

УДК 536.5:621.383.933

РАСЧЁТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ПЛАТЕ СО СВЕТОДИОДАМИ

В.В. Кириллов

Разработан метод расчёта трёхмерного температурного поля в многослойной плате с размещёнными на ней светодиодами. Метод основан на численном решении трёхмерного уравнения теплопроводности методом конечных разностей. Метод позволяет рассчитывать как стационарное распределение температуры, так и изменение температуры в переходных режимах работы.

Ключевые слова: температурное поле, численный метод, светодиод.

В настоящее время в радиотехнических и электронных устройствах различного назначения применяются многослойные платы с размещёнными на них микросхемами и светодиодами, выделяющими при работе определённое количество тепла. Отвод тепла осуществляется теплопроводностью через материал подложки в металлическую пластину и затем в окружающую среду за счёт свободной конвекции и теплового излучения [1, 2].

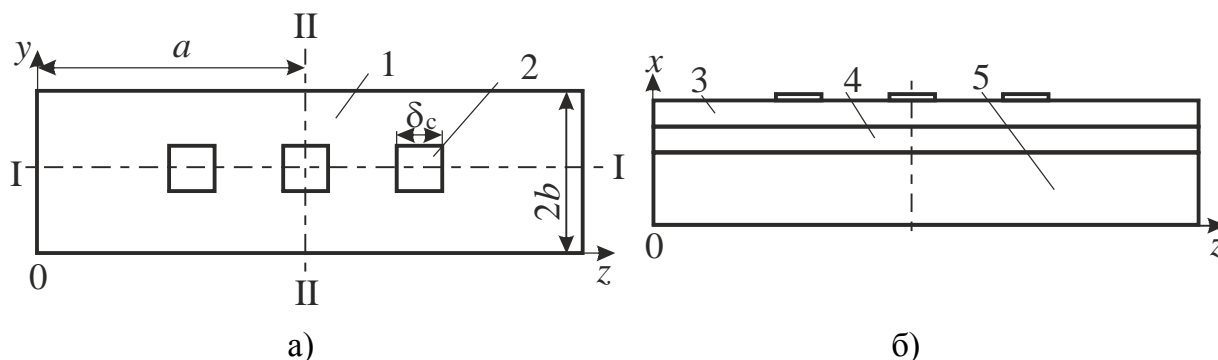


Рис. 1. Плата со светодиодами: а) вид сверху, б) вид сбоку;
1 – плата; 2 – светодиод; 3 – текстолит; 4 – паста; 5 – медь

Плата состоит из трёх слоёв – меди толщиной δ_M , пасты толщиной δ_{Π} и текстолита толщиной δ_T . На поверхности платы находятся три светодиода размерами $\delta_c \times \delta_c$. Плата симметрична относительно линий I–I и II–II, поэтому можно рассматривать часть платы, представленной на рис. 2 длиной a по оси z и шириной b по оси y .

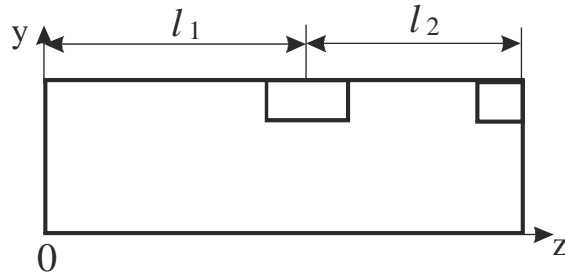


Рис. 2. Расчётная схема платы

Распределение температуры в плате описывается уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a_w \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

где t – температура; x, y, z – координаты; τ – время; a_w – коэффициент температуропроводности.

Начальное условие запишем в виде:

$$t(0, x, y, z) = t_0. \quad (2)$$

Рассмотрим задание граничных условий. В плоскости y - z при $x=0$:

$$\lambda_m \frac{\partial t(\tau, 0, y, z)}{\partial x} = \alpha [t(\tau, 0, y, z) - t_b] + c_0 \varepsilon \left[\left(\frac{T(\tau, 0, y, z)}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_b}{100} \right)^4 \right], \quad (3)$$

где λ – коэффициент теплопроводности; α – коэффициент теплоотдачи; c_0 – коэффициент излучения; ε – степень черноты; индексы: м – медь; в – воздух.

