МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»
Институт естественных и точных наук
Кафедра уравнений математической физики

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент, профессор кафедры
защиты информации,
д-р. физ.-мат. наук, доцент
__________________/ Н.Д. Зюляркина
«____»_____________2019 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой,
д-р физ.-мат. наук, профессор
______________/ Г.А. Свиридюк
«____»_____________2019 г.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
ЮУрГУ–01.04.01.2019.38. ВКР

Руководитель работы, доцент кафедры, д-р. физ.-мат. наук, доцент
___________/ Н.А. Манакова
«____»_____________2019 г.

Автор работы,
студент группы ЕТ-221
_____________/ А.В. Кунгурцева
«____»_____________2019 г.

Нормоконтролер,
доцент кафедры, канд. физ.-мат. наук
_____________/ Е.В. Бычков
«____»_____________2019 г.

Челябинск 2019

УДК 517.9

Кунгурцева А.В.

Исследование одного класса сингулярных математических моделей. /А.В. Кунгурцева. – Челябинск, 2019. – 43 с.

В работе абстрактная теория функционально-дифференциальных уравнений применяется для некоторого сингулярного дифференциального уравнения второго порядка, которое является обобщением уравнений, встречающихся в теории химических реакций.

Библиографический список – 58 наименований.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Квазилинейные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) являются объектом интенсивного изучения начиная со времен С.Н. Бернштейна и М. Нагумо. Интерес к таким объектам объясняется и тем, что квазилинейные краевые задачи возникают в математических моделях многих реальных процессов (в биологии, химии, экологии, экономике и др.).

Классические методы изучения квазилинейных краевых задач для ОДУ, в основном, сводится к следующим схемам: 1) получение априорных оценок решений с последующим применением теорем о неподвижных точках к вспомогательному интегральному уравнению (схема Лере–Шаудера); 2) построение последовательных приближений решения и доказательство сходимиости. Кроме того, разработаны методы исследования на разрешимость квазилинейных краевых задач, основанные на использовании специфических свойств рассматриваемой задачи (монотонность в смысле полуупорядоченности или по Минти–Браудера и т.д.). Вопросы разрешимости квазилинейных краевых задач для ОДУ изучились многими авторма. Отметим работы Н.В. Азбелева, Н.И. Васильева, В.В. Гудкова, И.Т. Кигурадзе, Ю.А. Клюкова, Б.Л. Шехтера и др.

Дальнейшее развитие теории квазилинейных краевых задач привело к необходимости рассмеотрения задач для функционально–дифференциальных уравнений (ФДУ). Разработке основ теории квазилинейных краевых задач для ФДУ посвящены основополагающие работы Н.В. Азбелева, А.Д. Мышкиса, Дж. Хейла и других авторов [38,44,53,55]. Наиболее полно и многосторонне теория квазилинейныз краевых задач нашла отражение в работах участников Пермского Семинара под руководством профессора Н.В. Азбелева [9–15]. Отметим работы А.Р. Абдуллаева [1–8], Н.В. Азбелева, С.А. Гусаренко, В.П. Максимова, посвященные исследованию условий разрешимости квазилинейных задач для ФДУ.

Целое направление в изучении квазилинейных задач для ФДУ восходит к работам Н.В. Азбелева и В.П. Максимова [40–42], где для установления признаков разрешимости квазилинейных краевых задач предлагаются способы получения и использования априорных оценок решений, вводится новое понятие априорного неравенства.

Следуя [12], функционально–дифференциальным уравнением $\dot{x} = Fx$ называется уравнение с оператором F, определенным на некотором множестве абсолютно непрерывных функций D прямому произведению $L \times \mathbb{R}^n$ и, вытекающее из этого факта разложение линейного оператора $\mathfrak{L} : D \to L$ на бесконечномерное и конечномерное слагаемые. Замена лебегова пространства L на банахово пространство B позволяет распространить теорию ФДУ и на другие классы уравнений, например, на сингулярные дифференциальные уравнения. Таким образом мы приходим к теории «абстрактного ФДУ». Отмемит работы по этому вопросу Н.В. Азбелева, Л.Ф. Рахматуллиной [17–20].

Объектом изучения в предлагаемой работе является квазилинейная краевая задача, записанная в виде системы двух уравнений

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}x &= Fx, \\ \ell x &= \varphi x, \end{aligned} \tag{0.1}$$

где $\mathfrak{L} : D \to B$ – линейные ограниченный оператор, $F : D \to B$ – непрерывный оператор, $\ell : D \to \mathbb{R}^n$ – линейный ограниченный вектор-функционал, $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ – непрерывный вектор-функционал. Банахово пространство D изоморфно прямому произведению банахова пространства B и $\mathbb{R}^n$. Отметим, что, если краевая задача записана в виде системы (0.1), то второе уравнение называется краевыми условиями задача.

Отметим [12], что в виде (0.1) можно записать многие актуальные классы квазилинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, интегродифференциальных, уравнений с отклоняющимся аргументом, уравнение с последействием и других уравнений.

Классические схемы исследования на разрешимость задачи (0.1) используют принципе неподвижной точки Банаха или схему Шаудера. В первом случае необходима липшицевость как оператора F, так и вектора-функционала φ. Во втором случае требуется полная непрерывность оператора F. Идея одной из предлагаемых схем опирается на предположение о «конечномерной параметризуемости» множества решений уравнения

$$\mathfrak{L}x = Fx. \tag{0.2}$$

Уравнение конечномерно параметризуемо, если между множеством решений уравнения и некоторым замкнутым подмножеством конечномерного пространства существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие. n – мерная параметризуемость является частным случаем «приводимости» уравнения [12]. (Уравнение (0.2) называется приводимым, если существует такой вполне непрерывный оператор $F_0 : D \to B$, что множества решений уравнения (0.2) и уравнения $\mathfrak{L}x = F_0 x$ совпадают). Линейное уравнение приводимо тогда и только тогда, когда множество его решений конечномерно параметризуемо. Впервые понятие приводимости введено Н.В. Азбелевым. Отметим исследования по этому вопросу А.Р. Абдуллаева, С.А. Гусаренко, В.П. Максимова [40–42].

В предположении n – мерной параметризуемости решение уравнения (0.2) имеет представление

$$x = M\alpha + X\alpha, \tag{0.3}$$

где оператор $M : \mathbb{R}^n \to D$ – непрерывен, X – фундаментальный вектор уравнения $\mathfrak{L}x = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$ (фундаментальным назвается вектор $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$, где $x_1, \cdots, x_n$ составляют базис линейного многообразия решений однородного уравнения $\mathfrak{L}x = 0$ [12]). Подставляя представление (0.3) в краевые условия задачи (0.1), получаем уравнение

$$\ell(M\alpha + X\alpha) = \varphi(M\alpha + X\alpha)$$

относительно α. И, если найдется α, удовлетворяющее полученному уравнению, то задача (0.1) будет иметь решение.

В работе используется схема исследования задачи (0.1),(0.2) на корректную разрешимость приведенная в работах [36, 37]. Эта схема реализуемая для сингулярного дифференциального уравнения вида:

$$\Psi(t)\ddot{x} + \beta\dot{x} = f(t, x). \tag{0.4}$$

Краевые задачи для уравнения (0.4) возникают в математических моделях некоторых реальных процессов. Например, процессов, происходящих в химических реакторах в присутствии катализаторов [26]. В работе получены достаточные условия существования, а также корректной разрешимости некоторых краевых задач для уравнения (0.4).

В работе изучается разрешимость краевых задач для сингулярного уравнения

$$\psi(t)\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \tag{0.5}$$

Полученные здесь утверждения основаны на применении общей схемы исследования на разрешимость квазилинейных краевых задач. Вопрос о разрешимости различных краевых задач для уравнения (0.5) изучался многими авторами [1,33]. Известные подходы в изучении сингулярных уравнений условно можно отнести к двум направлениям: классический [8], основанный на использовании метода априорных оценок и неравенств, и подход, основанный на идеях теории абстрактных функционально-дифференциальных уравнений [9], где конструируется специальное пространство решений, и используется факт изоморфности данного пространства и прямого произведения некоторого банахова пространства и $\mathbb{R}^n$. Отметим такие работы, использующие построение специальных пространств для сингулярных произведений как [5, 8, 17]

Отметим, что краевые задачи для уравнения (0.5) возникают в математических моделях некоторых реальных процессов. Например, процессов, происходящих в химических реакторах в присутствии катализаторов [9], или при описании формы свободной поверхности осесимметричного слоя жидкости с учетом массовых сил и поверхностного натяжения [8]. Так, в работах [13, 15, 16, 18] рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{t} + \beta_0 \exp\left(-\frac{1}{x+\tau}\right) = 0, \tag{0.6}$$

$0 < t \leq 1,\ \beta_0 \geq 0,\ \tau \geq 0$. Оно возникает в теории химических реакций. x – безразмерная температура, $\beta_0 \exp\left(-\frac{1}{x+\tau}\right)$ – некоторая «скорость реакции». Уравнение (0.6) является частным случаем уравнения (0.5).

В работе получены достаточные условия существования, а также корректной разрешимости некоторых краевых задач для уравнения (0.5).

Цель работы. Исследование условий разрешимости квазилинейных краевых задач с гладкими нелинейностями в уравнении или краевых условиях. Получение эффективных признаков разрешимости некоторых конкретных классов краевых задач для сингулярных уравнений.

Условимся обозначать доказательство внутри символов $\lhd \ldots \rhd$.

1. Вспомогательные утверждения

Будем рассматривать уравнение (0.5) в следующих предположениях:

1) будем говорить, что функция Ψ удовлетворяет условию
   (i), если Ψ непрерывная на $[a, b]$ функция,
   (ii), если Ψ абсолютно непрерывная функция с абсолютно непрерывной производной на $[a, b]$,

2) функция Ψ обращается в ноль в граничных точках отрезка $[a, b]$ и $\Psi(t) > 0$ при $t \in (a, b)$, $\beta \in \mathbb{R}^1$

3) функция $f : [a, b] \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ удовлетворяет условию Каратеодори /измерима по переменной t и при почти всех $t \in [a, b]$ непрерывна по второму аргументу/.

