УДК 517.9

О СВОЙСТВАХ ОДНОГО ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ ГЛАДКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ K-ФОРМ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ БЕЗ КРАЯ

Д.Е. Шафранов, Т.Н. Мхавес

Получен результат о расщеплении области определения одного эллиптического самосопряженного псевдодифференциального оператора, в пространстве гладких дифференциальных k-форм, определенных на гладком ориентированном компактном римановом многообразии без края. Для простоты понимания описана редукция уравнений с псевдодифференциальными операторами к уравнениям с абстрактными операторами. Данный результат можно использовать для развития теории уравнений и моделей соболевского типа.

Ключевые слова: дифференциальные k-формы, риманово многообразие без края, модели соболевского типа, расщепление в прямую сумму подпространств.

Введение

В настоящее время широко исследуются различные математические модели на основе уравнений соболевского типа вида:

$$L\dot{u} = Mu, \tag{1}$$

с необратимым оператором L при производной [1]. Стоит отметить, что исследования ведутся как для абстрактных уравнений, так и по конкретным приложениям такого вида [2]. Имеются качественные и численные исследования решений данных уравнений в самых различных постановках. Нас будет интересовать один из аспектов разрешимости задачи Коши в пространстве дифференциальных k-форм, определенных на римановом многообразии без края:

$$u(0) = u_0, \tag{2}$$

для уравнений вида (1), а именно требующееся в теории относительных операторов расщепление области определения оператора $L \in \mathcal{L}(U, F)$ в прямую сумму подпространств:

$$U = U^0 \oplus U^1. \tag{3}$$

Во введении формулируется задача и описывается ее связь с математическими моделями соболевского типа. В первом пункте (предварительные сведения) вводятся пространства дифференциальных k-форм, определенных на многообразии без края и сведения из теории относительно ограниченных операторов Свиридюка [1] и теории Ходжа–Кодаиры [3] о расщеплении таких пространств. Во втором пункте (основные результаты) приведены: основной результат о расщеплении области определения линейного ограниченного оператора $L = (\lambda + \Delta)$.

Предварительные сведения

Пусть U и F банаховы пространства и операторы $L, M \in \mathcal{L}(U, F)$ (т.е. линейные и ограниченные из U в F). Определим L–резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbf{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(F, U)\}$ и L–спектр $\sigma^L(M) = \mathbf{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M. Оператор-функцию $(\mu L - M)^{-1}$ назовем L–резольвентой оператора M, а оператор-функции $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1} L$ и $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ правой и левой L–резольвентой оператора M соответственно.

Определение 1. *Оператор M называется ограниченным относительно оператора L (короче, (L, σ)–ограниченным), если $\exists a \in \mathrm{R}_+ \ \forall \mu \in \mathrm{C} \ (|\mu| > a)$. Оператор M называется (L, p)–ограниченным, если он является (L, σ)–ограниченным и точка ∞ – полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbf{N}$ L–резольвенты оператора M.*

Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$. Уравнение (1) редуцируется [1] к паре эквивалентных ему уравнений:

$$R^L_{\delta_1}(M)\dot{u} = (\delta_1 L - M)^{-1} M u, \tag{4}$$

$$L^L_{\delta_1}(M)\dot{f} = M(\delta_1 L - M)^{-1} f, \tag{5}$$

где $\delta_1 \in \rho^L(M)$.

Оба уравнения можно понимать согласно [1] как конкретные интерпретации уравнения:

$$A\dot{v} = Bv, \tag{6}$$

где операторы $A, B \in \mathcal{L}(W)$, а W – некоторое банахово пространство. Решением уравнения (6) называется вектор-функция $v \in C^\infty(\mathbf{R}, W)$, удовлетворяющая уравнению (6).

Определение 2. *Отображение $V \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathcal{L}(W))$ называется разрешающей группой уравнения (6), если*

(i) $V^s V^t = V^{s+t}$ для любых $s, t \in \mathbf{R}$;

(ii) для любого $v_0 \in W$ вектор-функция $v(t) = V^t v_0$ является решением уравнения (6).