В плоскости y - z при $x=\Delta$, $\Delta = \delta_m + \delta_n + \delta_t$ вне светодиодов:

$$-\lambda_t \frac{\partial t(\tau, \Delta, y, z)}{\partial x} = \alpha [t(\tau, \Delta, y, z) - t_b] + c_0 \varepsilon \left[\left(\frac{T(\tau, \Delta, y, z)}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_b}{100} \right)^4 \right], \quad (4)$$

где индекс т означает параметры текстолита.

В плоскости y - z при $x=\Delta$ под светодиодами:

$$\lambda_t \frac{\partial t(\tau, \Delta, y, z)}{\partial x} = q_c, \quad (5)$$

где q_c – плотность теплового потока от светодиода.

В плоскости x - y при $z=0$ задаётся условие адиабатичности в виде:

$$\frac{\partial t(\tau, x, y, 0)}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

В плоскости x - z при $y=0$ задаётся условие адиабатичности в виде:

$$\frac{\partial t(\tau, x, 0, z)}{\partial y} = 0. \quad (7)$$

В плоскости x - y при $z=a$ задаётся условие симметрии в виде:

$$\frac{\partial t(\tau, x, y, a)}{\partial z} = 0. \quad (8)$$

В плоскости x - z при $y=b$ задаётся условие симметрии в виде:

$$\frac{\partial t(\tau, x, b, z)}{\partial y} = 0. \quad (9)$$

Задача (1)–(9) решается методом конечных разностей [3]. В области интегрирования строится равномерная сетка с шагами h_y и h_z по осям y и z , соответственно. По оси x конструкция сетки показана на рис. 3.

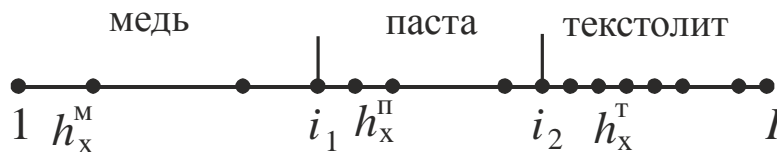


Рис. 3. Конструкция разностной сетки по оси x

Для решения уравнения (1) применим схему расщепления [4]:

$$\frac{t_{i,j,k}^{m+1/3} - t_{i,j,k}^m}{\Delta\tau/3} = a_w \left(\frac{t_{i-1,j,k}^{m+1/3} - 2t_{i,j,k}^{m+1/3} + t_{i+1,j,k}^{m+1/3}}{h_x^2} \right) + a_w \left((1-\sigma) \frac{t_{i-1,j,k}^m - 2t_{i,j,k}^m + t_{i+1,j,k}^m}{h_x^2} \right); \quad (11)$$

$$\frac{t_{i,j,k}^{m+2/3} - t_{i,j,k}^{m+1/3}}{\Delta\tau/3} = a_w \left(\sigma \frac{t_{i,j-1,k}^{m+2/3} - 2t_{i,j,k}^{m+2/3} + t_{i,j+1,k}^{m+2/3}}{h_y^2} \right) + a_w \left((1-\sigma) \frac{t_{i,j-1,k}^{m+1/3} - 2t_{i,j,k}^{m+1/3} + t_{i,j+1,k}^{m+1/3}}{h_y^2} \right); \quad (12)$$

$$\frac{t_{i,j,k}^{m+1} - t_{i,j,k}^{m+2/3}}{\Delta\tau/3} = a_w \left(\sigma \frac{t_{i,j,k-1}^{m+1} - 2t_{i,j,k}^{m+1} + t_{i,j,k+1}^{m+1}}{h_y^2} \right) + \quad (13)$$

$$+ a_w \left((1-\sigma) \frac{t_{i,j,k-1}^{m+2/3} - 2t_{i,j,k}^{m+2/3} + t_{i,j,k+1}^{m+2/3}}{h_y^2} \right)$$

В (11)–(13) индексы i, j, k означают номера узлов сетки по осям x, y, z , соответственно; m – номер временного слоя; $0 \leq \sigma \leq 1$ – весовой коэффициент; $\Delta\tau$ – шаг по времени.