Для уравнения (0.5) будем рассматривать краевые условия вида:

$$x(a) = \alpha_{11}, \; x(b) = \alpha_{12}. \tag{1.1}$$

и

$$x'(a) = \alpha_{21}, \; x'(b) = \alpha_{22}, \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{R}^l \tag{1.2}$$

Будем рассматривать разрешимость задачи (0.5),(1.1) ((0.5),(1.2)) в линейном пространстве $W_{\Psi,p,1}$ ($W_{\Psi,p,2}$).

Определение 1. Будем говорить, что $x \in W_{\Psi,p,1}$ ($W_{\Psi,p,2}$), если $x : [a, b] \to \mathbb{R}^1$ – абсолютно непрерывная функция с абсолютно непрерывной на $(a, b]$ производной, $\ddot{x}$ существует почти всюду на $[a, b]$ и $\Psi\dot{x} \in L_p$.

Определение 2. Решением задачи (0.5),(1.1) ((0.5),(1.2)) будем называть функцию $x \in W_{\Psi,p,1}$ ($W_{\Psi,p,2}$), для которой выполнены краевые условия (1.1)((1.2)) и равенство (0.5) выполняется почти всюду на $[a, b]$.

Рассмотрим однородное уравнение

$$\Psi(t)\ddot{x}(t) + \beta\dot{x} = 0. \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) имеет фундаментальный вектор $X = \left\{1,\ r(t) \equiv \int_a^t e^{-\beta\int_{\varepsilon_0}^s \frac{d\tau}{\Psi(\tau)}} ds,\ \forall \varepsilon_0 > a\right\}$. Отметим, что $r(a) = 0$.

Обозначим через

$$G(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{(r(b) - r(t)) \cdot r(s)}{\Psi(t)\dot{r}(t) \cdot r(b)}, & a \le s \le t \le b \\ -\dfrac{(r(b) - r(s)) \cdot r(t)}{\Psi(t)\dot{r}(s) \cdot r(b)}, & a \le t \le s \le b. \end{cases} \tag{1.4}$$

Определим оператор $G : L_p \to W_{\Psi,p,1}$ по правилу:

$$Gz = \int_a^b G(t,s) z(s) ds \tag{1.5}$$

для каждого $z \in L_p$.

Обозначим через

$$W(t,s) = \begin{cases} -(s-a), & a \le s \le t \le b \\ -(t-a), & a \le t \le s \le b. \end{cases} \tag{1.6}$$

функцию Грина задачи $\ddot{x} = z,\ x(a) = 0,\ x'(b) = 0.\ z \in L_p$.

Лемма 1. *Пусть функция* Ψ *такова, что при почти всех* $t \in [a,b]$ $G(t,\cdot) \in L_q$ $\left(\frac{W(t,\cdot)}{\Psi(\cdot)} \in L_q\right), \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, *то пространство* $W_{\Psi,p,1}$ $(W_{\Psi,p,2})$ *изоморфно прямому произведению* $L_p \times \mathbb{R}^2$, *следовательно является банаховым пространством.*

$\lhd$ Рассмотрим краевую задачу для уравнения

$$\Psi\ddot{x} + \beta\dot{x} = z_1 \tag{1.7}$$

$$(\Psi\ddot{x} = z_2) \tag{1.8}$$

с условиями (1.1) ((1.2)), $z_1,\ z_2 \in L_p$.

Задача (1.7),(1.1) ((1.8),(1.2)) однозначно разрешима $\forall z_1, z_2 \in L_p$, $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}^1,\ i,j = 1,2$ и ее решение имеет вид

$$x(t) = Gz_1 + X_1\alpha,\ \alpha = \mathrm{col}\{\alpha_{11}, \alpha_{12}\}, \tag{1.9}$$

где $X_1 = \left(1 - \frac{r(t)}{r(b)}, \frac{r(t)}{r(b)}\right)$.

$$\left(x(t) = \int_a^b \frac{W(t,s)}{\Psi(s)} z(s) ds + \alpha_{21} + (t-a)\alpha_{22}\right). \tag{1.10}$$

В верности равенства (1.9) можно убедиться непосредственной подстановкой представления (1.9) в уравнение (1.7). Действительно, имеем

$$\frac{d}{dt}(Gz)(t) = \int_a^b \frac{dG(t,s)}{dt} z(s)ds,$$

где $$\frac{dG(t,s)}{dt} = \begin{cases} \dfrac{\dot{r}(t)\cdot r(s)}{\Psi(s)\dot{r}(s)\cdot r(b)}, & a \le s \le t \le b \\ -\dfrac{\dot{r}(t)\cdot(r(b)-r(s))}{\Psi(s)\dot{r}(s)\cdot r(b)}, & a \le t \le s \le b. \end{cases}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(Gz)(t) = \int_a^b \frac{d^2G(t,s)}{dt^2} z(s)ds + \frac{z(t)}{\Psi(t)},$$

где $$\frac{d^2(G(t,s))}{dt^2} = \begin{cases} \dfrac{\ddot{r}(t)\cdot r(s)}{\Psi(s)\dot{r}(s)r(b)}, & a \le s \le t \le b \\ -\dfrac{\ddot{r}(t)\cdot(r(b)-r(s))}{\Psi(s)\dot{r}(s)r(b)}, & a \le t \le s \le b. \end{cases}$$

Таким образом, оператор G, определенный равенством (1.5) является оператором Грина задачи

$$\Psi\ddot{x} + \beta\dot{x} = z,\ x(a) = 0,\ x(b) = 0. \tag{1.11}$$

Если $G(t,\cdot) \in L_q \left(\frac{W(t,\cdot)}{\Psi(\cdot)} \in L_q\right)$, то равенство (1.9) ((1.10)) задает изоморфизм между $W_{\Psi,p,1}(W_{\Psi,p,2})$ и $L_p \times \mathbb{R}^2$.$\triangleright$

В дальнейшем всюду будем считать, что функция Ψ удовлетворяет условиям леммы 1.

Норму на пространстве $W_{\Psi,p,1}(W_{\Psi,p,2})$ определим равенством

$$\|x\|_{W_{\Psi,p,1}} = |x(a)| + |x(b)| + \|\Psi\ddot{x}\|_{L_p}.$$

$$\left(\|x\|_{W_{\Psi,p,2}} = |x(a)| + |x'(b)| + \|\Psi\ddot{x}\|_{L_p}\right).$$

Иногда в пространстве $W_{\Psi,p,2}$ удобнее пользоваться нормой

$$\|x\|_2 = \|x\|_{L_p} + \|\dot{x}\|_{L_p} + \|\Psi\ddot{x}\|_{L_p}$$

Эта норма при некоторых условиях на функцию Ψ эквивалентна введенной выше норме $\|\cdot\|_{W_{\Psi,p,2}}$.

Пространство $W_{\Psi,p,2}$ вложено в L_p. Пусть $J : W_{\Psi,p,2} \to L_p$ – оператор вложения пространства $W_{\Psi,p,2}$ в L_p. Обозначим через $T : L_p \to L_p$ оператор, определяемый равенством

$$(Tz)(t) = \int_t^b \frac{z(s)}{\Psi(s)} ds,\ z \in L_p,\ t \in [a,b]$$

Подробнее операторы J и T рассмотрены в следующих параграфах. Там, в частности, даны оценки норм операторов J и T (леммы 6,8,11).

Лемма 2. *Пусть функция Ψ такова, что операторы $J : W_{\Psi,p,2} \to L_p$ и $T : L_p \to L_p$ непрерывны. Тогда в банаховом пространстве $W_{\Psi,p,2}$ нормы $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_{W_{\Psi,p,2}}$ эквивалентны.*

$\lhd$ Для доказательства утверждения достаточно показать, что существуют константы C_1 $C_2 > 0$, такие, что

$$C_1\|x\|_2 \leq \|x\|_{W_{\Psi,p,2}} \leq C_2\|x\|_2. \tag{1.12}$$

Каждый элемент $x \in W_{\Psi,p,2}$ определяется равенством (1.10). Если выполнены условия леммы 11, то оператор вложения J непрерывен. Тогда имеет место равенство

$$\|x\|_{L_p} \leq \|J\|_{W_{\Psi,p,2}\to L_p} \cdot \|x\|_{W_{\Psi,p,2}} \tag{1.13}$$

Далее из равенства (1.10) получаем

$$\dot{x}(t) = -\int_t^b \ddot{x}(s)ds + \dot{x}(b) = -\int_t^b \frac{1}{\Psi(s)}\Psi(s)\ddot{x}(s)ds + \dot{x}(b) \tag{1.14}$$

Отсюда

$$\|\dot{x}(t)\|_{L_p} \leq \|T(\Psi\ddot{x}\|_{L_p} + |\dot{x}(b)| \cdot (b-a)^{\frac{1}{p}} \leq \max\left(\|T\|_{L_p\to L_p},\, (b-a)^{\frac{1}{p}}\right) \cdot \|x\|_{W_{\Psi,p,2}} \tag{1.15}$$

Из (1.14) и (1.15) получаем

$$\|\dot{x}(t)\|_2 \leq \|J\|_{W_{\Psi,p,2}\to L_p} + \max\left(\|T\|_{L_p\to L_p},\, (b-a)^{\frac{1}{p}} + 1\right) \cdot \|x\|_{W_{\Psi,p,2}}$$

Тем самым установлена справедливость левой части неравенства (1.12) с константой

$$C_1 = \frac{1}{\|J\|_{W_{\Psi,p,2}\to L_p} + \max\left(\|T\|_{L_p\to L_p},\, (b-a)^{\frac{1}{p}} + 1\right)}$$

Теперь покажем справедливость правой части неравенства (1.12). Из равенства (1.14) следует неравенство

$$|\dot{x}(b)| \leq \|\dot{x}\|_{L_p} \cdot (b-a)^{-\frac{1}{p}} + \|T\|_{L_p\to L_p} \cdot (b-a)^{-\frac{1}{p}}\|\Psi\ddot{x}\|_{L_p}$$

Из равенства

$$x(t) = \int_a^t \dot{x}(t)dt + x(a)$$

получаем

$$|x(a)| \leq \|x\|_{L_p} \cdot (b-a)^{-\frac{1}{p}} + \|\dot{x}\|_{L_p} \cdot (b-a)^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1.$$

Таким образом, имеем

$$\|x\|_{W_{\Psi,p,2}} \leq \|x\|_{L_p} \cdot (b-a)^{-\frac{1}{p}} +$$
$$+ \left((b-a)^{\frac{1}{q}} + (b-a)^{-\frac{1}{p}}\right) \|\dot{x}\|_{L_p} + \left(\|T\|_{L_p \to L_p}(b-a)^{-\frac{1}{p}} + 1\right) \|\Psi\ddot{x}\|_{L_p} \leq$$
$$\leq \max\left((b-a)^{\frac{1}{q}} + (b-a)^{-\frac{1}{p}}, \|T\|_{L_p \to L_p}(b-a)^{-\frac{1}{p}} + 1\right) \|x\|_2$$

То есть, установлена справедливость правой части неравенства (1.12) с константой

$$C_2 = \max\left((b-a)^{\frac{1}{q}} + (b-a)^{-\frac{1}{p}},\ \|T\|_{L_p \to L_p}(b-a)^{-\frac{1}{p}} + 1\right). \quad \triangleright$$

Пусть теперь функция Ψ удовлетворяет условию (ii).

