forms / D.E. Shafranov, N.V. Adukova // Comp. Eng. Math.. – 2017. – V. 4, № 3. – P. 27–34.

26. Shafranov, D.E. The Splitting of the Domain of the Definition of the Elliptic Self-adjoint Pseudodifferential Operator / D.E. Shafranov // Journal of computation and engineering mathematics. – 2015. – V. 2, № 3. – P. 60–64.

27. Showalter, R.E. Partial differential equations of Sobolev-Galpern type / R.E. Showalter // Pacific. J. Math.– 1963.– V.31, N3. – P.787–793.

28. Showalter, R.E. The Sobolev type equations. I (II) / R.E. Showalter // Appl. Anal.– 1975.– V. 5, № 1.– P.15 – 22 (N2. – P.81–99).

29. Sviridyuk, G.A. Invariant Manifolds of the Hoff Equation / G.A. Sviridyuk, O.G. Kitaeva // Mathematical Notes. – 2006. – V. 79, № 3 – 4.– P. 408 – 412.

30. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov // VSP, Utrecht-Boston-Koln-Tokyo. – 2003.

31. Sviridyuk, G. A. On the general theory of operator semigroups / G.A. Sviridyuk // Russian Mathematical Surveys. – 1994. – V. 49, № 4. – P. 47–74.

32. Sviridyuk, G.A. The dynamical models of Sobolev type with Showalter–Sidorov condition and additive "noise"/ G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova // Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modeling, Programming and Computer Software (Bulletin SUSU MMCS). – 2014. – V. 7, № 1. – P. 90–103.

33. Warner, F.W. Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups / F.W. Warner // Springer-Verlag. New York etc. – 1983.

34. Kitaeva, O.G. Exponential Dichotomies in the Barenblatt–Zheltov–Kochina Model in Spaces of Differential Forms with "Noise"/ O.G. Kitaeva, D.E. Shafranov, G.A. Sviridiuk // Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software (Bulletin SUSU MMCS). – 2019. – V. 2, № 12. – P. 47–57.

35. Shafranov, D.E. The Barenblatt – Zheltov – Kochina model with the Showalter-Sidorov condition and additive "white noise" in spaces of differential forms on Riemannian manifolds without boundary / D.E. Shafranov, O.G. Kitaeva // Global and Stochastic Analysis. – 2018. – V. 5, № 2. – P. 145–159.

Библиографический список

[1] Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // ПММ. – 1960. – Т. 24. – № 5. – С. 58–73.

[2] Гликлих, Ю.Е. Изучение уравнений леонтьевского типа с белым шумом методами производных в среднем случайных процессов / Ю.Е. Гликлих // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 27 (286), вып. 13. – С. 24–34.

[3] Ленг, С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий / С. Ленг. – Волгоград: Платон, 1996.

[4] Лионс, Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. – М.: Мир, 1971.

[5] Сагадеева, М.А. Существование инвариантных подпространств и экспоненциальных дихотомий решений динамических уравнений соболевского типа в квазибанаховых пространствах / М. А. Сагадеева, Ф. Л. Хасан // Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ. – 2015. – Т. 7, № 4. – С. 46-–53.

[6] Сагадеева, М.А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева – Челябинск: Изд. Центр ЮУрГУ, 2012.

[7] Свиридюк, Г.А. Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Сиб. матем. журн. – 1990. – Т.31, № 5. – С.109–119.

[8] Свиридюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк // Изв. РАН, сер. матем. – 1993. – Т. 57, № 3. – С. 192–202.

[9] Свиридюк, Г.А. Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер // Изв. ВУЗ. Матем. – 1997. – № 5. – С. 60–68.

[10] Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М.: Мир, 1970.

[11] Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М.: Мир, 1985.

[12] Arato, M. Linear Stochastic Systems with Constant Coefficients. A Statistical Approach / M. Arato. – Berlin; Heidelberg; N.-Y.: Springer, 1982.

[13] Gliklikh, Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh // Springer, London, Dordrecht, Heidelberg, N.–Y. – 2011. – V. 17, № 1. – P. 91–105.

[14] Da Prato, G. Stochastic Equations in Infinite Dimensions / G. Da Prato, J. Zabczyk. – Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

[15] Favini, A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Sectorial Operators in Space of "noises"/ A. Favini, G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova // Abstract and Applied Analysis. – 2015. – V. 2015. – Article ID 697410. – 8.

[16] Favini, A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Radial Operators in Space of "Noises"/ A. Favini, G.A. Sviridyuk, M.A. Sagadeeva // Mediterranean Journal of Mathematics. – 2016. – V. 13, № 6. – P. 4607–4621.