Уравнения (11)–(13) приведём к каноническому виду:

$$a_i^x t_{i-1,j,k}^{m+1/3} - c_i^x t_{i,j,k}^{m+1/3} + b_i^x t_{i+1,j,k}^{m+1/3} = -d_i^x, \quad i = 2, 3, \dots, I-1; \quad (14)$$

$$a_j^y t_{i,j-1,k}^{m+2/3} - c_j^y t_{i,j,k}^{m+2/3} + b_j^y t_{i,j+1,k}^{m+2/3} = -d_j^y, \quad j = 2, 3, \dots, J-1; \quad (15)$$

$$a_k^z t_{i,j,k-1}^{m+1} - c_k^z t_{i,j,k}^{m+1} + b_k^z t_{i,j,k+1}^{m+1} = -d_k^z, \quad k = 2, 3, \dots, K-1. \quad (16)$$

В (14)–(16):

$$a_i^x = b_i^x = \frac{a_w \Delta\tau}{3h_x^2} \sigma; \quad c_i^x = 1 + 2a_i^x; \quad a_j^y = b_j^y = \frac{a_w \Delta\tau}{3h_y^2} \sigma; \quad c_j^y = 1 + 2a_j^y;$$

$$d_i^x = t_{i,j,k}^m + \frac{a_w \Delta\tau}{3h_x^2} (1-\sigma) (t_{i-1,j,k}^m - 2t_{i,j,k}^m + t_{i+1,j,k}^m); \quad a_k^z = b_k^z = \frac{a_w \Delta\tau}{3h_z^2} \sigma;$$

$$c_k^z = 1 + 2a_k^z; \quad d_j^y = t_{i,j,k}^{m+1/3} + \frac{a_w \Delta\tau}{3h_y^2} (1-\sigma) (t_{i,j-1,k}^{m+1/3} - 2t_{i,j,k}^{m+1/3} + t_{i,j+1,k}^{m+1/3})$$

$$d_k^z = t_{i,j,k}^{m+2/3} + \frac{a_w \Delta\tau}{3h_z^2} (1-\sigma) (t_{i,j,k-1}^{m+2/3} - 2t_{i,j,k}^{m+2/3} + t_{i,j,k+1}^{m+2/3}). \quad (17)$$

Рассмотрим аппроксимацию граничных условий. При $t_{1,j,k}^m > t_B$ условие (3) аппроксимируем схемой:

$$t_{1,j,k}^{m+1/3} = \mu_1 t_{2,j,k}^{m+1/3} + \nu_1, \quad (18)$$

где $\mu_1 = \frac{1}{1 + \text{Bi}}$; $\text{Bi} = \alpha h_x^M / \lambda_M$;

$$\nu_1 = \frac{(1-\sigma)(t_{2,j,k}^m - t_{1,j,k}^m) - \text{Bi}(1-\sigma)t_{1,j,k}^m - \text{Bi} \cdot t_B}{\sigma(1 + \text{Bi})} + \frac{c_0 \varepsilon h_x^M}{\sigma \lambda_M (1 + \text{Bi})} \left[\left(\frac{T_{1,j,k}^m}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_B}{100} \right)^4 \right]. \quad (19)$$

При $t_{1,j,k}^m = t_B$ условие (3) превращается в условие адиабатичности. Для его аппроксимации применим фиктивный узел $i=0$ (см. рис. 4) и запишем уравнение (14) в виде:

$$a_1^x t_{0,j,k}^{x,m+1/3} - c_1^x t_{1,j,k}^{x,m+1/3} + b_1^x t_{2,j,k}^{x,m+1/3} = -d_1^x,$$

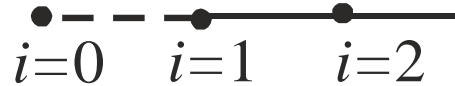


Рис. 4. Разностная сетка при $x=0$

при этом $t_{0,j,k}^{m+1/3} = t_{2,j,k}^{m+1/3}$. Таким образом, граничное условие примет вид (18), в котором:

$$\mu_1 = \frac{a_1^x + b_1^x}{c_1^x}; \quad v_1 = \frac{d_1^x}{c_1^x}; \quad d_1^x = t_{1,j,k}^m + 2 \frac{a_w \Delta \tau}{3h_x^2} (1 - \sigma) (t_{2,j,k}^m - t_{1,j,k}^m), \quad (20)$$

где a_1^x, b_1^x, c_1^x определяются формулами (17).