Лемма 3. *Если функция Ψ такова, что $\Psi''(t) \leq 0, \ \forall t \in [a,b]$, и $\lim\limits_{t \to a+0} \Psi(t)r(t)\dot{r}(t) = 0$, то*

$$\langle -Gz, z\rangle_{L_2} \geq 0, \ \ \forall z \in L_2.$$

$\triangleleft$ Решение краевой задачи (1.11),(1.12) имеет вид $x = Gz$. Имеем

$$\Psi \frac{d^2}{dt^2}(Gz)(t) + \beta \frac{d}{dt}(Gz)(t) = z.$$

Получаем

$$< -Gz, z >_{L_2} = -\int_a^b (Gz)(t)z(t)dt =$$
$$= -\int_a^b (Gz)(t) \left(\Psi(t)\frac{d^2}{dt^2}(Gz)(t) + \beta\frac{d}{dt}(Gz)(t)\right) dt$$

Интегрируя полученное выражение, имеем

$$-\beta \int_a^b (Gz)(t)\frac{d}{dt}(Gz)(t) = -\frac{(Gt)^2}{2}\bigg|_a^b = 0,$$
$$-\int_a^b (Gz)(t)\Psi(t)\frac{d^2}{dt^2}(Gz)(t)dt = -(Gz)(t) \cdot \Psi(t) \cdot \frac{d}{dt}(Gz)(t)\bigg|_{a+0}^b +$$
$$+ \int_a^b \frac{d}{dt}(Gz)(t)d(Gz \cdot \Psi)(t).$$

В силу условия теоремы имеем

$$\lim_{t\to a+0}\left(-(Gz)(t)\cdot\Psi(t)\cdot\frac{d}{dt}(Gz)(t)\right)=$$
$$=-\left(\int_a^b \frac{r(b)-r(s)}{\Psi(s)\cdot r(s)r(b)}z(s)ds\right)^2\cdot\lim_{t\to a+0}\Psi(t)r(t)\dot r(t)=0.$$

Далее получаем

$$\langle -Gz,z\rangle_{L_2}=\int_a^b\frac{d}{dt}(Gt)(t)d(Gz\cdot\Psi)(t)=$$
$$=\int_a^b\Psi(t)\left(\frac{dGz}{dt}\right)^2dt+\frac{1}{2}\int_a^b\Psi''(t)(Gz)^2(t)dt$$

Отсюда имеем

$$\langle -Gz,z\rangle_{L_2}=\|\sqrt{\Psi}\frac{dGz}{dt}\|^2_{L_2}+\frac{1}{2}\|\sqrt{-\Psi''}Gz\|^2_{L_2}, \tag{1.16}$$

таким образом, $\langle -Gz,z\rangle_{L_2}\ge 0\quad\rhd$.

Следствие 1. *Если* $\gamma_0\equiv\frac{1}{2}\inf\limits_{t\in[a,b]}(-\Psi''(t))\neq 0$, *то* $\langle -Gz,z\rangle_{L_2}\ge\gamma_0\|Gz\|^2_{L_2}$.

$\lhd$ Из равенства (1.16) получаем

$$\langle -Gz,z\rangle_{L_2}\ge\frac{1}{2}\|\sqrt{-\Psi''}Gz\|^2_{L_2}\ \ge\gamma_0\|Gz\|^2_{L_2}.\quad\rhd$$

Пример 1. Пусть $\Psi(t)=\sqrt{t},\ t\in[0,1]$. Тогда $\gamma_0=\frac{1}{8}$. Покажем существование константы γ в общем случае

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы 3. Существует константа $\gamma>0$, такая, что для любого $z\in L_2$ выполняется неравенство*

$$\langle -Gz,z\rangle_{L_2}\ge\gamma_0\|Gz\|^2_{L_2}.$$

$\lhd$ Из равенства (1.16) имеем

$$\langle -Gz,z\rangle_{L_2}\ge\|\sqrt{\Psi}\frac{dGz}{dt}\|^2_{L_2}.$$

Покажем, что существует $\gamma>0$, такая, что

$$\|\sqrt{\Psi}\frac{dGz}{dt}(\cdot)\|^2_{L_2}\ \ge\gamma\|Gz\|^2_{L_2}. \tag{1.17}$$

Обозначим $Gz = u$. Неравенство (1.17) перепишем в виде

$$\mathfrak{F}u \equiv \int_a^b \left(\Psi \dot{u}^2 - \gamma u^2\right) dt \geq 0. \tag{1.18}$$

Будем рассматривать функционал $\mathfrak{F}$ в пространстве $\tilde{W}_{\sqrt{\Psi},2}$ таких абсолютно непрерывных на $[a,b]$ функций x, что $\sqrt{\Psi}\dot{x} \in L_2$. Пространство $\tilde{W}_{\sqrt{\Psi},2}$ изоморфно прямому произведению $L_2 \times \mathbb{R}^1$. Изоморфизм задается равенством

$$x = T_{\sqrt{\Psi}} y + \alpha,\ y \in L_2,\ \alpha \in \mathbb{R}, \tag{1.19}$$

где $T_{\sqrt{\Psi}} y = \displaystyle\int_t^b \frac{y(s)}{\sqrt{\Psi}} ds$. При некоторых условиях на Ψ оператор $T_{\sqrt{\Psi}}$ ограниченный. Оценка нормы $T_{\sqrt{\Psi}}$ приведена в следующем параграфе (см. лемму 9). Норму на $\tilde{W}_{\sqrt{\Psi},2}$ определим следующим образом

$$\|x\|_{\tilde{W}_{\sqrt{\Psi},2}} = |x(b)| + \|\sqrt{\Psi}\dot{x}\|_{L_2}.$$

Отметим, что банахово пространство $W_{\Psi,2,1}$ вложено в $\tilde{W}_{\sqrt{\Psi},2}$.

Решим задачу

$$\begin{gathered} \mathfrak{F}x \to \min, \\ x(b) = 0. \end{gathered} \tag{1.20}$$

Далее будем использовать теорию минимизации квадратичных функционалов, разработанную Пермским Семинаром [14, 17].

Представляя равенство (1.19) при $\alpha = 0$, сведем задачу (1.20) к задаче о безусловном минимуме функционала

$$\mathfrak{F}_1 y = \mathfrak{F}\left(T_{\sqrt{\Psi}} y\right)$$

в пространстве L_2.

Имеем

$$\mathfrak{F}_1 y = \langle Hy, y\rangle_{L_2},$$

где $H = I - \gamma K,\ \ K = T^*_{\sqrt{\Psi}} T_{\sqrt{\Psi}}$. Покажем, что при некоторых $\gamma > 0$ оператор H положителен. Имеем

$$\langle Hy, y\rangle_{L_2} = \|y\|^2_{L_2} - \langle Ky, y\rangle_{L_2} \geq \|y\|^2_{L_2} - \gamma\|K\|_{L_2\to L_2}\cdot\|y\|^2_{L_2} = (1-\gamma\|K\|_{L_2\to L_2})\cdot\|y\|^2_{L_2}.$$

Если $\gamma < 1/\|K\|_{L_2\to L_2}$, то оператор H положителен и обратим. Далее воспользуемся следующим утверждением [1]:

Квадратичный функционал $\mathfrak{F}$ достигает в точке x_0 минимума на множестве D тогда и только тогда, когда оператор H положителен, и $x_0 = T_{\sqrt{\Psi}} y_0$, где y_0 – решение уравнения $Hy = 0$. При этом каждая точка локального минимума является точкой глобального минимума.

Используя это утверждение получаем, что функционал $\mathfrak{F}$ достигает своего минимума в точке $x_0 = 0$. Таким образом, получаем, что при $\gamma < 1/\|K\|_{L_2 \to L_2}$

$$\int_a^b \big(\Psi(t)\dot{u}^2(t) - \gamma u^2(t)\big)\, dt \geq 0$$

в пространстве $\tilde{W}_{\sqrt{\Psi},2}$. Так как, $W_{\Psi,2,1} \subset \tilde{W}_{\sqrt{\Psi},2}$, то это утверждение сохраняет свою силу и в $W_{\Psi,2,1}$.

Следствие 2. *Для любых $z \in L_2$ выполняется неравенство*

$$\langle -Gz, z\rangle_{L_2} \geq \tilde{\gamma}\|Gz\|^2_{L_2},$$

где $\tilde{\gamma} = \gamma + \gamma_0$.

Доказательство следует из следствия 1, леммы 4 и равенства (1.16).

Нам в дальнейшем понадобится оценка нормы оператора Грина задачи (1.11), (1.12).

