УДК 517.951 + 544.77.051

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ РЕШЕНИИ ОПЕРАТОРА ЛИЗЕГАНГА

М.Е. Коржова, Б.А. Марков

В коллоидной химии распространено явление колец Лизеганга. Полагая, что коллоид оксигидратов редких металлов подчиняется уравнению диффузии с оператором Лизеганга в правой части, получаем набор задач с подвижной границей – задач Флорина. Для каждой из них в частном случае удаётся подобрать несложное решение.

Ключевые слова: коллоид оксигидратов, кольца Лизеганга, оператор Лизеганга, задача Флорина.

В коллоидной химии мы часто сталкиваемся с явлением, что представляет собой так называемые кольца Лизеганга [1], открытые Лизегангом в 1897-м году. Для их описания школа [2] предложила ряд методов, однако в коллоидной химии в силу обилия химических веществ, превращающихся друг в друга, эти методы затруднительно применить. В силу этого необходимо искать иные методы, позволяющие решать задачу, или же каким-то образом обосновать применение методов [2] в коллоидной химии.

С нашей точки зрения удобно пойти по первому пути: будем применять иные методы, отличные от методов школы [2]. Для этой цели мы воспользуемся следующим. Пусть всё коллоидное вещество может быть разделено на собственно мицеллы и межмицеллярную жидкость. Межмицеллярную жидкость мы рассматривать не будем, полагая, что мицеллы просто берут из неё в нужном количестве необходимые вещества или, наоборот, выбрасывают избыточные вещества в межмицеллярную жидкость. При этом веществ оказывается столько, сколько нужно и там, где это требуется.

Само же поведение коллоида подчиним так называемому оператору Лизеганга, который обозначим как $L[u]$. Мы будем считать, что оператор Лизеганга внутренне присущ мицеллам геля. Обоснование нашего утверждения следует из большого количества экспериментальных данных.

Далее, для описания поведения мицелл коллоида воспользуемся обычным уравнением диффузии, к которому добавим оператор Лизеганга. И будем считать, что тем самым поведение мицелл в коллоиде задано полностью.

Строгое математическое определение оператора Лизеганга предложено А.М. Ильиным в работе [3].

Определение. Оператором Лизеганга $L[u]$ называется величина, равная $\alpha u(x_0,t)$, $\alpha > 0$, в точке x_0 для всех моментов времени $t > t_0$, при условии, что $u(x_0,t) < u_{\max}$, и $-\alpha u(x_0,t)$ в точке x_0 для всех моментов времени $t > t_1$, таких, что $u(x_0,t_1) = u_{\max}$ и $u(x_0,t) > u_{\min}$.

Соответственно, общее уравнение поведения мицелл имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + L[u], \\ u\big|_{x\to\infty} = 0,\ u\big|_{t=0} = f(x). \end{cases} \tag{1}$$

Для дальнейшего необходимо разбить область решения на интервалы, где знак оператора Лизеганга остаётся неизменным, и решать каждое из уравнений отдельно. В результате [3] мы получим набор краевых задач Флорина, каждую из которых нужно решать на определённом промежутке, границы которого подвижны.

Для дальнейшего выделим начальный момент: пусть есть некая «удобная» функция $f(x)$, задающая поведение $u(x, t)$ в начальный момент времени, пусть задача симметрична относительно начала координат и пусть нам необходимо построить решение задачи на полубесконечной части прямой:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + L[u], \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_0(t)} = 0,\ x\in\left[x_0(t);+\infty\right),\ t\in\left[0;+\infty\right) \\ u\big|_{t=0} = f(x), \\ u\big|_{x=x_0(t)} = u_{\max}. \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим эту задачу отдельно. Отметим, что с точки зрения коллоидно-химической практики, численное решение задачи Флорина никакого интереса не представляет. Гораздо важнее найти простое решение, хотя бы и частное, которое было бы обозримым или хотя бы его было возможно написать на листе бумаги.

Перепишем задачу (2) с учётом её одномерности. Получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u + \alpha u, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_0(t)} = 0,\ x\in\left[x_0(t);+\infty\right),\ t\in\left[0;+\infty\right) \\ u\big|_{t=0} = f(x),\ u\big|_{x=x_0(t)} = u_{\max}. \end{cases}$$

Выполним замену переменного [4]: $x' = x - x_0(t)$, $t' = t$. В результате замены и переобозначения $x' = x$, $t' = t$, получим уравнение в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u + x_0{}'(t)\dfrac{\partial u}{\partial x} + \alpha u, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \ x \in [0;+\infty), \, t \in [0;+\infty) \\ u|_{t=0} = f(x), \, u|_{x=0} = u_{\max}. \end{cases} \quad (3)$$

Задача состоит в том, чтобы найти простое решение данной задачи, подобрав параметры.

Заметим, что наиболее простым решением задачи является решение стационарной задачи. Попробуем найти его. Для этого необходимо, чтобы решение не зависело от времени, следовательно, $x_0{}'(t) = const$.