[17] Favini, A. Multipoint initial-final value problems for dynamical Sobolev-type equations in the space of noises / A. Favini, S.A. Zagrebina, G.A. Sviridyuk // Electronic Journal of Differential Equations. – 2018. – V. 2018, № 128. – P. 1–10.

[18] Favini, A. One class of sobolev type equations of higher order with additive "white noise"/ A. Favini, G.A. Sviridyuk, A.A. Zamyshlyaeva // Communications on Pure and Applied Analysis. Springer. – 2016. – V. 15, № 1. – P. 185–196.

[19] Levinson, N. Transformation theory of nonlinear differential equation of the second order / N. Levinson // Ann. Math. – 1944. № 45. – P. 723–737.

[20] Melnikova, I.V. Abstract Stochastic Equations II. Solutions in Spaces of Abstract Stochastic Distributions / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov,

M.A. Alshansky // J. of Mathematical Sciences. – 2003. – V. 116, № 5. – P. 3620–3656.

[21] Melnikova, I. V. Generalized solutions of abstract stochastic problems. В Pseudo-Differential Operators/ I.V. Melnikova, M.A. Alshanskiy // Generalized Functions and Asymptotics, Springer. – 2013. – P. 341–352.

[22] Moskvicheva, P.O. The lyapunov stability of the Cauchy-Dirichlet problem for the generalized hoff equation / P.O. Moskvicheva, I.N. Semenova // Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software (Bulletin SUSU MMCS). – 2014. – V. 7, № 4. – P. 126–131.

[23] Moskvicheva, P.O. A numerical experiment for the Barenblatt – Zheltov – Kochina equation in a bounded domain / P. O. Moskvicheva // J. Comp. Eng. Math. – 2017. – V. 4, № 2. – P. 41–48.

[24] Nelson, E. Dynamical Theories of Brownian Motion / E. Nelson. – Princeton: Princeton University Press, 1967.

[25] Kovacs, M. Introduction to Stochastic Partial Differential Equations / M. Kovacs, S. Larsson // Proceedings of «New Directions in the Mathematical and Computer Sciences», National Universities Commission, Abuja, Nigeria, October 8–12, 2007. V. 4. – Lagos: Publications of the ICMCS, 2008. – P. 159–232.

[26] Shafranov, D.E. Solvability of the Showalter-Sidorov problem for Sobolev type equations with operators in the form of first-order polynomials from the Laplace-Beltrami operator on differential forms / D.E. Shafranov, N.V. Adukova // Comp. Eng. Math.. – 2017. – V. 4, № 3. – P. 27–34.

[27] Shafranov, D.E. The Splitting of the Domain of the Definition of the Elliptic Self-adjoint Pseudodifferential Operator / D.E. Shafranov // Journal of computation and engineering mathematics. – 2015. – V. 2, № 3. – P. 60–64.

[28] Showalter, R.E. Partial differential equations of Sobolev-Galpern type / R.E. Showalter // Pacific. J. Math.– 1963.– V.31, N3. – P.787–793.

[29] Showalter, R.E. The Sobolev type equations. I (II) / R.E. Showalter // Appl. Anal.– 1975.– V. 5, № 1.– P.15 – 22 (N2. – P.81–99).

[30] Sviridyuk, G.A. Invariant Manifolds of the Hoff Equation / G.A. Sviridyuk, O.G. Kitaeva // Mathematical Notes. – 2006. – V. 79, № 3 – 4.– P. 408 – 412.

[31] Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov // VSP, Utrecht-Boston-Koln-Tokyo. – 2003.

[32] Sviridyuk, G. A. On the general theory of operator semigroups / G.A. Sviridyuk // Russian Mathematical Surveys. – 1994. – V. 49, № 4. – P. 47–74.

[33] Sviridyuk, G.A. The dynamical models of Sobolev type with Showalter–Sidorov condition and additive "noise"/ G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova // Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modeling, Programming and Computer Software (Bulletin SUSU MMCS). – 2014. – V. 7, № 1. – P. 90–103.

[34] Warner, F.W. Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups / F.W. Warner // Springer-Verlag. New York etc. – 1983.

[35] Kitaeva, O.G. Exponential Dichotomies in the Barenblatt–Zheltov–Kochina Model in Spaces of Differential Forms with "Noise"/ O.G. Kitaeva, D.E. Shafranov, G.A. Sviridiuk // Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software (Bulletin SUSU MMCS). – 2019. – V. 2, № 12. – P. 47–57.

[36] Shafranov, D.E. The Barenblatt – Zheltov – Kochina model with the Showalter-Sidorov condition and additive "white noise" in spaces of differential forms on Riemannian manifolds without boundary / D.E. Shafranov, O.G. Kitaeva // Global and Stochastic Analysis. – 2018. – V. 5, № 2. – P. 145–159.