Справедлива

Лемма 5.

$$\|Gz\|_{L_2 \to L_2} \leq \| \, \|G(t,\cdot)\|_{L_2}\|_{L_2},$$

где $G(t,s)$ имеет вид (1.4)

$\lhd$ Утверждение леммы следует из неравенства Гельдера. Действительно,

$$\|Gz\|_{L_2 \to L_2} \leq \left(\int_a^b \left(\int_a^b G(t,s)z(s)ds\right)^2 dt\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\int_a^b \|G(t,\cdot)\|^2_{L_2}\|z\|^2_{L_2} dt\right)^{1/2} \leq \| \, \|G(t,\cdot)\|_{L_2}\|_{L_2} \, \|z\|_{L_2}. \qquad \rhd$$

Следствие 3. *Справедлива оценка*

$$\|Gz\|_{L_2 \to L_2} \leq \| \, \|G(t,\cdot)\|_{L_2}\|_{L_2},$$

где

$$\tilde G(t,s)=\begin{cases}-\dfrac{r(s)}{\Psi(s)\cdot\dot r(s)}, & a\le s\le t\le b\\ -\dfrac{r(b)-r(s)}{\Psi(s)\cdot\dot r(s)}, & a\le t\le s\le b\end{cases}.$$

Доказательство следует из монотонности на $[a,b]$ функции r и оценки $|G(t,s)|\le|\tilde G(t,s)|$ для каждого фиксированного $t\in[a,b]$ и $s\in[a,b]$.

Пример 2. Рассмотрим задачу (0.5),(1.1) при $\Psi(t)\equiv t,\ t\in[0,1]$. В этом случае, $r(t)=t^{1-\beta}$,
$\beta<1$ и фундаментальный вектор $X_1=\left(1-t^{1-\beta},t^{1-\beta}\right)$.

Функция Грина задачи (1.11),(1.12) имеет вид $G(t,s)=\begin{cases}-\dfrac{1-t^{1-\beta}}{1-\beta}, & 0\le s\le t\le 1\\ -\dfrac{t^{1-\beta}(1-s^{1-\beta})}{(1-\beta)\cdot s^{1-\beta}}, & 0\le t\le s\le 1\end{cases}$. По лемме 5 при $\beta\ne 0,\ 1/2$ имеем

$$\|G\|^2_{L_2\to L_2}\le\|\,\|\tilde G(t,\cdot)\|_{L_2}\|^2_{L_2}\le$$
$$\le\frac{1}{(1-\beta)^2}\left(\frac12-\frac{2}{3-\beta}-\frac{2(1-\beta)^2}{(3-2\beta)(1-2\beta)\beta}+\frac{1}{2(1-2\beta)}+\frac{2}{(2-\beta)\beta}\right).$$

2. Признаки корректной разрешимости краевых задач для сингулярного дифференциального уравнения второго порядка

Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} \Psi(t)\ddot{x} + \beta\dot{x} = f_1(t,x), \\ x(a) = \alpha_{11},\ x'(b) = \alpha_{12}, \end{gathered} \tag{2.1}$$

и задачу

$$\begin{gathered} \Psi(t)\ddot{x} + \beta\dot{x} = f_2(t,x), \\ x(a) = \alpha_{21},\ x'(b) = \alpha_{22}, \end{gathered} \tag{2.2}$$

где $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}^1,\ i,j = \overline{1,2}$.

Основными результатами данного параграфа являются условия корректной разрешимости задач (2.1),(2.2). Напомним [10], что под корректной разрешимостью понимается однозначная разрешимость задачи при любом $\alpha \in \mathbb{R}^2$ и непрерывная зависимость решения от α.

Рассмотрим оператор $T : L_p \to L_p$ $(1 \le p \le \infty)$, определенный равенством

$$(Tz)(t) = \int_t^b \frac{z(s)}{\Psi(s)} ds,\ t \in [a,b]. \tag{2.3}$$

Нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 6. *При каждом фиксированной* $p\,(1 \le p \le \infty)$ *справедлива оценка*

$$\|T\|_{L_p \to L_p} \le \|\omega\|_{L_p},$$

где

$$\omega(t) = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_t^b \frac{ds}{|\Psi(s)|^q}\right)^{1/q}, & 1 < q \le \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ t \in [a,b]. \\ \operatorname*{vraisup}\limits_{s \in [t,b]} \dfrac{1}{|\Psi(s)|}, & p = 1. \end{cases}$$

$\lhd$ Используя неравенство Гельдера, имеем

$$\|Tz\|_{L_p} = \| \int_{(\cdot)}^b \frac{z(s)}{\Psi(s)} ds \|_{L_p} \le \|\omega\|_{L_p} \cdot \|z\|_{L_p}.$$

Отсюда следует требуемое утверждение.

Лемма 7. *Оператор* $T^* : L_q \to L_q$, *сопряженный оператору* T $\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1,\ 1\le q\le\infty\right)$, *имеет представление*

$$(T^*z)(t)=\frac{1}{\Psi(t)}\int_a^t z(s)ds.$$

$\lhd$ Так как оператор T интегральный с ядром $K(t,s)\equiv\dfrac{\chi_{[t,b]}(s)}{\Psi(s)}$, то сопряженным оператором T^* является так же интегральный оператор с ядром

$$K^*(t,s)=K(s,t)=\frac{\chi_{[s,b]}(t)}{\Psi(t)}=\frac{\chi_{[a,t]}(s)}{\Psi(t)}.\rhd$$

Отметим, что оператор T^* при $\Psi(t)=t$, называемый оператором Чезаро [4], интенсивно изучался в литературе [10, 12].

Для специального случая функции Ψ оценку нормы оператора T можно получить следующим образом

Лемма 8. *Если существует такое* $k>0$, *что* $\Psi(t)\ge k(t-a)$ *для всех* $t\in[a,b]$, *то*

$$\|T\|_{L_p\to L_p}\ge\frac{q}{k(q-1)},\ (1<q\ge\infty).$$

$\lhd$ Так как, $\|T\|_{L_p\to L_p}=\|T^*\|_{L_q\to L_q}$, используя представление оператора T^* (лемма 7), имеем

$$\|T^*z\|_{L_q}=\|\frac{1}{\Psi(\cdot)}\int_a^{(\cdot)}z(s)ds\|_{L_q}\le\|\frac{1}{k((\cdot)-a)}\int_a^{(\cdot)}z(s)ds\|_{L_q}.$$

Применив неравенство Харди–Литтльвуда, получаем

$$\|T^*z\|_{L_q}\ge\frac{q}{k(q-1)}\|z\|_{L_q}.\qquad\rhd$$

Для случая оператора Чезаро ($\Psi(t)\equiv t,\ t\in[0,1]$) и $p=1$, $\|T^*\|_{L_1\to L_1}\ge 1$.

Заметим, что в некоторых случаях при оценке нормы оператора T можно воспользоваться обобщенным неравенством Харди.

Рассмотрим оператор $T_{\sqrt{\Psi}}:L_2\to L_2$, определенный равенством

$$(T_{\sqrt{\Psi}}z)(t)=\int_t^b\frac{z(s)}{\sqrt{\Psi(s)}}ds,\ z\in L_2.$$

Этот оператор возника при доказательстве леммы 4. Будет справедлива

Лемма 9. *Если функция* Ψ *такова, что*

$$B = \sup_{a<r<b} \sqrt{(r-a) \cdot \int_r^b \frac{1}{\Psi(s)} ds} < \infty,$$

то

$$\|T_{\sqrt{\Psi}}\|_{L_2 \to L_2} \geq 2B.$$

Доказательство получаем, рассмотрев оператор $T^*_{\sqrt{\Psi}}$ сопряженный оператору $T_{\sqrt{\Psi}}$ и применив обобщенное уравнение Харди.

Пример 3. Если $\Psi(t) \equiv t,\ t \in [0,1]$, то $B = 1/\sqrt{e}$ и

$$\|T_{\sqrt{t}}\|_{L_2 \to L_2} \geq \frac{2}{\sqrt{e}}.$$

Пример 4. В лемме 4 доказано существование константы $\gamma > 0$, такой, что для любых $z \in L_2$ выполняется неравенство

$$\langle -Gz, z \rangle_{L_2} \leq \gamma \|Gz\|^2_{L_2},$$

где $G : L_2 \to L_2$ – оператор Грина задачи (1.11),(1.12). Это неравенство выполняется при $\gamma < 1/\|K\|_{L_2 \to L_2}$, где $K = T^*_{\sqrt{\Psi}} T_{\sqrt{\Psi}}$.

Пусть $\Psi(t) \equiv t,\ t \in [0,1]$. Найдем оценку $\|K\|_{L_2 \to L_2}$. Имеем

$$(Ky)(t) = (T^*_{\sqrt{t}} T_{\sqrt{t}} y)(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t \left(\int_u^1 \frac{y(s)}{\sqrt{s}} ds \right) du.$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$(Ky)(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\int_0^t \sqrt{s} y(s) ds + t \int_t^1 \frac{y(s)}{\sqrt{s}} ds \right).$$

Далее применяя неравенство Гельдера, имеем

$$|(Ky)(t)| \leq \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2}} \|y\|_{L_2} + \sqrt{t}\sqrt{-\ln t}\, \|y\|_{L_2}.$$

Отсюда

$$\|Ky\|_{L_2} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \|\sqrt{t}\|_{L_2} + \|\sqrt{t}\sqrt{-\ln t}\|_{L_2} \right) \|y\|_{L_2} = \|y\|_{L_2}.$$

Таким образом, $\|K\|_{L_2 \to L_2} \leq 1$ и, следовательно, $\gamma < 1$.

Будем предполагать, что функция Ψ удовлетворяет условию (i).

Рассмотрим задачу

$$\Psi(t)\ddot{x} + \beta\dot{x} = f(t), \tag{2.4}$$

$$x(a) = 0,\ x'(b) = 0. \tag{2.5}$$

Лемма 10. *Если выполнено равенство*

$$\|T\|_{L_2\to L_2} \le \frac{1}{|\beta|}$$

то задача (2.4),(2.5) *для каждого* $f \in L_p$ *имеет единственное решение* $x \in W_{\Psi,p,2}$.