При $t_{I,j,k}^m > t_B$ условие (4) аппроксимируется схемой:

$$t_{I-1,j,k}^{m+1/3} = \mu_2 t_{I,j,k}^{m+1/3} + v_2, \quad (21)$$

где

$$\mu_2 = 1 + \text{Bi}_\Delta; \quad \text{Bi}_\Delta = \frac{\alpha h_x^\tau}{\lambda_T}; \quad v_2 = \frac{1 - \sigma}{\sigma} (t_{I,j,k}^m - t_{I-1,j,k}^m) + \text{Bi}_\Delta \frac{1 - \sigma}{\sigma} t_{I,j,k}^m - \text{Bi}_\Delta t_B + \frac{c_0 \varepsilon h_x^\tau}{\lambda_T \sigma} \left[\left(\frac{T_{I,j,k}^m}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_B}{100} \right)^4 \right]. \quad (22)$$

При $t_{I,j,k}^m = t_B$ условие (4) превращается в условие адиабатичности. Для его аппроксимации применим фиктивный узел $i=I+1$ (см. рис. 5). Запишем уравнение (14) в виде:

$$a_I^x t_{I-1,j,k}^{x,m+1/3} - c_I^x t_{I,j,k}^{x,m+1/3} + b_I^x t_{I+1,j,k}^{x,m+1/3} = -d_{I1}^x,$$

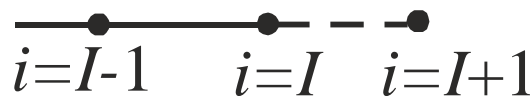


Рис. 5. Разностная сетка при $x = \Delta$

при этом $t_{I-1,j,k}^{m+1/3} = t_{I+1,j,k}^{m+1/3}$. Таким образом, граничное условие примет вид (21), в котором:

$$\mu_2 = \frac{c_I^x}{a_I^x + b_I^x}; \quad v_2 = -\frac{d_I^x}{a_I^x + b_I^x}; \quad d_I^x = t_{I,j,k}^m + 2\frac{a_w \Delta \tau}{3h_x^2}(1-\sigma)(t_{I-1,j,k}^m - t_{I,j,k}^m), \quad (23)$$

где a_I^x, b_I^x, c_I^x определяются формулами (17).

Граничное условие (5) аппроксимируем схемой:

$$\sigma \frac{t_{I,j,k}^{m+1/3} - t_{I-1,j,k}^{m+1/3}}{h_x^T} + (1-\sigma) \frac{t_{I,j,k}^m - t_{I-1,j,k}^m}{h_x^T} = \frac{q_c}{\lambda_T},$$

и приведём к виду (21), где

$$\mu_2 = 1; \quad v_2 = \frac{1-\sigma}{\sigma} (t_{I,j,k}^m - t_{I-1,j,k}^m) + \frac{q_c h_x^T}{\lambda_T \sigma}. \quad (24)$$

Граничное условие (6) аппроксимируем с применением фиктивного узла $k=0$ и уравнения (16), записанного в узле $k=1$:

$$t_{i,j,1}^{m+1} = \mu_1 t_{i,j,2}^{m+1} + v_1, \quad (25)$$

где

$$\mu_1 = \frac{a_1^z + b_1^z}{c_1^z}; \quad v_1 = \frac{d_1^z}{c_1^z}; \quad d_1^z = t_{i,j,1}^{m+2/3} + 2\frac{a_w \Delta \tau}{3h_z^2}(1-\sigma)(t_{i,j,2}^{m+2/3} - t_{i,j,1}^{m+2/3}). \quad (26)$$

Граничное условие симметрии (8) аппроксимируем с применением фиктивного узла $k=K+1$ и уравнения (16), записанного в узле K :

$$t_{i,j,K-1}^{m+1} = \mu_2 t_{i,j,K}^{m+1} + v_2, \quad (27)$$

$$\mu_2 = \frac{c_K^z}{a_K^z + b_K^z}; \quad v_2 = -\frac{d_K^z}{a_K^z + b_K^z};$$

$$d_K^z = t_{i,j,K}^{m+2/3} + 2\frac{a_w \Delta \tau}{3h_z^2}(1-\sigma)(t_{i,j,K-1}^{m+2/3} - t_{i,j,K}^{m+2/3}) \quad (28)$$

