

УДК 532.5 + 536:51

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВЫХ РЕЖИМОВ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ В ТЕПЛО-МАССООБМЕННЫХ АППАРАТАХ

Л.А. Прокудина

Представлена математическая модель состояния свободной поверхности жидкой пленки в тепло-массообменных процессах конденсации и испарения – нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка. Определены области неустойчивости жидкой пленки при конденсации и испарении. Используя метод конечных разностей, численно исследовано отклонение свободной поверхности вертикальной жидкой пленки в условиях тепло- и массообмена.

Ключевые слова: жидкая пленка; испарение; конденсация; неустойчивость.

Введение. Под течением жидкой пленки понимается ее течение под действием силы тяжести, например, вдоль твердой стенки, когда наружная поверхность пленки свободна. Технологические процессы, связанные с переносом тепла и массы через поверхность раздела, широко распространены в химической, нефтехимической, энергетической, металлургической и других отраслях промышленности [1–3]. Малая толщина пленки и большая поверхность раздела газ-жидкость позволяют ускорить диффузионные, тепловые, химические процессы. Поскольку течение жидких пленок реализуется в разнообразных тепло- и массообменных пленочных аппаратах, примерами могут служить пленочные реакторы для проведения технологических процессов, пленочные теплообменники, испарители и др., то результаты исследований имеют не только теоретическое, но и практическое значение. Исследование тепло и массообменных процессов, влияние на их интенсивность разнообразных физико-химических факторов дает возможность повышения эффективности тепломассообменной аппаратуры.

Математическая модель состояния свободной поверхности пленки. Рассмотрим течение тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости (жидкой пленки) под действием силы тяжести по твердой наклонной плоскости. Введем прямоугольную систему координат $OXYZ$, плоскость OXZ связана с поверхностью, по которой движется пленка, ось OX направлена по течению пленки, ось OY – по нормали в пленку жидкости. Течение жидкой пленки рассматривается в тепломассообменных процессах (испарение и конденсация). Нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных для отклонения свободной поверхности пленки $\psi(x, t)$ является её математической моделью и имеет вид:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{\text{Re Pr Ku}} - \frac{1}{\text{Re Pr Ku}} \psi \right) + \left(a_7 \frac{\partial}{\partial x} + a_{13} \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} + a_1 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + a_4 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + a_6 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \\
 & + a_{11} \frac{\partial \psi}{\partial x} + a_{14} \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + a_{16} \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_{17} \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} + a_{21} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial t} + a_{22} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \\
 & + a_{26} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_{28} \psi \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + a_{30} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + a_{34} \psi \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \\
 & + a_{37} \psi^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + a_{39} \psi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_{40} \psi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} + a_{44} \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial t} + a_{45} \psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \\
 & + a_{49} \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_{51} \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + a_{55} \psi^2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + a_{58} \psi^2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = 0. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Нумерация коэффициентов в (1) соответствует более полному его виду в статье [4].

Коэффициенты уравнения (1):

$$a_1 = -\frac{\text{Re } \sigma}{3}, \quad a_2 = 2a_1, \quad a_3 = a_1, \quad a_4 = -\frac{\text{Re}^2 F_x N}{2}, \quad a_5 = -\frac{\text{Re}^2 F_z N}{2}, \quad a_6 = a_6^* + a_6^1,$$

$$a_6^* = -\frac{\text{Re } F_y}{3} - \frac{\text{Re } M}{2} + \frac{3}{40} \text{Re}^3 F_x (\tau_x + F_x), \quad a_6^1 = \frac{2}{3} \text{Re} \cdot \text{sign } \Delta T \frac{\frac{\rho_1 - 1}{\rho_2}}{(\text{Re} \cdot \text{Pr} \cdot \text{Ku})^2},$$

$$a_7 = \frac{5}{24} \text{Re}^2 F_x, \quad a_{10} = a_{10}^* + a_{10}^1, \quad a_{10}^* = -\frac{\text{Re } F_y}{3} - \frac{\text{Re } M}{2},$$

$$a_{10}^1 = \frac{2}{3} \text{Re} \cdot \text{sign } \Delta T \frac{\frac{\rho_1 - 1}{\rho_2}}{(\text{Re} \cdot \text{Pr} \cdot \text{Ku})^2}, \quad a_{11} = -\text{Re } F_x - \text{Re } \tau_x,$$

$$a_{13} = -1, \quad a_{14} = -2\text{Re } F_x - \text{Re } \tau_x,$$

$$a_{16} = -\text{Re } F_y - \text{Re } M + \frac{3}{8} \text{Re}^3 F_x \tau_x + \frac{9}{20} \text{Re}^3 F_x^2, \quad a_{17} = \frac{5}{6} \text{Re}^2 F_x, \quad a_{21} = a_{17},$$