$\lhd$ Однозначная разрешимость краевой задачи (2.4),(2.5) эквивалентна однозначной разрешимости в пространстве L_p уравнения

$$z(t) - \beta\int_t^b \frac{z(s)}{\Psi(s)}ds = f(t), \tag{2.6}$$

которое получено подстановкой x из равенства (1.10), где $\alpha_{21} = \alpha_{22} = 0$, в уравнение (2.4). Уравнение (2.6) имеет вид

$$(I - \beta T)z = f,$$

где оператор T определен равенством (2.3). Если $\|T\|_{L_p\to L_p} \le \dfrac{1}{|\beta|}$, то уравнение (2.6) однозначно разрешимо в L_p. $\rhd$

Пусть $G_3 : L_p \to W_{\Psi,p,2}$ – оператор Грина задачи (2.4), (2.5). Выясним условия корректной разрешимости задачи (2.1). Решение задачи (2.1) удовлетворяет в пространстве $W_{\Psi,p,2}$ уравнению

$$x(t) = X\cdot \mathrm{col}\{\alpha_{21}, \alpha_{22}\} + (G_3Nx)(t), \tag{2.7}$$

где $N : W_{\Psi,p,2} \to L_p$ – оператор Немыцкого, $Nu = f(t,u)$. Уравнение (2.7) можно рассматривать в пространстве C, так как всякое решение уравнения (2.7), принадлежащее пространству C, будет принадлежать и $W_{\Psi,p,2}$. Будем рассматривать оператор Грина G_3 как оператор, действующий из L_p в C.

Лемма 11. *Если выполнены условия леммы 9, то*

$$\|G_3\|_{L_p\to C} \le \frac{\max\limits_{t\in[a,b]} \|\dfrac{W_2(t,\cdot)}{\Psi(\cdot)}\|_{L_q}}{1 - |\beta|\cdot\|T\|_{L_p\to L_p}},\ \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right),$$

где $W_2(t,s)$ *определена равенством* (1.7).

$\lhd$ В условиях леммы 9 задача (2.4),(2.5) однозначно разрешима и ее оператор Грина $G_3 : L_p \to W_{\Psi,p,2}$ имеет представление

$$G_3 = W(I - \beta T)^{-1},$$

где $W : L_p \to W_{\Psi,p,2}$ – оператор Грина задачи (1.8), (1.2). Так как, $W_{\Psi,p,2} \subset C$, то G_3 можно рассматривать как оператор, действующий из L_p в C. Имеем

$$\|G_3\|_{L_p\to C} \leq \frac{\|W\|_{L_p\to C}}{1 - |\beta| \cdot \|T\|_{L_p\to L_p}}.$$

Так как

$$\|Wz\|_C = \max_{t\in[a,b]} \left(\int_a^b \frac{W_2(t,s)}{\Psi(s)} z(s)ds \right) \leq \max_{t\in[a,b]} \left\| \frac{W_2(t,\cdot)}{\Psi(\cdot)} \right\|_{L_q} \|z\|_{L_p}. \qquad \rhd$$

Теорема 1. *Пусть задача* (2.4),(2.5) *однозначно разрешима, и* $f(t,u)$ *удовлетворяет по второму аргументу условию Липшица с константой* k_f. *Если*

$$k_f(b-a)^{1/p}\|G_3\|_{L_p\to C} < 1,$$

то краевая задача (2.1) *корректно разрешима.*

$\lhd$ Решение задачи (2.1) удовлетворяет условию (2.7), где $N : C \to L_p$. Из условия теоремы следует, что

$$\|Nu_1 - Nu_2\|_{L_p} \leq k_f(b-a)^{1/p}\|u_1 - u_2\|_C.$$

Имеем

$$\|G_3Nu_1 - G_3Nu_2\|_C \leq k_f(b-a)^{1/p}\|G_3\|_{L_p\to C}\,\|u_1 - u_2\|_C.$$

Применяя принцип неподвижной точки Банаха, получаем утверждение теоремы. $\rhd$

Заметим, что пространство $W_{\Psi,p,2}$ вложено L_p. Если рассматривать оператор G_3 как оператор, действующий из L_p в $W_{\Psi,p,2}$, то, так как $\|W\|_{L_p\to W_{\Psi,p,2}} = 1$, имеем

$$\|G_3\|_{L_p\to W_{\Psi,p,2}} \leq \frac{1}{1 - |\beta| \cdot \|T\|_{L_p\to L_p}}.$$

Лемма 12. *Пусть функция* Ψ *такова, что*

$$\left\| \frac{W_2(t,\cdot)}{\Psi(\cdot)} \right\|_{L_q} \in L_p, \ \left(1 \le p \le \infty, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right),$$

тогда оператор вложения $J : W_{\Psi,p,2} \to L_p$ *непрерывен и*

$$\|J\|_{W_{\Psi,p,2} \to L_p} \le \max\left((b-a)^{1/p}, \frac{(b-a)^{1+1/p}}{(1+p)^{1/p}}, \left\| \left\| \frac{W_2(t,\cdot)}{\Psi(\cdot)} \right\|_{L_q} \right\|_{L_p} \right).$$

$\lhd$ Из (1.10) следует, что любой элемент $x \in W_{\Psi,p,2}$ имеет представление

$$x(t) = \int_a^b W_2(t,s)\ddot{x}(s)ds + (t-a)\dot{x}(b) + x(a).$$

Отсюда получаем

$$\|Jx\|_{L_p} \le \| \int_a^b \frac{W_2(\cdot,s)}{\Psi(s)} \Psi(s)\ddot{x}(s)ds\|_{L_p} + \frac{(b-a)^{1+1/p}}{(1+p)^{1/p}}|\dot{x}(b)| + (b-a)^{1/p}|x(a)| \le$$

$$\le \left\| \left\| \frac{W_2(t,\cdot)}{\Psi(\cdot)} \right\|_{L_q} \right\|_{L_p} \cdot \|\Psi\ddot{x}\|_{L_p} + \frac{(b-a)^{1+1/p}}{(1+p)^{1/p}}|\dot{x}(b)| + (b-a)^{1/p}|x(a)| \le$$

$$\le \max\left((b-a)^{1/p}, \frac{(b-a)^{1+1/p}}{(1+p)^{1/p}}, \left\| \left\| \frac{W_2(t,\cdot)}{\Psi(\cdot)} \right\|_{L_q} \right\|_{L_p} \right) \cdot \|x\|_{W_{\Psi,p,2}}$$

Аналогично теореме 1 будет верна следующая

Теорема 2. *Пусть задача* (2.4), (2.5) *однозначно разрешима, и* $f(t,u)$ *удовлетворяет по второму аргументу условию Липшица с константой* k_f. *Если*

$$k_f\|G_3\|_{L_p \to W_{\Psi,p,2}} \cdot \|J\|_{W_{\Psi,p,2} \to L_p} < 1,$$

то краевая задача (2.1) *корректно разрешима.*

$\lhd$ Решение задачи (2.1) удовлетворяет условию уравнению

$$x(t) = X \cdot \mathrm{col}\{\alpha_{21}, \alpha_{22}\} + (G_3NJx)(t),$$

где оператор Немыцкого N действует из L_p в L_p. Используя условие теоремы, имеем

$$\|Nu_1 - Nu_2\|_{L_p} \le \left(\int_a^b |Nu_1 - Nu_2|^p dt \right)^{1/p} \le k_f\|u_1 - u_2\|_{L_p}.$$

Далее получаем

$$\|G_3NJu_1 - G_3NJu_2\|_{W_{\Psi,p,2}} \le \|G_3\|_{L_p\to W_{\Psi,p,2}} \cdot \|NJu_1 - NJu_2\|_{L_p} \le$$
$$\le k_f\|G_3\|_{L_p\to W_{\Psi,p,2}} \cdot \|J\|_{W_{\Psi,p,2}\to L_p} \cdot \|u_1 - u_2\|_{W_{\Psi,p,2}}.$$

Ссылка на принцип неподвижной точки Банаха завершает доказательство теоремы. $\triangleright$

В некоторых случаях использование теоремы 2 дает менее жесткие условия корректной разрешимости, чем условия, получаемые по теореме 1. Это показывает следующий

Пример 5. Пусть $p = q = 2,\ \Psi(t) = \sqrt[4]{t(1-t)},\ t \in [0, 1]$. Покажем, что

$$\|G_3\|_{L_2\to C} > \|G_3\|_{L_2\to W_{\Psi,2,2}} \cdot \|J\|_{W_{\Psi,2,2}\to L_2}.$$

Для этого покажем, что

$$\max_{t\in[0,1]} \left\|\frac{W_2(t,\cdot)}{\Psi(\cdot)}\right\|_{L_2} > \max\left(1, \left\|\left\|\frac{W_2(t,\cdot)}{\Psi(\cdot)}\right\|_{L_2}\right\|_{L_2}\right).$$

Имеем

$$\left\|\frac{W_2(t,\cdot)}{\Psi(\cdot)}\right\|_{L_2} = \left(\int_0^t \frac{s^{3/2}}{\sqrt{1-s}}ds + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s(1-s)}}ds\right)^{1/2} =$$
$$= \Big(-2t^{3/2}\sqrt{1-t} + \frac{3}{2}(2t-1)\sqrt{t(1-t)} +$$
$$+ \left(\frac{3}{8} + t^2\right) \cdot \arcsin 2t - 1 + \frac{\pi}{2}t^2 + \frac{3\pi}{16}\Big)^{1/2}.$$

Эта функция является монотонно возрастающей, и

$$\max_{t\in[0,1]} \left\|\frac{W_2(t,\cdot)}{\Psi(\cdot)}\right\|_{L_2} = \left\|\frac{W_2(1,\cdot)}{\Psi(\cdot)}\right\|_{L_2} = \sqrt{\frac{11\pi}{8}}$$

Далее, имеем

$$\left(\int_0^1 \left\|\frac{W_2(t,\cdot)}{\Psi(\cdot)}\right\|_{L_2}^2 dt\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{11\pi}{24}}$$

Очевидно, что условие, полученное по теореме 2, будет менее жестким.

