УДК 624.042 + 539.3

ОПЕРАТИВНЫЙ СПОСОБ РАСЧЕТА КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛАСТИНАХ С ОТВЕРСТИЯМИ

Г.Ф. Сидоров

Рассматривается инновационный инженерный способ расчета напряжений применительно к задаче, традиционно не разрешаемой элементарными методами сопротивления материалов, – задаче о концентрации напряжений в окрестностях перфораций плоских конструкционных элементов типа тонкостенных стержней, проушин, плит и оболочек. Проведено сопоставление полученных решений с точными решениями по методу теории упругости. Подтверждена качественная и количественная близость элементарных решений по отношению к точным в области опасных сечений. Рассматриваемый способ не требует от расчетчика подготовки в области теории упругости и владения программными средствами решения ее задач.

Ключевые слова: пластины с отверстиями, концентрация напряжений, парциальная жесткость, метод парциальных жесткостей.

Задача оперативного внепроектного расчета напряжений в окрестности отверстий актуальна при проведении восстановительных, ремонтных, монтажных работ, когда приходится принимать решения о технологических операциях по ситуации. Известен, например, способ остановки развития трещины путем засверливания ее острого конца, выступающего как мощнейший концентратор напряжений (фактор кривизны кончика трещины). Приходится высверливать отверстие в несущем элементе с целью его усиления накладными элементами либо для обеспечения его устойчивости на этапе монтажа. В таких случаях инженер должен владеть определенной культурой прочностных расчетов, не связанной с чрезвычайно математически и программно формализованными современными методиками.

Имеются многочисленные точные решения задачи методами теории упругости и конечного элемента, требующие столь же точного указания граничных условий, наличия компьютерных программ и самого компьютера вместе с квалифицированным пользователем этими средствами прочностного расчета (фактор времени, квалификации, стоимости…).

Не всегда квалификационные данные пользователя программными средствами и инженера совмещаются в одном лице, а обстоятельства требуют оперативного решения: где сверлить, какого диаметра, как далеко или близко от края, от другого отверстия? Инженерную культуру прочностных расчетов формируют лучше всего аналитические и физически ясные подходы.

Как подчеркивал профессор В.В. Новожилов [1], увлечение сугубо математическими методами и числовыми способами их реализации превращает механику в специализированные разделы математики, выхолащивая их инженерное содержание. Особенно актуально не злоупотреблять формализацией подходов к проблеме прочностной надежности на этапе начальной инженерной подготовки подрастающего поколения.

Как отмечал В.И. Феодосьев [2]: «…успех практического расчета лежит не столько в применении сложного математического аппарата, сколько в умении найти наиболее удачные упрощающие предположения и довести расчет до окончательного числового результата».

В заданном таким образом ключе рассмотрим простейший, физически «прозрачный» и достаточно точный инновационный способ расчета, требующий начальной подготовки на уровне бакалавриата по курсу технической механики (сопротивления материалов) – метод парциальных жесткостей [3]. Корректность полученных этим способом результатов сначала подтвердим их сопоставлением с точными решениями, и только потом используем в исследовательских целях.

В качестве исходной рассмотрим известную задачу о силе, действующей на острие клина (рис. 1). Показательно, что в теории упругости [4] данная задача рассматривается как типовая, для которой «…совершенно исключаются возможности (хотя бы даже в качестве попытки первого приближения) применения к ним каких-либо элементарных решений из теории сопротивления материалов». Покажем, что с появлением метода парциальных жесткостей, относящегося как раз к элементарным методам, это мнение можно считать не соответствующим действительности. Метод основан на категоризации понятия «жесткость», придания этому понятию дополнительно векторных свойств. Применительно к модели твердого тела, помещенного в пространство жесткостей, метод снимает проблему статической неопределимости [3].

Выделим цилиндрическим сечением радиуса r верхнюю часть клина. Отсеченную часть представим как набор элементарных клиньев длиной r и с углом раствора $d\alpha$ каждый (метод стержневой аппроксимации). Жесткость элементарного клина на растяжение-сжатие (парциальную жесткость) определим согласно закону Гука: $s_\alpha = EdA/r = Ed\alpha$. Здесь использовано то же допущение, что и в первоисточнике [4], а именно: толщина клина принята за единицу. Элементарная площадь сечения элементарного клина с учетом предельного перехода $d\alpha \to 0$ может считаться какой угодно постоянной. Главная жесткость системы элементарных клиньев [3]:

$$S = \int_{-\varphi}^{+\varphi} s_\alpha \, cos^2\alpha = E\left(\varphi + \frac{1}{2} sin2\varphi\right). \tag{1}$$

