УДК 519.1

РАССУЖДЕНИЯ О ПРОБЛЕМЕ ЧЕТЫРЕХ КРАСОК

Г.В. Сорокин

На данный момент проблема четырех красок не имеет классического доказательства, а использование доказательных вычислений не принимается многими учеными современности. В данной статье описан эвристический алгоритм 4-раскраски графа, а также дана его оценка, описан способ проверки его работоспособности и дальнейшие возможности для модернизации.

Ключевые слова: раскраска графа, планарный граф, эвристический алгоритм, триангуляция Делоне.

Любая карта на поверхности нулевого рода может быть раскрашена в четыре цвета так, чтобы государства, имеющие общую границу, были окрашены в разные цвета.

Эта математическая задача, предложенная Френсисом Гутри в 1852 году, снискала огромную популярность. В 1879 году А. Кели получил первое доказательство этой теории, которое было опровергнуто через 10 лет.

Вторая волна доказательств пришлась на 50-е и 60-е годы XX века. Г.А. Дирак, А.А. Зыков, Дж. и Л. Кулли, В.А. Горбатов были озадачены этой проблемой [1].

Теорема была доказана в 1976 году, однако это доказательство основывалась на результатах многочасовой работы компьютера. Это было одно из наиболее известных успехов применения доказательных вычислений. Однако не все приняли это решение в качестве доказательства.

Последующие попытки доказать теорему также основывались на компьютерных вычислениях. В 2005 году для доказательства использовалось интерактивное программное средство доказательства теорем «Coq».

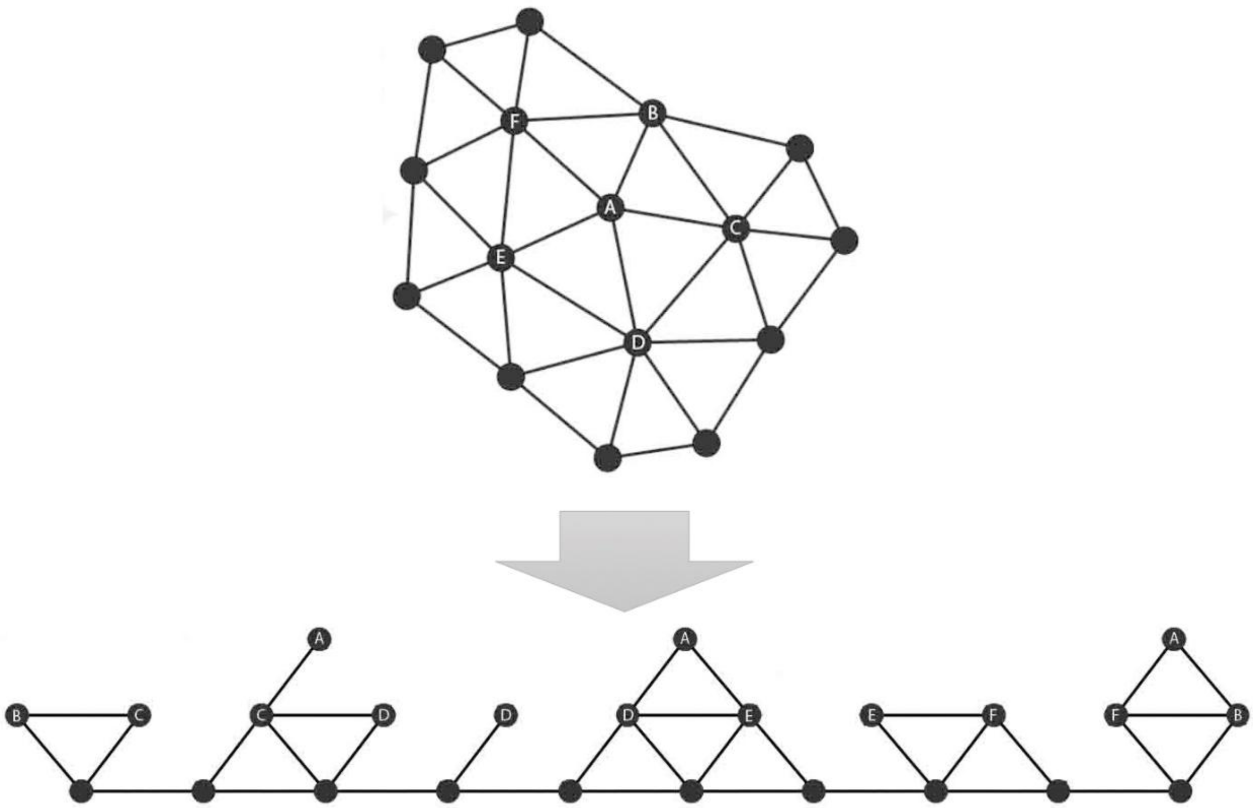
В качестве эвристического метода раскраски планарного графа четырьмя цветами можно рассмотреть следующий алгоритм.