Теперь пусть функция Ψ удовлетворяет условию (ii). рассмотрим задачу (2.2). Разрешимость в $W_{\Psi,p,1}$ задачи (2.2) эквивалентна разрешимости в L_p уравнения

$$z = f(t, Gz + X\alpha) \tag{2.8}$$

при каждом фиксированном $\alpha \in \mathbb{R}^2$. Уравнение (2.8) получено подстановкой x из равенства (1.9) в уравнение (0.5). Перепишем уравнение (2.8) в виде

$$\Phi z = 0, \tag{2.9}$$

где оператор $\Phi : L_p \to L_p$ определен равенством

$$\Phi z = z - N(Gz + X\alpha).$$

Рассмотрим уравнение (2.9) в пространстве L_2.

Лемма 13. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) Существует константа $\gamma > 0$ такая, что

$$\langle -Gz, z\rangle_{L_2} \geq \gamma \|Gz\|^2_{L_2}$$

2) Пусть существуют константы $m \geq 0$, $n < \gamma = \gamma(G)$, такие, что

а) Для всех u, $v \in \mathbb{R}^1$ и почти всех $t \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq m|u - v|$$

б) Для всех u, $v \in \mathbb{R}^1$ и почти всех $t \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$(-f(t, u) + f(t, v))(u - v) \leq m(u - v)^2$$

Тогда при $\xi > \dfrac{m^2}{4(\gamma - n)}$ оператор $I - N(Gz + X\alpha)$ является (U_ξ, μ) – монотонным,
где $\mu = 1 - \dfrac{m^2}{4\xi(\gamma - n)}$ и $U_\xi z = z - \xi Gz$.

◁ Обозначим

$$R = \langle (u - N(Gu + X\alpha)) - (v - N(Gv + X\alpha)), u - v\rangle_{L_2,\xi}\,.$$

Для любых $u, v \in L_2$ имеем

$$R = \|u - v\|^2_{L_2} + < (-N(Gu + X\alpha) - \xi(Gu + X\alpha)) -$$
$$-(-N(Gv + X\alpha) - \xi(Gv + X\alpha)), u - v >_{L_2} +$$
$$+ \langle (-N(Gu + X\alpha) - N(Gv + X\alpha)), (-\xi(Gu + X\alpha) - (-\xi(Gv + X\alpha))\rangle_{L_2}\,.$$

Ввиду условия 2) получаем

$$R \geq \|u-v\|_{L_2}^2 + < (-N(Gu+X\alpha) - \xi(Gu+X\alpha)) -$$
$$-(-N(Gv+X\alpha) - \xi(Gv+X\alpha)), u-v >_{L_2} - n\xi\|Gu-Gv\|_{L_2}^2.$$

Отсюда, применяя условие а) и неравенство Гельдера, имеем

$$R \geq \|u-v\|_{L_2}^2 - m\|Gu-Gv\|_{L_2} \cdot \|u-v\|_{L_2} + \xi \left\langle -G(u-v), u-v \right\rangle_{L_2} - n\xi\|Gu-Gv\|_{L_2}^2.$$

Положим

$$\varepsilon = \frac{4(\gamma-n)\xi - m^2}{m}.$$

По условию леммы $\varepsilon > 0$. Получаем

$$R \geq \|u-v\|_{L_2}^2 - \frac{\frac{2}{m+\varepsilon}\|u-v\|_{L_2}^2 + \frac{m+\varepsilon}{2}\|Gu-Gv\|_{L_2}^2}{2} +$$
$$+\xi \left\langle (-G(u-v), u-v \right\rangle_{L_2} - n\xi\|Gu-Gv\|_{L_2}^2.$$

Отсюда, используя условие 1), получаем

$$R \geq \|u-v\|_{L_2}^2 \left(1 - \frac{m}{m+\varepsilon}\right) + \|Gu-Gv\|_{L_2}^2 \left(\xi(\gamma-n) - \frac{m(m+\varepsilon)}{4}\right) \geq$$
$$\geq \|u-v\|_{L_2}^2 \left(1 - \frac{m}{m+\varepsilon}\right).$$

Подставив значение ε, получаем утверждение леммы

Теорема 3. *Если выполнены условия леммы 11, то отображение $\Phi : L_2 \to L_2$ является гомеоморфизмом.*

$\lhd$ Так как, $(-G)$ положительный оператор, то при любом $\xi \geq 0$ оператор $U_\xi = I - \xi G$ обратим в силу того, что $\sigma(-G) \subset [0, \infty)$. Таким образом, в силу леммы 11 оператор Φ является (U_ξ, μ) – монотонным относительно обратимого оператора U_ξ.$\lhd$

Теорема 3 гарантирует корректную разрешимость задачи (2.2) в пространстве L_2.

3. Разрешимость квазилинейных задач для сингулярного дифференциального уравнения второго порядка

Рассмотрим краевую задачу

$$\Psi\ddot{x} + \beta\dot{x} = f(t,x), \tag{3.1}$$

$$\ell x = \varphi x, \tag{3.2}$$

где $\ell : W_{\Psi,p,1} \to \mathbb{R}^2\,(\ell : W_{\Psi,p,2} \to \mathbb{R}^2)$ – линейный ограниченный вектор-функционал,
$\varphi : W_{\Psi,p,1} \to \mathbb{R}^2\,(\varphi : W_{\Psi,p,2} \to \mathbb{R}^2)$ – непрерывный вектор-функционал, где $W_{\Psi,p,1}\,(W_{\Psi,p,2})$ – непрерывный дифференциал функции на $(a,b]$, $\ddot{x}$ существует почти всюду на $[a,b]$, $\Psi\ddot{x} \in L_p$.

Предложенная в [2] схема позволяет получить признаки разрешимости задачи (3.1),(3.2) для широкого класса функционалов ℓ, не уточняя при этом его конкретный вид.

Задачу (3.1), (3.2) будем рассматривать при следующих предположениях:

1) Функция Ψ удовлетворяет условию (i);

$$\langle -Gz, z\rangle_{L_2} \geq \gamma \|Gz\|^2_{L_2}$$

2) Оператор Немыцкого $N : W_{\Psi,p,1} \to L_2\,(N : W_{\Psi,p,2} \to L_2)$, определенный равенством $Nu \equiv f(t,u)$ непрерывен, $f(t,0) \equiv 0$.

Определение 3. Будем говорить, что функция f удовлетворяет условию $P(c,d,\delta)$, если существует функция $c \in L_p$ и такие константы $d > 0$, $\delta \in [0,1]$, что

$$|f(t,u)| \leq c(t) + d|u|^\delta$$

для почти всех $t \in [a,b]$ и для всех u.

Разрешимость задачи (3.1), (3.2) будем исследовать в банаховом пространстве $W_{\Psi,p,2}$. Пусть ℓ, $\varphi : W_{\Psi,p,2} \to \mathbb{R}^2$. В этом случае, фундаментальный вектор уравнения $\Psi\ddot{x} + \beta\dot{x} = 0$ имеет вид:

$$x \equiv \left(1, \frac{1}{r'(b)} r(t)\right),$$

где $r'(t) = e^{-\beta \displaystyle\int_{\varepsilon_0}^{t} \frac{d\tau}{\Psi(\tau)}}, \forall \varepsilon_0 > a$.

$$\|X\|_{\mathbb{R}^2 \to W_{\Psi,p,2}} = \| \, \|X\| \, \|_{W_{\Psi,p,2}} = 1 + \|\frac{\Psi r''}{r'(b)}\|_{L_p} = 1 + \frac{|\beta|}{r'(b)} \|r'(\cdot)\|_{L_p}$$

Так как,

$$r''(t) = -\frac{\beta r'(t)}{\Psi(t)}.$$

Лемма 14. *Пусть выполнены условия леммы 2. Если функция f удовлетворяет по второму аргументу условию Липшица с константой k_f, то f квазиограничена с квазинормой $b_k \leq k_f$.*

$\lhd$ Имеем

$$\frac{\|f(\cdot,u)\|_{L_p}}{\|u\|_{W_{\Psi,p,2}}} \leq \frac{\|f(\cdot,u) - f(\cdot,0)\|_{L_p} + \|f(\cdot,0)\|_{L_p}}{\|u\|_{W_{\Psi,p,2}}} \leq \frac{k_f \|u\|_{L_p}}{\|u\|_{W_{\Psi,p,2}}} + \frac{\|f(\cdot,0)\|_{L_p}}{\|u\|_{W_{\Psi,p,2}}}.$$

В силу леммы 2

$$\|u\|_{W_{\Psi,p,2}} \sim \|u\|_{L_p} + \|\dot{u}\|_{L_p} + \|\Psi\ddot{u}\|_{L_p}.$$

Получаем

$$\frac{\|f(\cdot,u)\|_{L_p}}{\|u\|_{W_{\Psi,p,2}}} \leq \frac{k_f \|u\|_{L_p}}{\|u\|_{L_p} + \|\dot{u}\|_{L_p} + \|\Psi\ddot{u}\|_{L_p}} + \frac{\|f(\cdot,0)\|_{L_p}}{\|u\|_{W_{\Psi,p,2}}}.$$

Таким образом, при $\|u\|_{W_{\Psi,p,2}} \to \infty$ $\overline{\lim\limits_{\|u\|_{W_{\Psi,p,2}} \to \infty}} \dfrac{\|f(\cdot,u)\|_{L_p}}{\|u\|_{W_{\Psi,p,2}}} \leq k_f$ и, следовательно, $b_f \leq k_f$. $\rhd$

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) Выполнены условия теоремы 1 или теоремы 2;

2) $\det(\ell X) \neq 0$*;*

3) Вектор–функционал φ квазиограничен с квазинормой b_φ;

4) $\|(\ell X)^{-1}\| \cdot \left(1 + \dfrac{|\beta|}{r'(b)}\|r'(\cdot)\|_{L_p}\right) \cdot (k_f\|\ell\| + b_\varphi) < 1 - k_f$,

тогда задача (3.1), (3.2) *имеет хотя бы одно решение.*

$\lhd$ В качестве пространств D и B возьмем соответственно $W_{\Psi,p,2}$ и L_p. Пусть

$$\mathcal{L}x \equiv \Psi\ddot{x} + \beta\dot{x}, \qquad Fx \equiv Nx.$$

В качестве вспомогательной задачи рассмотрим для уравнения (3.1) задачу с условиями

$$\ell_1 x \equiv \mathrm{col}\{x(a), x'(b)\} = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}^2. \tag{3.3}$$