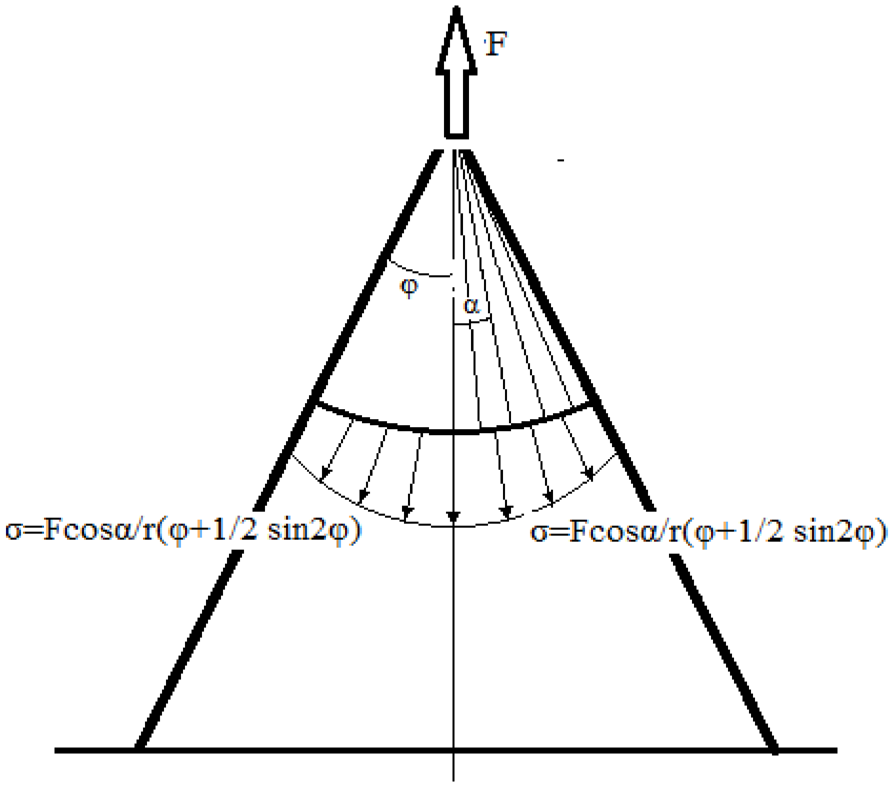

Рис. 1. Стержневая аппроксимация и эпюры напряжений.
Слева – по методу теории упругости.
Справа – по методу парциальных жесткостей

Усилие, воспринимаемое элементарным клином, определяется законом парциальных жесткостей:

$$N_\alpha = F\frac{s_\alpha cos\alpha}{S} = F\frac{cos\alpha d\alpha}{\varphi + \frac{1}{2} sin2\varphi}. \tag{2}$$

Напряжение зависит помимо этого от удаленности площадки:

$$\sigma = \frac{N_\alpha}{dA} = \frac{N_\alpha}{r d\alpha} = F\frac{cos\alpha}{r(\varphi + sin2\varphi/2)}. \tag{3}$$

Полученная формула ***абсолютно*** совпадает с таковой из курса теории упругости (см. рис. 1).

Бесспорно нерешаемыми элементарными методами задачами считаются задачи о концентрации напряжений в окрестности отверстий, выточек и любых других несовершенств геометрической формы объекта исследования. Покажем возможности метода парциальных жесткостей в исследовании концентрации напряжений в области перфораций пластин и оболочек.

Рассмотрим задачу о клине с отверстием (рис. 2.).