$$a_{22} = -\text{Re } F_y - \text{Re } M,$$

$$a_{26} = -\frac{1}{2} \text{Re}^2 F_x N, \quad a_{28} = 3a_{26}, \quad a_{30} = -\text{Re } \sigma, \quad a_{34} = -\text{Re } \sigma, \quad a_{37} = -\text{Re } F_x,$$

$$a_{39} = -\text{Re } F_y - \frac{\text{Re } M}{2} + \frac{3}{4} \text{Re}^3 F_x \tau_x + \frac{9}{8} \text{Re}^3 F_x^2, \quad a_{40} = \frac{5}{4} \text{Re}^2 F_x,$$

$$a_{44} = 2a_{40}, \quad a_{45} = -2\text{Re } F_y - \text{Re } M + \frac{3}{2} \text{Re}^3 F_x \tau_x + \frac{9}{4} \text{Re}^3 F_x^2, \quad a_{49} = -\text{Re}^2 F_x N,$$

$$a_{51} = -2 \operatorname{Re} \sigma, \quad a_{55} = \frac{1}{2} a_{51}, \quad a_{58} = -\frac{3}{2} \operatorname{Re}^2 F_x N,$$

где безразмерные величины и параметры: t – время; x – переменная; Re – число Рейнольдса; F_x, F_y – проекции числа Фруда на соответствующие оси координат; N – параметр поверхностной вязкости; $\bar{\tau}_x$ – касательное напряжение; M – параметр Марангони; Pr – число Прандтля; Ku – число фазового перехода; σ – параметр поверхностного натяжения. Знак $\operatorname{sign} \Delta T = 1$ соответствует процессу конденсации, а $\operatorname{sign} \Delta T = -1$ – испарения.

Вычислительные эксперименты. Нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных (1) решалось методом конечных разностей. Отклонение свободной поверхности жидкой пленки для момента времени t_{j+1} запишется в виде:

$$\begin{aligned} \psi_{i,j+1} = \psi_{i,j} + \Delta t \left(a_{11} \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} + a_6 \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \right. \\ \left. + a_4 \frac{\psi_{i+2,j} - 2\psi_{i+1,j} + 2\psi_{i-1,j} - \psi_{i-2,j}}{4(\Delta x)^3} + a_1 \frac{\psi_{i+2,j} - 4\psi_{i+1,j} + 6\psi_{i-1,j} + \psi_{i-2,j}}{(\Delta x)^4} + \right. \\ \left. + a_{14} \psi \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} + a_{16} \psi \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + a_{22} \left(\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} \right)^2 + \right. \\ \left. + a_{26} \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} \cdot \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + a_{45} \psi \left(\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} \right)^2 \right), \quad (2) \end{aligned}$$

где индекс i – шаг по пространственной координате, а индекс j – по времени.

Вычислительные эксперименты проведены для вертикальной пленки воды в диапазоне чисел Рейнольдса $1 \leq \operatorname{Re} \leq 20$ в процессах конденсации и испарения. В этих процессах скорость тепло- и массопереноса в разных точках свободной поверхности жидкой пленки различна, что приводит к неоднородности ее поверхностного натяжения и появлению градиентов поверхностного натяжения. Под влиянием температурных градиентов (параметр $M > 0$) высока скорость роста возмущений, что приводит к расширению области неустойчивости. На рис. 1 показано изменение во времени положения свободной поверхности жидкой пленки под действием термокапиллярных сил.

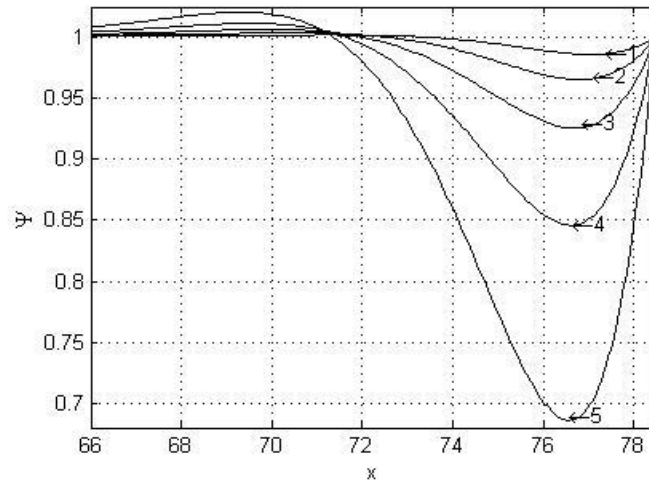


Рис. 1. Состояние свободной поверхности вертикальной жидкой пленки для $Re=10$, $M=1$: 1 – $t=0$; 2 – $t=0,0125$; 3 – $t=0,025$; 4 – $t=0,0375$; 5 – $t=0,05$

Жидкая пленка в процессе испарения более неустойчива по сравнению с процессом конденсации. В процессе испарения происходит расширение области неустойчивости жидкой пленки, как по диапазону чисел Рейнольдса, так и по диапазону волновых чисел. Например, для вертикальной пленки воды область неустойчивости при конденсации соответствует диапазону $7 \leq Re$, а при испарении – $5 \leq Re$ (рис. 2).