При выполнении первого условия теоремы задача (3.1), (3.3) корректно разрешима. Пусть $G_3 : L_p \to W_{\Psi,p,2}$ – оператор Грина задачи (3.1), (3.3). При этом $\|G_3\|_{L_p \to W_{\Psi,p,2}} = 1$. Как было показано выше,

$$\|X\|_{\mathbb{R}^2 \to W_{\Psi,p,2}} = 1 + \frac{|\beta|}{r'(b)}\|r'(\cdot)\|_{L_p}.$$

По лемме 14 квазинорма b_f не превосходит константы Липшица k_f. Применение [36, 37] завершает доказательство. $\rhd$

Теорема 5. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) Выполнены условия леммы 12, теоремы 1 или теоремы 2;

2) Функция $f(t,u)$ удовлетворяет условию $P(c,d,\delta)$, $\delta \in [0,1)$;

3) Вектор–функционал φ квазиограничен с квазинормой $b_\varphi = 0$,

тогда задача (3.1), (3.2) *имеет хотя бы одно решение.*

$\lhd$ Из условия 3) теоремы получаем, что квазинорма функции f равна нулю. Действительно,

$$\|f(\cdot,u)\|_{L_p} \leq \|\|_{L_p} \leq \|c(\cdot) + d|u|^\delta\|_{L_p} + d\|u^\delta\|_{L_p}$$

В силу неравенства Иенсена имеем

$$\|f(\cdot,u)\|_{L_p} \leq \|c\|_{L_p} + d(b-a)^{1-\delta}\|u\|^\delta_{L_p}.$$

Используя неравенство,

$$\|u\|_{L_p} \leq \|J\|_{W_{\Psi,p,2} \to L_p} \cdot \|u\|_{W_{\Psi,p,2}},$$

где $J : W_{\Psi,p,2} \to L_p$ оператор вложения пространства $W_{\Psi,p,2}$ в L_p [см. лемму 12], имеем

$$\|f(\cdot, u)\|_{L_p} \leq \|c\|_{L_p} + d(b-a)^{1-\delta} \|J\|^{\delta}_{W_{\Psi,p,2}} \cdot \|u\|^{\delta}_{W_{\Psi,p,2}}.$$

Отсюда следует, что

$$b_f = \overline{\lim_{\|u\|_{W_{\Psi,p,2}} \to \infty}} \frac{\|f(\cdot, u)\|_{L_p}}{\|u\|_{W_{\Psi,p,2}}} = 0.$$

Для завершения доказательства применим [36, 37].

Пример 6. Рассмотрим уравнение

$$\sin t \cdot \ddot{x} + \beta \dot{x} = f(t, x), \; t \in [0, 1] \tag{3.4}$$

в пространстве $W_{\Psi,p,2}$, где $p \equiv 1$, $\Psi(t) \equiv \sin t$. Оператор вложения $J : W_{\Psi,p,2} \to L_1$ непрерывен, так как по лемме 12

$$\operatorname*{vraisup}_{0 \leq s \leq 1} \left|\frac{W_2(t,s)}{\sin s}\right| = \frac{t}{\sin t} \in L_1.$$

При $\beta < \sin 1$ по лемме 7 краевая задача

$$\sin t \cdot \ddot{x} + \beta \dot{x} = f_1$$
$$x(0) = 0, \; x'(1) = 0$$

однозначно разрешима $\forall f_1 \in L_1$.

Если константа Липшица по второму аргументу функции f удовлетворяет условию

$$k_f < \sin 1 - |\beta|$$

то условия теоремы 1 выполнены и краевая задача (3.2), (1.2) корректно разрешима.

Пусть $\ell x = \mathrm{col}\{x(0), x(1)\}$. И

$$X = \left\{1, \left(\frac{1+\cos 1}{1-\cos 1}\right)^{-\beta/2} \int_0^t \left(\frac{1+\cos 1}{1-\cos 1}\right)^{-\beta/2}\right\} -$$

фундаментальный вектор уравнения $\sin t \cdot \ddot{x} + \beta\dot{x} = 0$. Легко проверить, что $\det(\ell X) \neq 0$.

Таким образом, для уравнения (3.4) краевая задача с условиями $\begin{Bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{Bmatrix} = \varphi x$ по теореме 5 имеет решение $x \in W_{\Psi,1,2}$, если f удовлетворяет условию $P(c, d, \delta)$, $\delta \in [0, 1)$ и φ имеет квазинорму $b_\varphi \equiv 0$.

Пример 7. Рассмотрим уравнение (0.6). Уравнение (0.6) является частным случаем уравнения (3.1) с

$$f(t, x) \equiv \beta_0 t \exp\left(-\frac{1}{x + \tau}\right),\ \tau \geq 0.$$

Так как, физический смысл x - температура химической реакции, то $x \geq 0$. В этому случае f удовлетворяет условию $P(c, 0, \delta)$, так как $f(t, u) \leq \beta_0 t$ для почти всех $t \in [0, 1]$ и для всех u. Следовательно, к уравнению (0.6) можно применить теорему 5.

Отметим, что ограничение на константу Липшица функции f существенно сужает класс функций к которым применимы теоремы 4, 5. Изложенные в [36, 37] результаты позволяют избавиться от этого ограничения.

Теперь в качестве вспомогательной задачи рассмотрим для уравнение (3.1) задачу с условиями

$$\ell_1 x \equiv \mathrm{col}\{x(a), x(b)\} = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}^2. \tag{3.5}$$

Разрешимость задачи (3.1), (3.2) будем исследовать в банаховом пространстве $W_{\Psi,2,1}$. Пусть ℓ_2, $\varphi : W_{\Psi,2,1} \to \mathbb{R}^2$, Ψ удовлетворяет условию (ii).

В этом случае фундаментальный вектор уравнения $\Psi \cdot \ddot{x} + \beta\dot{x} = 0$

$$X \equiv \left(1 - \frac{1}{r(b)} r(t), \frac{1}{r(b)} r(t)\right).$$

Получаем, что

$$\|X\|_{\mathbb{R}^2 \to W_{\Psi,p,1}} = \|\,\|X\|\,\|_{W_{\Psi,p,1}} = 1 + \frac{|\beta|}{|r(b)|}\|r'(\cdot)\|_{L_p}.$$

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Если*

1) $\det(\ell X) \neq 0$*;*

2) Вектор–функционал φ квазиограничен с квазинормой b_φ;

3)

$$\|(\ell X)^{-1}\| \cdot \left((\|\ell\| + b_\varphi) \cdot \frac{\|G\|^2_{L_2\to L_2}}{16} \left(1 - \frac{m^2 \|G\|^2_{L_2\to L_2}}{4(\gamma - n)} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(1 + \frac{m\sqrt{\|G\|_{L_2\to L_2}}}{\sqrt{\|G\|_{L_2\to L_2} \cdot m^2 + 4(\gamma - n)}} \right) + b_\varphi \left(1 + \frac{|\beta|}{r(b)} \|r'\|_{L_2} \right) \right) < 1$$

то задача (3.1), (3.2) *имеет хотя бы одно решение.*

Доказательство следует из [36, 37].

Пример 8. Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} t \cdot \ddot{x} + \beta \dot{x} = f(t, x),\ t \in [0, 1] \\ \ell x \equiv \mathrm{col}\{x(1), x'(1)\} = \varphi x, \end{gathered} \tag{3.6}$$

где вектор-функционал φ квазиограничен с квазинормой b_φ, f удовлетворяет условиям 2) и 3) [36, 37].

Для установления факта разрешимости задачи (3.6) рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{gathered} t \cdot \ddot{x} + \beta \dot{x} = f(t, x),\ t \in [0, 1] \\ \ell_1 x \equiv \mathrm{col}\{x(0), x(1)\} = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}^2. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Задачу (3.6) будем рассматривать в пространстве $W_{\Psi,2,1}$, где $\Psi \equiv t$. Пусть f такова, что удовлетворяет условию леммы 11 с константами $m = \dfrac{5}{9}$, $-n = \dfrac{2}{9}$. Задача (3.7) удовлетворяет всем условиям леммы 11. Действительно, по примеру 4 при $\gamma < 1$ выполняется неравенство

$$\langle -Gz, z \rangle_{L_2} \geq \gamma \|Gz\|^2_{L_2}.$$

где $G : L_2 \to L_2$ – оператор Грина задачи (2.6). Пусть $\gamma = \dfrac{8}{9}$. По теореме 3 задача (2.6) корректно разрешима.

Теперь для задачи (3.6) проверим все условия теоремы 6. Фундаментальный вектор X имеет вид:

$$X = (1 - t^{1-\beta}, t^{1-\beta}).$$

При $\beta < \dfrac{1}{2}$ имеем

$$\|X\|_{\mathbb{R}^2 \to W_{\Psi,p,1}} = 1 + \frac{|\beta|}{\sqrt{1-2\beta}}, \ \|X\|_{\mathbb{R}^2 \to L_2} = \frac{1}{3-2\beta}$$

Проверим первое условие теоремы 6

$$\det(\ell X) = 1 - \beta \neq 0.$$

Далее по [37] найдем константу b_z. Для этого получим оценку нормы оператора Грина задачи (3.7). Используя пример 2 при $\beta < \dfrac{1}{9}$ имеем $\|G\|^2_{L_2 \to L_2} < 2$. Подставляя все известные величины в выражение для b_z, получаем

$$b_z < \frac{18}{25}.$$

Найдем $\|\ell\|_{W_{\Psi,2,1} \to \mathbb{R}^2}$. Имеем

$$|\ell u| \leq \max(|u(1)|, \ |u'(1)|) \leq \max(\|u\|_{W_{\Psi,2,1}}, \ |u'(1)|).$$

Используя равенство

$$\int_0^1 tu''(t)dt + u(1) - u(0),$$

получаем $|u'(1)| \leq \|u\|_{W_{\Psi,2,1}}$, следовательно,

$$\|\ell\|_{W_{\Psi,2,1} \to \mathbb{R}^2} \leq 1.$$

Таким образом, задача (3.6) будет иметь решение в пространстве $W_{\Psi,2,1}$ при выполнении условия

$$b_\varphi < \frac{1}{13}. \tag{3.8}$$

Иначе говоря, задача (3.6) будет иметь решение, если вектор-функционал φ квазиограничен с квазинормой меньшей, чем $\dfrac{1}{13}$.