Действительно, пусть решение для $x_0(t)$ имеет вид: $x_0(t) = v_0 t$. Тогда система (3) может быть записана в виде:

$$\begin{cases} 0 = D\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u + v_0\dfrac{\partial u}{\partial x} + \alpha u, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \ x \in [0;+\infty), \, t \in [0;+\infty) \\ u|_{t=0} = f(x), \, u|_{x=0} = u_{\max}, \\ u|_{x\to+\infty} \to const. \end{cases} \quad (4)$$

и в любой момент времени должна совпадать с функцией $f(x)$.

Есть ли такое решение? Его несложно найти, если искать $u = Ae^{\beta x}$. Тогда мы получаем:

$$0 = D\beta^2 u + v_0\beta + \alpha,$$

откуда:

$$\beta_1 = \frac{-v_0 - \sqrt{v_0^2 - 4\alpha D}}{2D} \text{ или } \beta_2 = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 - 4\alpha D}}{2D}.$$

Условие стремления решения к нулю на бесконечности выполнено автоматически, так как решение имеет вид $u = A_1 e^{\beta_1 x} + A_2 e^{\beta_2 x}$, а показатели обеих экспонент отрицательны.

Далее:

$$\begin{cases} 0 = A_1\beta_1 + A_2\beta_2 \\ u_{\max} = A_1 + A_2 \end{cases},$$

откуда:

$$\begin{cases} A_1 = -A_2 \dfrac{\beta_2}{\beta_1} \\ u_{\max} = \dfrac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1} A_2 \end{cases},$$

и

$$\begin{cases} A_1 = -\dfrac{u_{\max}\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \\ A_2 = \dfrac{u_{\max}\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} \end{cases}.$$

Заметим, что получается, что меньше нуля коэффициент A_1 у более быстро убывающей экспоненты, что позволяет сохранить физический смысл решения: у нас не будет отрицательной концентрации.

Соответственно, если выбрать $f(x) = u = A_1 e^{\beta_1 x} + A_2 e^{\beta_2 x}$, то решение, действительно, будет стационарно.

Отметим, что определённый интерес представляет решение, записанное для случая, когда $f(x)$ является другим. Ответить на этот вопрос в рамках настоящей работы не представляется возможным, как решение для коллоидной химии это большого интереса не представляет, но решение задачи для режима установления было бы интересно.

Теперь выясним, возможно ли такое решение в ячейках, где знак оператора Лизеганга сменится на противоположный.

В том случае, когда ячейка ещё только формируется, задачи Флорина как таковой нет: мы вполне можем записать обыкновенное уравнение для известной подвижной границы.

В том же случае, когда ячейка полностью сформировалась, мы можем предположить, что вторая граница малой ячейки движется также, как и первая её граница. Тогда с заменой [4] получаем задачу, которую допустимо решать как стационарную:

$$\begin{cases} 0 = D\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u + v_0\dfrac{\partial u}{\partial x} - \alpha u, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ x \in [0;+\infty),\ t \in [0;+\infty) \\ u|_{x=0} = u_{\min},\ u|_{x=a} = u_{\max}, \\ u|_{x\to+\infty} \to const. \end{cases} \tag{5}$$

Несложно заметить, что решение будет иметь вид:

$$u = B_1 e^{\beta_1 x} + B_2 e^{\beta_2 x},$$

причём:

$$\beta_1 = \frac{-v_0 - \sqrt{v_0^2 + 4\alpha D}}{2D}, \ \beta_2 = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 4\alpha D}}{2D} > 0.$$

Соответственно, условие существования решения примет вид:

$$\beta_2 e^{\beta_1 a} - \beta_1 e^{\beta_2 a} = \frac{u_{\max}}{u_{\min}} \left(\beta_2 - \beta_1 \right).$$

Несложно увидеть, что это уравнение является трансцендентным, но решение у него есть всегда.

Следовательно, задача разрешима.

Заключение. Таким образом, мы построили простое решение задачи Флорина для коллоидного уравнения. Для решения задачи полностью нам необходимо выяснить вопрос о режимах установления как в малой ячейке Лизеганга, так и в большой. Однако в силу громоздкости такой задачи, это тема отдельной работы.

Библиографический список

1. Ostwald, W. Lehrbuch der Allgemeinen Chemie / W. Ostwald. – Engelmann, Leipzig, 1897.

2. Полежаев, А.А. Теория структур Лизеганга / А.А. Полежаев // Математика. Компьютер. Образование: сб. трудов X Международной конференции под общ. ред. Г.Ю. Ризниченко. – М., 2003. – Т. 2. – С. 307–319.

3. Ильин, А.М. Нелинейное уравнение диффузии и кольца Лизеганга / А.М. Ильин, Б.А. Марков // Доклады Академии наук. – 2011. – Т. 440. – № 2. – С. 164–169.

4. Самарский, А.А. Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.

К содержанию