1. Выбираем произвольную вершину.
2. Обозначаем эту область – вершиной нулевого уровня.
3. Вершинами уровня N будут области, граничащие с территорией, охватываемой уровнем N – 1 (пример изображен на рис.).
4. При движении от вершины к вершине по нижнему уровню используем попеременно две краски.
5. Если возникнет ситуация, когда невозможно покрасить последнюю вершину, потому что она противоречит поставленной задачи, то используем третью краску.
6. На следующем уровне используем другую пару красок, проверяя условие задачи на связях текущего уровня и на связях уровня ниже.

7. Если возникнет случай, когда вершина, которую необходимо закрасить, соединена с вершинами всех четырех красок, то выбираем соседнюю вершину, у которой можно изменить цвет. Изменение цвета соседней вершины может привести к рекурсивному изменению цвета вершин уровней ниже.

8. Продвигаемся вверх до нулевого уровня.

Основываясь на теореме Понтрягина – Куратовского («Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, изоморфных К3,3 и К5» [2]) можно доказать, что на нижнем уровне в любом случае будет использовано не более трех цветов.



Распределение графа по уровням

Первый пункт данного алгоритма предоставляет нам выбор случайной вершины. В некоторых случаях это является плюсом. Однако есть возможность выбрать оптимальную вершину так, чтобы количество уровней для графа будет минимальным.

Этот выбор основывается на свойстве матрицы смежности: элемент в i-й строке, j-м столбце матрицы A^m равен числу путей из i-й вершины в j-ю, состоящих ровно из m ребер. Таким образом, мы можем возвести матрицу смежности нашего графа в степень m, где m – min и A^m содержит строку (столбец) k, не имеющую нулевых элементов. Тогда для первого шага оптимальным будет выбор вершины k. Количество уровней при этом будет равно m + 1.

Для проверки работы данного алгоритма мы должны сформировать случайный планарный граф. Для этого можно воспользоваться следующим алгоритмом.

1. Задаем на плоскости N случайных точек.
2. Используем триангуляцию Делоне.
3. Удаляем M случайных ребер в полученном графе.

Триангуляция Делоне не идеальна для проверки нашего алгоритма, т.к. имеет специфические свойства, и для некоторых точек N она будет выдавать одно единственное решение. Но для грубой оценки работы алгоритма этого вполне достаточно.

Очевидно, слабым звеном нашего алгоритма является седьмой пункт, в котором мы вынуждены изменять ранее закрашенные цвета путем рекурсии. Это усложняет как работу алгоритма в целом, так и его понимание.

Американский писатель Стивен Барр предложил логическую игру на бумаге: один игрок рисует пустую область, а другой раскрашивает ее в один из 4-х цветов и рисует новую пустую область. Проигрывает тот, кто на своем ходу вынужден будет взять пятый цвет. Если новые области добавлять на границе уже нарисованных, то при определенной стратегии играть можно бесконечно долго. И самое главное - не прибегая к рекурсии.

Учитывая все вышеописанное, раскраска планарного графа в четыре цвета не представляет какой-либо алгоритмической сложности. Разумеется, это не является доказательством теоремы, но, возможно, делает небольшой шаг на пути к классическому доказательству. Специально не были затронуты известные алгоритмы закраски графа (алгоритм А.П. Ершова, алгоритм оптимальной раскраски), так как они преследуют абсолютно другие цели.

Библиографический список

1. Горбатов, В.А. Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика / В.А. Горбатов. – М.: Наука. Физматлит, 2000. – 544 с.
2. Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари. – М.: Мир, 1973. – 300 с.
3. Асанов, М.О. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы: учебное пособие / М.О. Асанов. – 2-е изд., испр. и доп. – СПб.: Лань, 2010. – 368 с.

К содержанию