Пример 9. В случае, если f аддитивная функция по второму аргументу, то по теореме 6 можно существенно улучшить условие разрешимости задачи (3.6).

Пусть выполнены все условия примера 8. По теореме 6 задача (3.6) будет иметь решение в пространстве $W_{\Psi,2,1}$, если квазинорма вектор-функционала φ удовлетворяет условию $b_\varphi < \dfrac{43}{56}$. Отметим, что это условие менее жесткое, чем условие (3.8).

Заключение

В заключении отметим, что полученные в работе достаточные признаки разрешимости краевых задач для сингулярного дифференциального уравнения (0.5) оказываются менее жестким, чем при непосредственной применимости схемы Шаудера.

Библиографический список

1. Абдуллаев, А.Р. Вопросы теории возмущений устойчивых свойств для функционально-дифференциальных уравнений: Дис. .докт. физ.-мат. наук. – Пермь, 1991, – 210 с.

2. Абдуллаев, А.Р. О разрешимости и параметризации множества решений нелинейного операторного уравнения // Перм. политехн. ин-т. Пермь, 1983. 9 с. Деп. в ВИНИТИ 3.05.83, № 2338–83.

3. Абдуллаев, А.Р. Об операторе Грина с минимальной нормой // Краевые задачи. Пермь, 1991. С. 3–6.

4. Абдуллаев, А.Р. Сюръективность, как устойчивое свойство линейных операторов // Вестник ПГТУ. Математика и прикладная математика, № 4. – Пермь, 1997. С. 35–40.

5. Абдуллаев, А.Р. О коэффициенте сюръективности линейных краевых задач / А.Р. Абдуллаев, Н.А. Брагина // Перм. политехи, ин-т. Пермь, 1998. 7 с. Деп в ВИНИТИ 7.12.98, №3569–В98.

6. Абдуллаев, А.Р. Операторы Грина с минимальной нормой / А.Р. Абдуллаев, Н.А. Брагина // Известия вузов. Математика. 2003. – № 4. – С. 3–7.

7. Абдуллаев, А.Р. Об одной схеме исследования на разрешимость резонансных краевых задач / А.Р. Абдуллаев, А.Б. Бурмистрова // Известия вузов. Математи-ка. – 1996, №11. – с. 14–22.

8. Абдуллаев, А.Р. Элементы теории топологических нетеровых операторов. / А.Р. Абдуллаев, А.Б. Бурмистрова / Челябинск, 1994. – 93 с.

9. Азбелев, Н.В. О нелинейных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1976. – Т. 12, №11. – с. 1923–1932.

10. Азбелев, Н.В. Априорные оценки решений задач Коши и разрешимость краевых задач для уравнений с запаздывающим аргументом / А.Р. Абдуллаев, В.П. Максимов // Дифференциальные уравнения. 1979. Т.5, №10 – с. 1731–1747.

11. Азбелев, Н.В. Уравнения с запаздывающим аргументом / А.Р. Абдуллаев, В.П. Максимов // Дифференциальные уравнения. 1982. – Т. 18, №12. – с. 2027–2050.

12. Азбелев, Н.В. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. / А.Р. Абдуллаев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматулина / М.: Наука, 1991. 300 с.

13. Азбелев, Н.В. Абстрактные функционально-дифференциальные уравнения / А.Р. Абдуллаев, Л.Ф. Рахматулина // Функционально-дифференциальные уравнения. Пермь, 1987. – С. 3–11.

14. Азбелев, Н.В. О линейных уравнениях с отклоняющимся аргументом / А.Р. Абдуллаев, Л.Ф. Рахматулина // Дифференциальные уравнения. 1970. – Т. 6, №4.–с. 616–628.

15. Азбелев, Н.В. Функционально-дифференциальные уравнения / А.Р. Абдуллаев, Л.Ф. Рахматулина // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14, № 5. – С. 771–797.

16. Бойчук, А.А. Построение решений двухточечной краевой задачи для слабовозмущенных нелинейных систем в критических случаях / А.А. Бойчук // Укр. Мат.Журнал. 1989. – Т. 41, № 10. – с. 1416–1420.

17. Брагина, Н.А. О вычислении и оценках коэффициента сюръективности / Н.А. Брагина // Областная научная конференция молодых ученых и аспирантов. «Молодежная наука Прикамья». Пермь. – 2000 г. – С 117.

18. Брагина, Н.А. Об одном методе оценки коэффициента сюръективности / Н.А. Брагина // Научно техническая конференция ПГТУ. «Проблемы прикладной матема-тики и механики». Пермь. – 1998. – С. 11.

19. Брагина, Н.А. Об условиях параметризуемости функционально дифференциальных уравнений / Н.А. Брагина // Воронежская зимняя математическая школа. «Современные методы теории функций и смешанные проблемы». Воронеж. – С. 54.

20. Брагина, Н.А. О параметризуемости функционально-дифференциальных уравнений / Н.А. Брагина // Перм. политехи, ин-т. Пермь, 2000. 8 с. Деп в ВИНИТИ 14.07.00, № 1963–В 00.

21. Бурбаки, Н. Спектральная теория. М.: Мир. 1972. 183 с.

22. Бурмистрова, А.Б. Краевые задачи для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений в случае резонанса: Дис. . канд. физ.-мат. наук. Пермь, 1990, – 134 с.

23. Вавилов, С.А. О нетривиальных решениях некоторых классов операторных уравнений / С.А. Вавилов // Доклады РАН. 1993. – Т. 331, № 1.

24. Вайнберг, М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М.: Наука, 1972. 416 с.

25. Вайнберг, М.М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. / М.М. Вайнберг, В.А. Треногин / – М.: Наука, 1969. 528 с.

26. Васильев, А.В. Об одной задаче теории химических реакций / А.В. Васильев, А.Е. Ермаков, С.В. Колосов, А.И. Колосов // Математическая физика и нелинейная механика. Киев, 1987. – № 8. – С. 35–39.

27. Данфорд, Н. Шварц, Дж.Т. Линейные операторы. Спектральная теория. – М., Мир, 1966 г.

28. Иосида, К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967, – 624 с.

29. Канторович, Л.В. Акилов, Г.П. Функциональный анализ. М. Наука, 1965г.

30. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972, -740с.

31. Кигурадзе, И.Т. Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итого науки и техники. Сер.современные проблемы матем.: Новые достижения. 1987. Т. 30. – С. 3–103.

32. Кигурадзе, И.Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1975. 352 с.

33. Кигурадзе, И.Т. Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Т. Кигурадзе, Б.Д. Шехтер // Итоги науки и техники. Сер.современные проблемы матем.: Новые достижения. – 1987. Т. 30. – С. 105–201.

34. Красносельский, М.А., Забрейко, П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975. - 512 с.

35. Крейн, С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971. – 104 с.

36. Кунгурцева, А.В. К вопросу о разрешимости краевых задач для квазилинейных уравнений // Извести вузов. Математика. – 1993. № 5. – С. 50–55.

37. Кунгурцева, А.В. Об одном классе краевых задач для сингулярных уравнений // Известия вузов. Математика. – 1995. № 9. – С. 40–47.

38. Куфнер А. Нелинейные дифференциальные уравнения. / А. Куфнер, С. Фучик / М.: Наука, 1988. – 304 с.

39. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа. / В.И. Люстерник, В.И. Соболев / – М., Наука, 1965 г.

40. Максимов, В.П. К вопросу о параметризации множества решений функционально-дифференциального уравнения // Функционально-дифференц. уравнения: Межвуз. сб. науч. тр. / Перм. политехи, ин-т. Пермь, 1988. с. 14-20.

41. Максимов, В.П. О некоторых нелинейных краевых задачах // Дифференциальные уравнения. 1983. – Т. 19, № 3. – С. 396–414.

42. Максимов, В.П. Сопряженное уравнение для об-щей линейной краевой задачи / В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматуллина // Дифференциальные уравнения. 1977. – Т. 13, № 11. – С. 1966–1973.

43. Малкин, И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.

44. Митропольский, Ю.А. Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием. / Ю.А. Митропольский, Д.И. Мартынюк / Киев: Вища школа, 1979. – 248 с.

45. Пич, А. Операторные идеалы. М.: Мир, 1982. – 536 с.

46. Плеснер А.И. Спектральная теория линейных операторов. М., Наука, 1965 г.

47. Рудин, У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. – 443 с.

48. Треногин, В.А. Функциональный анализ. М., Наука, 1980 г.

49. Харди, Г.Г. Неравенства. / Г.Г. Харди, Д.Е. Литтльвуд, Г. Полиа / М.: Ил. 1948.

50. Шехтер, Б.Л. Об одной краевой задаче для системы обыкновенных диффе-ренциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1982. Т. 18, № 10. – С. 1701–1717.

51. Ягодкина, Э. В. О норме обобщенного оператора Чезаро // Вестник ПГТУ. Математика и прикладная математика. 1994, № 1. С. 72–74.

52. Abdelkader, A. The Langmuir-Blodgett space-charge equation for cylinders., 40, №4.

53. Boyd, D.W. The spectrum of Cesaro operator // Acta Sci. Math., № 29, 1968, pp. 31–34.

54. Furi, M. An elementary approach to boundary value problems at resonance / M. Furi, M.P. Pera // Nonlinear Anal.: Theory, Meth. and Appl. 1980. – V. 4, – № 6. – p. 1081–1089.

55. Kannan, R. Nonlinear perturbations at resonance // Dynamic Systems: An Int. Symp. New York: Acad. Press, 1976. – V. 2. – p. 67–71.

56. Muntean, J. The spectrum of the Cesaro operator // Mathematic, tome 22(45), № 1,1980, pp. 97–105.

57. Rhoades, B.E. Norm and spectral properties of some weighted mean operators// Mathematica, Tome 26(49), № 2, 1984, pp. 143–152.

58. Trafardar, E. On the existence of solution of the equation Lx = Nx and a generalized coincidence degree theory 1. // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 1980. № 21. – p. 805–823