Граничное условие (7) аппроксимируем с применением фиктивного узла $j=0$ и уравнения (15), записанного в узле $j=1$:

$$t_{i,1,k}^{m+2/3} = \mu_1 t_{i,2,k}^{m+2/3} + v_1, \quad (29)$$

где

$$\mu_1 = \frac{a_1^y + b_1^y}{c_1^y}; \quad v_1 = \frac{d_1^y}{c_1^y}; \quad d_1^y = t_{i,1,k}^{m+1/3} + 2\frac{a_w \Delta \tau}{3h_y^2}(1-\sigma)(t_{i,2,k}^{m+1/3} - t_{i,1,k}^{m+1/3}). \quad (30)$$

Граничное условие симметрии (9) аппроксимируем с применением фиктивного узла $j=J+1$ и уравнения (15), записанного в узле J :

$$t_{i,J-1,k}^{m+2/3} = \mu_2 t_{i,J,k}^{m+2/3} + \nu_2, \quad (31)$$

$$\mu_2 = \frac{c_J^y}{a_J^y + b_J^y}; \quad \nu_2 = -\frac{d_J^y}{a_J^y + b_J^y};$$

$$d_J^y = t_{i,J,k}^{m+1/3} + 2 \frac{a_w \Delta \tau}{3h_y^2} (1 - \sigma) (t_{i,J-1,k}^{m+1/3} - t_{i,J,k}^{m+1/3}) \quad (32)$$

На границе слоёв меди и пасты, а также пасты и текстолита задаются граничные условия IV-го рода в виде:

$$t_M(\tau, \delta_M, y, z) = t_{II}(\tau, \delta_M, y, z); \quad \lambda_M \frac{\partial t(\tau, \delta_M, y, z)}{\partial x} = \lambda_{II} \frac{\partial t(\tau, \delta_M, y, z)}{\partial x}. \quad (33)$$

$$t_{II}(\tau, \delta_M + \delta_{II}, y, z) = t_T(\tau, \delta_M + \delta_{II}, y, z);$$

$$\lambda_{II} \frac{\partial t(\tau, \delta_M + \delta_{II}, y, z)}{\partial x} = \lambda_T \frac{\partial t(\tau, \delta_M + \delta_{II}, y, z)}{\partial x}. \quad (34)$$

Запишем условия (33), (34) в разностной аппроксимации:

$$\lambda_M \frac{t_{I1,j,k}^{m+1/3} - t_{I1-1,j,k}^{m+1/3}}{h_x^M} = \lambda_{II} \frac{t_{I1+1,j,k}^{m+1/3} - t_{I1,j,k}^{m+1/3}}{h_x^{II}}; \quad (35)$$

$$\lambda_{II} \frac{t_{I2,j,k}^{m+1/3} - t_{I2-1,j,k}^{m+1/3}}{h_x^{II}} = \lambda_T \frac{t_{I2+1,j,k}^{m+1/3} - t_{I2,j,k}^{m+1/3}}{h_x^T}. \quad (36)$$

Уравнения (14)–(16) решаются скалярными прогонками [4]. Рассмотрим решение уравнения (14) с граничными условиями (18), (21), (35), (36). Решение уравнения (14) ищется в виде:

$$t_{i,j,k}^{m+1/3} = \gamma_{i+1} t_{i+1,j,k}^{m+1/3} + \beta_{i+1}. \quad (37)$$

Начальные значения прогоночных коэффициентов есть $\gamma_2 = \mu_1$; $\beta_2 = \nu_1$, где μ_1 и ν_1 определяются по формулам (19). В ходе прямой прогонки коэффициенты γ и β в узлах сетки $i=3, \dots, I_1$ определяются по рекуррентным соотношениям:

$$\gamma_i = \frac{b_{i-1}^x}{c_{i-1}^x - a_{i-1}^x \gamma_{i-1}}; \quad \beta_i = \frac{d_{i-1}^x + a_{i-1}^x \beta_{i-1}}{c_{i-1}^x - a_{i-1}^x \gamma_{i-1}}. \quad (38)$$