Теорема 1. [1] *Пусть оператор M (L, p)–ограничен. Тогда существуют аналитические разрешающие группы уравнений (4) и (5), представляемые интегралами Данфорда – Тейлора:*

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} R_\mu^L(M)e^{\mu t}d\mu, \qquad (7)$$

$$F^t = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} L_\mu^L(M)e^{\mu t}d\mu, \qquad (8)$$

где контур Γ *– ограничивает область, содержащую* $\sigma^L(M)$.

Группы (7), (8) имеют единицы:

$$U^0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} R_\mu^L(M)d\mu = P,\ F^0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} L_\mu^L(M)d\mu = Q, \qquad (9)$$

Обозначим ядра и образы этих полугрупп $\ker P = \mathsf{U}^0, \operatorname{im} P = \mathsf{U}^1$, $\ker Q = \mathsf{F}^0$, $\operatorname{im} Q = \mathsf{F}^1$.

Пусть Ω_n является гладким компактным ориентированным римановым многообразием без края. Пространства гладких дифференциальных k-форм, определенных на многообразии Ω_n обозначим $H_k = H_k(\Omega_n), k = 0,1,\ldots,n$. В пространствах H_k определен оператор Лапласа – Бельтрами $\Delta = +d\delta + \delta d$, где d – оператор внешнего дифференцирования k-форм, $\delta = (-1)^{n(k+1)+1} * d *$ – сопряженный к оператору d, а $*$ – оператор Ходжа. Положим $H_{kd} = d\delta[H_k], H_{k\delta} = \delta d[H_k], H_{k\Delta} = \ker\Delta$, $k = 0,1,\ldots,n$.

Определим формулой:

$$(\xi,\eta)_0 = \int \xi \wedge *\eta, \text{ где } \xi,\eta \in H_k \qquad (10)$$

скалярное произведение в пространстве $H_k, k = 0,1,\ldots,n$, а соответствующую норму обозначим $\|\circ\|_0$. Пополнение пространства H_k по этой норме обозначим H_k^0. Пополнение линеалов H_{kd}, $H_{k\delta}$, $H_{k\Delta}$ по ней обозначим соответственно через H_{kd}^0, $\mathrm{H}_{k\delta}^0$, $\mathrm{H}_{k\Delta}^0$.

Теорема 2. [3] (Теорема Ходжа – Кодаиры)**.** *Для любого* $k = 0,1,\ldots,n$ *существует расщепление пространства* H_k^0 *в прямую ортогональную сумму:*

$$\mathrm{H}_k^0 = \mathrm{H}_{kd}^0 \oplus \mathrm{H}_{k\delta}^0 \oplus \mathrm{H}_{k\Delta}^0, \qquad (11)$$

причем пространство $\mathrm{H}_{k\Delta}^0$ *конечномерно.*

Введем следующими формулами:

$$(\xi,\eta)_1 = (-\Delta\xi,\eta)_0 + (\xi,\eta)_0,$$
$$(\xi,\eta)_2 = (\Delta\xi,\Delta\eta)_0 + (\xi,\eta)_1, \qquad (12)$$

еще два скалярных произведения в пространстве $H_k, k = 0,1,\ldots,n,$ а соответствующие нормы обозначим $\|\circ\|_1$ и $\|\circ\|_2$ соответственно. Пополнение пространства H_k по этим нормам обозначим $\mathrm{H}_k^1, \mathrm{H}_k^2$.

Рассмотрим в H_k^0 ортопроектор P_Δ, $\ker P_\Delta = \mathrm{H}_{k\Delta}^0$. Он будет ортопроектором и в $\mathrm{H}_k^1, \mathrm{H}_k^2$, причем в силу конечномерности их ядра совпадут и $\mathrm{H}_{k\Delta}^0 = \mathrm{H}_{k\Delta}^1 = \mathrm{H}_{k\Delta}^2$.