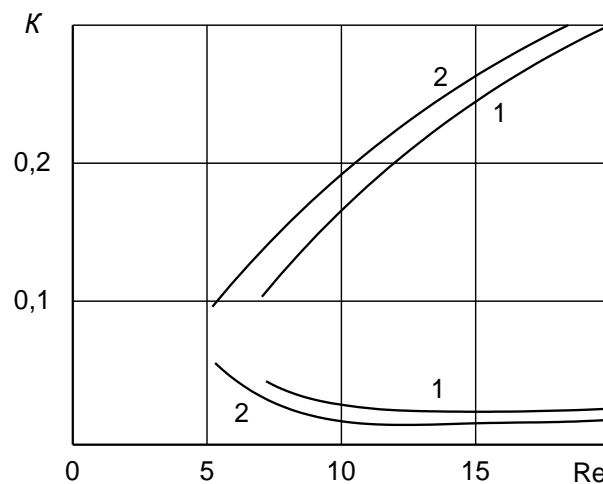


Рис. 2. Положение кривых нейтральной устойчивости в процессах: 1 – конденсации, 2 – испарения

Наличие нерастворимых поверхностно-активных веществ (жиры, масла) на свободной поверхности жидкой пленки качественным образом влияют на неустойчивость жидкой пленки (рис. 3) и состояние её свобод-

ной поверхности. Особенно это влияние ощутимо при малых числах Рейнольдса, когда поверхностная вязкость (параметр N) вызывает изменение капиллярных сил.

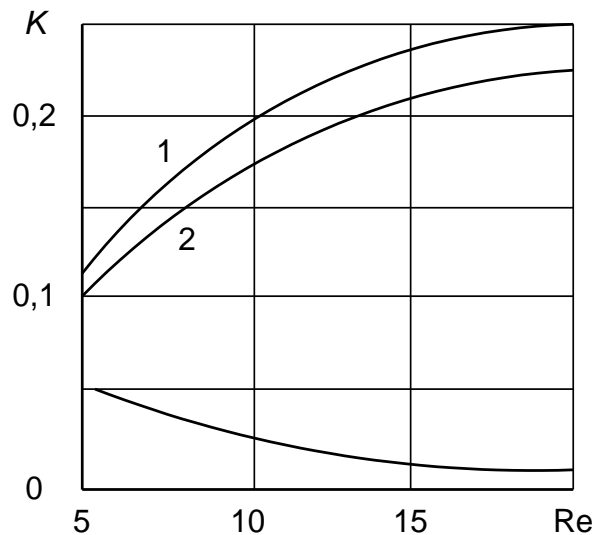


Рис. 3. Кривые нейтральной устойчивости при испарении: 1 – $N=0$, 2 – $N=1$

Математическое моделирование неустойчивых режимов течения жидких пленок позволяет исследовать влияние различных физико-химических параметров, представленных в коэффициентах математической модели (1) на течение жидкой пленки, а также предотвратить аварийные ситуации при работе теплообменных аппаратов.

Библиографический список

1. Холпанов, Л.П. Гидродинамика и теплообмен с поверхностью раздела / Л.П. Холпанов, В.Я Шкадов. – М.: Наука, 1990. – 271 с.
2. Олевский, В.М. Пленочная тепло- и массообменная аппаратура / В.М. Олевский, В.Р. Ручинский, А.М. Кашников, В.И. Чернышев. – М.: Химия, 1998. – 207 с.
3. Гагонин, И.И. Теплообмен при пленочной конденсации пленочном кипении в элементах оборудования АЭС / И.И. Гагонин, И.А. Шемагин. – М.: Энергоатомиздат, 1993. – 208 с.
4. Prokudina, L.A. 2014 Influence of Surface Tension inhomogeneity on the Wave Flow of a liquid Film / L.A. Prokudina // J. Eng. Phys. and Thermophys. – 2014. – V. 87. – N 1. – Pp. 165–173. DOI: 10.1007/s10891-014-0996-2.

[К содержанию](#)