УДК 517.95 + 517.9

НЕОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ БУССИНЕСКА В КВАЗИСОБОЛЕВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Е.В. Бычков, Я.О. Аль Ани

В статье система уравнений Буссинеска с условиями Шоуолтера – Сидорова в квазисоболевых пространствах. Система уравнений Буссинеска в банаховых пространствах моделирует колебания в молекуле ДНК. В статье применяется метод фазового пространства и теория *p*-ограниченных операторов, разработанная Г.А. Свиридюком и Т.Г. Сукачевой, для уравнений первого порядка. Мы также опираемся на теорему о разрешимости задачи Коши для линейного уравнения соболевского типа высокого порядка в квазибанаховых пространствах. Строится фазовое пространство системы линейных уравнений Буссинеска.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, квазисоболевское пространство, задача Шоуолтера – Сидорова.

Введение

Система уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\rho}{a} u_{tt} = \beta u_{xx} + \dfrac{\beta}{2}(w^2)_{xx} + \dfrac{\rho}{a}\dfrac{l^2}{12} u_{x} \\ \quad \dfrac{\rho}{a} w_{tt} = \dfrac{\beta}{2}(w^3)_{xx} + \dfrac{\rho}{a}\dfrac{l^2}{12} w_{xxtt}, \end{cases} \tag{1}$$

с начальными:

$$\begin{matrix} u(x,0) = u_0(x), & \dot{u}(x,0) = u_1(x), \\ v(x,0) = v_0(x), & \dot{v}(x,0) = v_1(x), \end{matrix} \quad x \in \tag{2}$$

и краевыми условиями:

$$u(x,t) = v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \tag{3}$$

описанная в [1], моделирует колебания в молекуле ДНК. Авторы модели при выводе системы уравнений использовали метод разложения по малому параметру. Также они сохранили члены третьего порядка малости. В качестве физической модели силы взаимодействия между нуклеотидами использован потенциал Тоды $(a/b)e^{-bx}$. Функции $u(x,t)$ и $w(x,t)$ описывают продольную и поперечную деформацию соответственно, а константы ρ, β, a, l характеризуют такие свойства как линейную плотность, силу межмолекулярного взаимодействия в начальный момент времени, размеры молекулы.

В статье рассматривается линеаризованный аналог задачи (1)–(3) в квазисоболевых пространствах с условиями Шоуолтера – Сидорова, являющихся обобщением условий Коши. Условия Шоуолтера – Сидорова являются более естественными для уравнений соболевского типа.

$$\begin{cases}(\lambda+\Lambda)u_{tt} = a\Lambda u + f(t),\\ (\lambda+\Lambda)v_{tt} = b\Lambda v + g(t),\end{cases} \tag{4}$$

с начальными:

$$\begin{aligned}P(u(0)-u_0)=0, \quad P(\dot{u}(0)-u_1)=0,\\ P(v(0)-v_0)=0, \quad P(\dot{v}(0)-v_1)=0,\end{aligned} \tag{5}$$

где Λ – квазиоператор Лапласа, λ, a, b – числовые параметры, $g(t)$, $f(t)$ – неоднородности.

Задача (5), (6) в операторном форме имеет вид:

$$P(w(0)-w_0)=0, \quad P(\dot{w}(0)-w_1)=0, \tag{6}$$

$$L\ddot{w} = Mw + F(t), \tag{7}$$

где U, F – квазибанаховы пространства, операторы $L, M \in L(U;F)$. В случае когда U, F – банаховы пространства задача (1)–(2) подробно изучена в работе А.А. Замышляевой [3].

Предварительные сведения

Пусть U – вещественный линеал **0** его нуль, упорядоченная пара $({}_U\|\cdot\|, U)$ называется квазинормируемым пространством если выполнены три аксиомы:

- $\forall u \in U \ \ {}_U|u| \geq 0$, ${}_U|u|=0 \ \Leftrightarrow \ u=0$;
- $\forall u \in U$, $a \in R \ \ {}_U|au| = |a|_U|u|$;
- $\forall \ \ u, w \in U \ \ {}_U|u+w| \leq C({}_U|u| + {}_U|w|)$, причем $C \geq 1$.

Квазинормированное пространство не нормируемо, но метризуемо. Поэтому в квазинормированном пространстве можно определить метрику и ввести понятия сходимости, фундаментальной последовательности и полноты. Полное квазинормированное пространство будем называть квазибанаховым пространством. Важнейшим примером квазибанаховых пространств являются пространства последовательностей $u=(u_1, u_2, \ldots)$ действительных чисел l_q, $q \in R_+$, снабженные квазинормой:

$${}_q|u| = (\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^q)^{(1/q)}.$$

Возьмем монотонную последовательность $\{\lambda_k\} \subset R_+$ такую, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$, и построим пространства:

$$l_q^m = \left\{ u = (u_1, u_2, ...) : \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{\frac{m}{2}} | u_k |)^q < \infty \right\}, \ m \in R, q \in R_+.$$

Пространства l_q^m – квазибанаховы с квазинормой:

$${}_q^m| u | = (\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{\frac{m}{2}} | u_k |)^q)^{\frac{1}{q}},$$

причем вложение $l_q^m \rightarrowtail l_q^n$ плотно и непрерывно при $m \geq n$ [4] поэтому построенное пространство называют квазисоболевым.

Коме того, мы активно используем теорию (L, p)-ограниченных операторов, разработанную для банаховых пространств. Пусть U, F квазибанаховы пространства.