В узле $i = I1 - 1$:

$$t_{I1-1,j,k}^{m+1/3} = \gamma_{I1} t_{I1,j,k}^{m+1/3} + \beta_{I1}, \quad (39)$$

$$t_{I1,j,k}^{m+1/3} = \gamma_{I1+1} t_{I1+1,j,k}^{m+1/3} + \beta_{I1+1}. \quad (40)$$

Из (35):

$$t_{I1-1,j,k}^{m+1/3} = (1 + C_1) t_{I1,j,k}^{m+1/3} - C_1 t_{I1+1,j,k}^{m+1/3}, \quad C_1 = \frac{\lambda_{\Pi} h_x^M}{\lambda_M h_x^M}. \quad (41)$$

Из (39) и (41) найдём:

$$t_{I1,j,k}^{m+1/3} = \frac{C_1}{1 + C_1 - \gamma_{I1}} t_{I1+1,j,k}^{m+1/3} + \frac{\beta_{I1}}{1 + C_1 - \gamma_{I1}}. \quad (42)$$

Сравнивая (42) с (40), найдём значения прогоночных коэффициентов в узле $I1 + 1$:

$$\gamma_{I1+1} = \frac{C_1}{1 + C_1 - \gamma_{I1}}; \quad \beta_{I1+1} = \frac{\beta_{I1}}{1 + C_1 - \gamma_{I1}}. \quad (43)$$

После этого находятся прогоночные коэффициенты в узлах $I1 + 2, \dots, I2$ по формулам (38). Затем выполняется переход на расчёт прогоночных коэффициентов в текстолите. Находим:

$$\gamma_{I2+1} = \frac{C_2}{1 + C_2 - \gamma_{I2}}; \quad \beta_{I2+1} = \frac{\beta_{I2}}{1 + C_2 - \gamma_{I2}}, \quad (44)$$

где $C_2 = \frac{\lambda_{\Gamma} h_x^{\Pi}}{\lambda_{\Pi} h_x^{\Gamma}}$, после чего по формулам (38) определяются прогоночные коэффициенты в узлах $I2 + 2, \dots, I$. На этом прямая прогонка вдоль оси x заканчивается.

Далее определяются значение температуры в последнем узле сетки I решая совместно (37) и (21) с μ_2 и ν_2 по формулам (22), (23) или (24):

$$t_{I,j,k}^{m+1/3} = \frac{\beta_I - \nu_2}{\mu_2 - \gamma_I}. \quad (45)$$

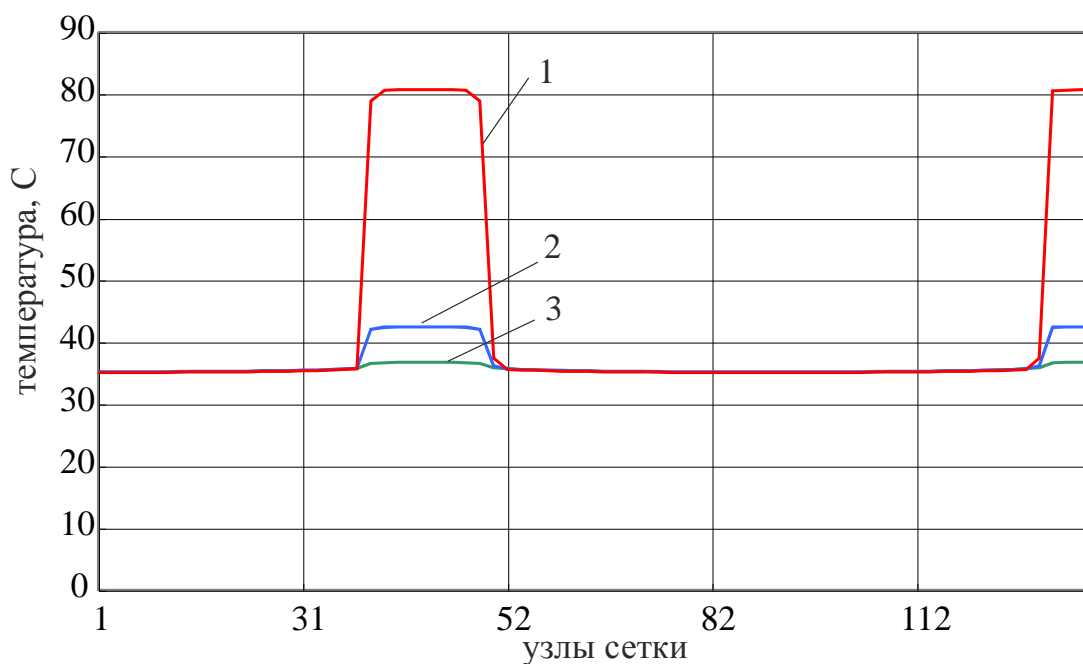
Затем выполняется обратная прогонка. По формуле (37) рассчитываются значения температуры $t_{i,j,k}^{m+1/3}$ в узлах сетки $I-1, \dots, 1$.