Положим пространства $\mathbf{H}_k^l = \left(\mathrm{H}_{k\Delta}^l\right)^\perp, l = 0,1,2$ (т.е. ортогональное дополнение к гармоническим k-формам). Пространства $\mathbf{H}_\mathbf{k}^\mathbf{i}, i = 1,2$ – банаховы, причем в силу непрерывности и плотности вложений $\mathbf{H}_\mathbf{k}^\mathbf{0} \subset \mathbf{H}_\mathbf{k}^\mathbf{1} \subset \mathbf{H}_\mathbf{k}^\mathbf{2}$, а также конечности ранга оператора $P_{k\Delta}$ и $k = 0,1,\ldots,n$ справедливо следующее.

Следствие. [4] *Для любого* $k = 0,1,\ldots,n$ *существуют расщепления пространств:*

$$\mathbf{H}_\mathbf{k}^\mathbf{i} = \mathbf{H}_{\mathbf{k\Delta}}^{\mathbf{i}\,\mathbf{1}} \oplus \mathbf{H}_{\mathbf{k\Delta}}, \tag{13}$$

где $\mathbf{H}_{\mathbf{k\Delta}}^{\mathbf{i}\,\mathbf{1}} = \mathbf{I} - P_{k\Delta}\mathbf{H}_{\mathbf{k\Delta}}, i = 1,2$.

Основные результаты

Пусть Ω_n – гладкое ориентированное компактное риманово многообразие без края. Используя приведенную выше теорию, определим пространства:

$$\tilde{U} = \mathbf{H}_\mathbf{k}^\mathbf{2}, \tilde{F} = \mathbf{H}_\mathbf{k}^\mathbf{0}. \tag{14}$$

Пространства $\tilde{U}$ и $\tilde{F}$ являются векторными расслоениями дифференциальных k-форм на многообразии Ω_n. Обозначим $U = C^\infty\left(\tilde{U}\right), \quad F = C^\infty\left(\tilde{F}\right)$ векторные пространства гладких сечений $\tilde{U}, \tilde{F}$ соответственно.

Определение 3. *Линейный дифференциальный оператор* L *порядка* l, *действующий из* $\tilde{U}$ *в* $\tilde{F}$, *– это линейное отображение из* U *в* F. *Оператор* L *называется эллиптическим, если он эллиптический локально (в каждой тривиализации).*

Рассмотрим оператор $L = (\lambda + \Delta)$. Очевидно, что это эллиптический самосопряженный оператор из U в F. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Оператор $(\lambda + \Delta)$ линейный непрерывный из U в F, а пространства U и F разлагаются в прямые суммы:

$$U = \mathrm{im}(\lambda + \Delta)^* \oplus \ker(\lambda + \Delta), \tag{15}$$

$$F = \mathrm{im}(\lambda + \Delta) \oplus \ker(\lambda + \Delta)^*. \tag{16}$$

Замечание. В Теореме 3 знак звездочка, означающий сопряженный оператор, в силу самосопряженности оператора $(\lambda+\Delta)$ можно не использовать, но это затруднило бы понимание результата.

Библиографический список

1. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht etc.: VSP, 2003. – 268 p.

2. Свиридюк, Г.А. Неклассические модели математической физики / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Сер.: «Мат. моделирование и программирование». – 2012. – № 40 (299). – Вып. 14. – С. 7–18.

3. Уорнер, Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли /Ф. Уорнер. – М.: Мир, 1987. – 304 с.

4. Шафранов, Д.Е. Уравнение Хоффа как модель упругой оболочки / Д.Е. Шафранов, А.И. Шведчикова // Вестник ЮУрГУ. Сер. «Мат. Моделирование и программирование». – 2012. – № 18 (277). – Вып. 12. – С. 77–81.

5. Шафранов, Д.Е. О моделях соболевского типа в пространстве дифференциальных k-форм на сфере / Д.Е. Шафранов // Наука ЮУрГУ: мат-лы 66-й науч. конф. Секции естественных наук. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – С. 234–238.

К содержанию