Введем в рассмотрение L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in C : (\mu L - M)^{-1} \in L(F;U)\}$ и L-спектр $\sigma^L(M) = C \setminus \rho^L(M)$ оператора M. Если L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M ограничен, то оператор M называется (L,σ)-ограниченным. Если оператор M (L,σ)-ограничен, то существуют проекторы:

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\mu^L(M) d\mu \in L(U), \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma L_\mu^L(M) d\mu \in L(F).$$

Здесь $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1} L$ – *правая* L*-резольвента*, а $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ – *левая* L*-резольвента* оператора M, а замкнутый контур $\gamma \subset C$ ограничивает область, содержащую $\sigma^L(M)$. Положим U^0 $(U^1) = \ker P$ $(\mathrm{i}mP)$, F^0 $(F^1) = \ker Q$ $(\mathrm{i}mQ)$ и через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на U^k, $k = 0,1$.

Теорема 1. (теорема о расщеплении [5]) *Пусть оператор* M (L,σ) *– ограничен, тогда*

(i) операторы L_k , M_k*:* $U^k \to F^k$, $k = 0,1$*;*

(ii) существует оператор M_0^{-1} $L(F^0,U^0)$*;*

(iii) существует оператор L_1^{-1} $L(F^1,U^1)$*;*

(iv) оператор M_1^{-1} $L(F^1,U^1)$.

Построим операторы $H = M_0^{-1} L_0 \in L(U^0)$, $S = L_1^{-1} M_1 \in L(U^1)$. Оператор M называется (L, p)*-ограниченным,* $p \in \{0\} \cup N$, если ∞ – устранимая особая точка (т.е. $H \equiv O, p = 0$) или полюс порядка $p \in N$ (т.е. $H^p \neq O$, $H^{p+1} \equiv O$) L – *резольвенты* $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M.

Редукция модели к уравнению соболевского типа

Определение. Множество P называется фазовым пространством уравнения (5), если:

(i) для любых $(w_0, w_1) \in P$ существует единственное решение задачи (4), (5);

(ii) любое решение $w = w(t)$ уравнения (5) лежит в P как траектория, т.е. $u(t) \in P$ при $t \in (-\tau, \tau)$.

Введем пространства пусть $U = l_q^{m+2}$, $F = l_q^m$ – квазисоболевы пространства последовательностей. Зададим квазиоператор Лапласа $\Lambda u = (\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, ...)$ $\Lambda : l_q^{m+2} \to l_q^m$, причем если $q \in R_+$ и $m \in R$, тогда оператор $\Lambda \in L(l_q^{m+2}; l_q^m)$ [4]. Зададим в выбранных пространствах вектор-функцию:

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

и построим операторы $L, \ M, \ F(t)$:

$$L = \begin{pmatrix} \lambda + \Lambda & 0 \\ 0 & \lambda + \Lambda \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} a\Lambda & 0 \\ 0 & b\Lambda \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

В работе [6] доказана

Лемма 1. *Пусть оператор* M (L, p)*-ограничен,* $p \in \{0\} \cup N$. *Тогда фазовым пространством уравнения (5) служит подпространство* U^1.

В работе [7] доказана

Лемма 2. *При любых* $\lambda \in R$ *оператор* M *является* $(L,0)$*-ограниченным.*

В той же статье на основе леммы 1 была доказана теорема о существовании единственного решения задачи Коши для однородной системы уравнений Буссинеска.

Для существования решения задачи Коши для неоднородного уравнения соболевского типа необходимо выполнения условий согласования для рассматриваемой задачи они имеют вид:

$$w_0^0 = -(I - Q)F(0),$$

где $w_0^0 = Pw_0$. Очевидно, что для задачи Шоуотера – Сидорова данное условие вседа выполняется. Таким образом, справедлива:

Теорема 1. *Пусть оператор* M (L, p)*-ограничен,* $p \in \{0\} \cup N$ *и* $a^2 + b^2 \neq 0$. *Тогда существует единственное решение задачи (4), (5).*

Библиографический список

1. Cristiansen P.L., Muto V., Lomdahl P.S. On a Toda Lattice Model with a Transversal Degree of Freedom. Nonlinearity. – 1990. – №. 4. – Pp. 477–501.

2. Замышляева, А.А. Фазовое пространство модифицированного уравнения Буссинеска / А.А. Замышляева, Е.В. Бычков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – № 18 (277). – С. 13–19.

3. Замышляева, А.А. Исследование одного класса линейных уравнений соболевского типа высокого порядка: дис. … канд. физ.-мат. наук / А.А. Замышляева. – Челябинск, 2003.

4. Свиридюк, Г.А. Теорема о расщеплении в квазибанаховых пространствах / Г.А. Свиридюк, Дж.К. Аль Делфи // Математические заметки СВФУ. – 2012. – № 2, Т. 20. – С. 180–185.

5. Замышляева, А.А. Об одной математической модели соболевского типа в квазибанаховых пространствах / А.А. Замышляева, Х.М. Аль Хелли // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2015. – № 1. – Т. 15. – С. 137–142.

6. Замышляева, А.А. Фазовое пространство одного класса уравнений соболевского типа высокого порядка в квазибанаховых пространствах / А.А. Замышляева, Х.М. Аль Хелли // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Математика, Физика. – 2014. – №. 4. – С. 131–138.

7. Бычков Е.В. Линеаризованная модель колебаний в молекуле днк в квазибанаховых пространствах / Е.В. Бычков, Я.О. Аль Ани // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2016. – Т. 3, № 1. – С. 20–26.

К содержанию