Уравнение (15) с граничными условиями (29) – (32) решается скалярными прогонками в диапазонах изменения индекса $1 \leq i \leq I1 - 1$ в слое меди, $I1 \leq i \leq I2 - 1$ в слое пасты и $I2 \leq i \leq I$ в слое текстолита.

Уравнение (16) с граничными условиями (26)–(28) решается скалярными прогонками в диапазонах изменения индекса $1 \leq i \leq I1 - 1$ в слое меди, $I1 \leq i \leq I2 - 1$ в слое пасты и $I2 \leq i \leq I$ в слое текстолита.

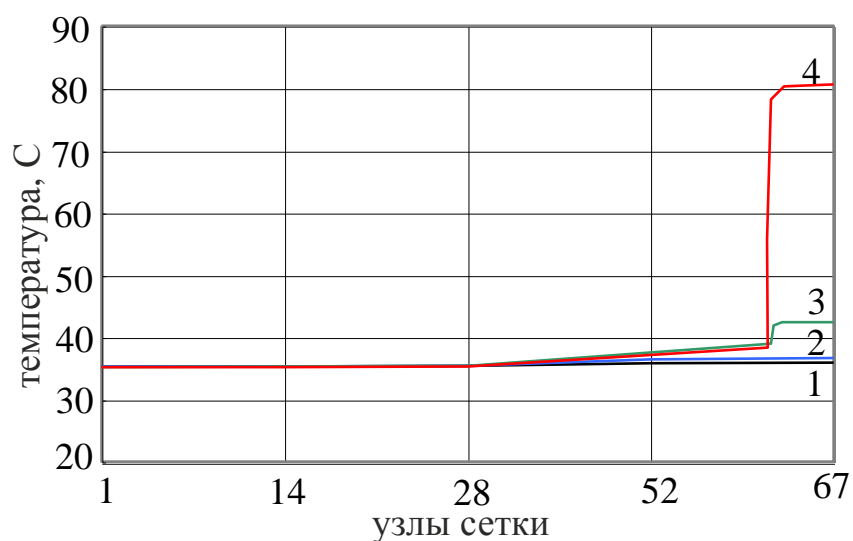
Стационарное распределение температуры в плате получено методом установления. На рис. 6 приведен характер изменения температуры на линии симметрии I – I на поверхности текстолита (1), на линии контакта текстолит-паста (2) и линии контакта медь-паста (3). Максимальные значения температуры соответствуют области платы под светодиодами.

На рис. 7 приведено изменение температуры на линии симметрии II – II.



1 - поверхность текстолита; 2 - паста-текстолит; 3 - медь-паста

Рис. 6. Стационарное распределение температуры на линии симметрии



1 – медь при $x=0$; 2 – паста-медь; 3 – паста-текстолит;
4 – поверхность текстолита

Рис. 7. Распределение температуры на линии симметрии II-II

Библиографический список

1. Закс, М. Теплоотводящие печатные платы для монтажа мощных светодиодов / М. Закс // Технологии в электронной промышленности. – 2011. – № 6. – С. 26–29.
2. Шурыгина, М. Тепловой расчёт при разработке печатной платы / М. Шурыгина // Печатный монтаж. – 2010. – № 4. – С. 36–38.
3. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
4. Самарский, А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 592 с.

[К содержанию](#)