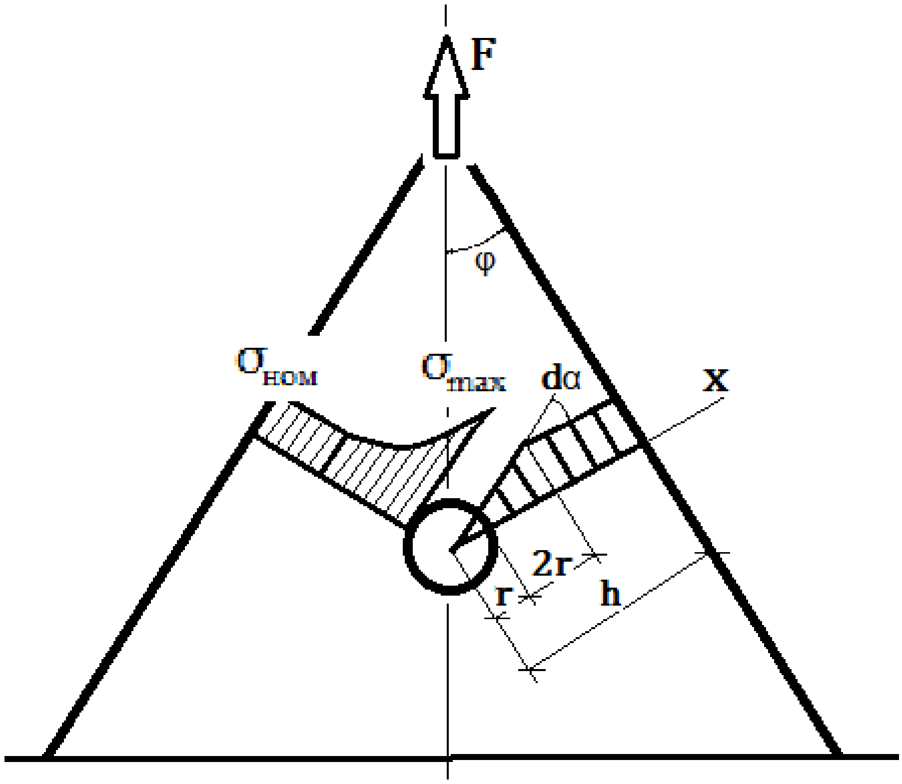

Рис. 2. Расчетная схема и эпюр напряжений
в опасном сечении пластины с отверстием

Двумя сечениями, следующими траекториям главных напряжений между внешней границей пластины и контуром отверстия кривизной $1/r$, выделим фрагмент, заполненный волокнами длиной $l_i = xd\alpha$ в случае $r \le x \le 3r$ (зона близкодействия Сен-Венана) и $l_i = 3rd\alpha$ за пределами этой зоны. Здесь для упрощения вычислений траектория главных напряжений, расположенная над осью x, аппроксимирована ломаной с точкой излома в конце зоны близкодействия. Далее действуем по указанной в предыдущей задаче схеме. Парциальные жесткости волокон при растяжении-сжатии:

$$s_i = \frac{EdA}{l_i} = \frac{Edx}{xd\alpha} \text{ для } r \le x \le 3r; \; s_i = \frac{Edx}{3rd\alpha} \text{ для } 3r \le x \le h. \quad (4)$$

Главная жесткость:

$$S = 2\left[\int_r^{3r} \frac{Edx}{xd\alpha} + \int_{3r}^{h} \frac{Edx}{3rd\alpha}\right] cos^2\varphi = \frac{2Ecos^2\varphi}{d\alpha}\left[ln3 + \frac{h}{3r} - 1\right]. \quad (5)$$

Удельная сила на волокне:

$$N_i = F\frac{s_i cos\varphi}{s} = F\frac{dx}{Cx}\text{ , где } C = 2\left[ln3 + \frac{h}{3r} - 1\right]. \qquad (6)$$

Закон распределения напряжений в зоне их концентрации:

$$\sigma = \frac{N_i}{dA} = \frac{F}{Cx}. \qquad (7)$$

Коэффициент концентрации:

$k_\sigma = \frac{\sigma_{x=r}}{\sigma_{x=3r}} = 3$, что соответствует классике теории упругости [5, 6, 7].

Формулы (6), (7) справедливы также для полосы постоянной ширины 2h; решение для полосы постоянной ширины отличается тем, что в таком случае надо положить угол φ, равным нулю, а $cos\varphi = 1$. Вид формул (6), (7) при этом не изменяется.

Особый случай представляет собой относительно большое отверстие (проушина). В отличие от решения методом теории упругости инженерный метод позволяет ввести количественную меру, отделяющую большое отверстие от малого.

У большого отверстия зона Сен-Венана выходит на границу пластины и занимает всю ширину «живого» сечения $h - r \leq 2r$; отсюда большим будем считать отверстие, радиус которого превышает $h/3$.

Исследование концентрации напряжений в пластине с большим отверстием требует отдельного рассмотрения, поскольку разные авторы поразному толкуют коэффициент концентрации напряжений. Аргументация в пользу единого способа определения коэффициента концентрации и исследование влияния параметров отверстия и его местоположения на величину коэффициента будут рассмотрены в следующей статье.

Заключение. Метод парциальных жесткостей позволяет решать задачи из области теории упругости с достаточной для практического применения точностью. При этом он не требует от расчетчика особой математической подготовки, не требует привлечения программных средств высокого уровня, может выполняться вручную. Инженерный подход позволяет установить пороговое значение относительной величины отверстия, при которой качественно изменяется картина распределения напряжений в сечении.

Библиографический список

1. Новожилов, В.В. Вопросы механики сплошной среды / В.В. Новожилов. – Л.: Судостроение, 1989. – 400 с.

2. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2004. – 591 с.

3. Сидоров, Г.Ф. Раскрытие статической неопределимости методом парциальных жесткостей / Г.Ф. Сидоров, Е.О. Позднышев // Механика: междунар. сб. науч. тр. Вып.5. – Гомель: БелГУТ, 2011. – С. 239–244.

4. Безухов, Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н.И. Безухов. – М.: Высшая школа, 1961. – 538 с.

5. Прочность, устойчивость, колебания. Т. 2. – М.: Машиностроение, 1968. – 458 с.

6. Савин, Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин. – Киев: «Наукова думка», 1968. – 366 с.

7. Howland R.C.J. On the stresses in the Nelghbourhood of a Circular Hole in a Strip under Tension, Phil.Trans. Roy. Soc., London. Ser. A, vol. 229, 1930.

К содержанию