УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ПОМОЩЬЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

В.Ф. Сбитнев

Решается плоская задача теории упругости при помощи алгебраических полиномов; рассматривается прямоугольная полоса, нагруженная по верхней кромке распределённой треугольной (гидростатической) нагрузкой.

Ключевые слова: полином, напряжения, уравнения равновесия и совместности деформаций, функция напряжений, деформация, нагрузка, производная.

В дисциплине «Основы теории упругости и пластичности» изучается раздел «Решение плоской задачи с помощью полиномов» [1, 2, 3]. В учебной и технической литературе приведено немало оригинальных примеров.

При этом решается в основном «обратная задача». В целях более глубокого освоения уравнений механики твёрдого деформируемого тела в настоящей работе рассматривается ещё одна, встречающаяся на практике, задача, но решим её «прямую задачу». Преподаватели, ведущие дисциплину «Основы теории упругости и пластичности», могут предложить студентам данную задачу в качестве иллюстрации метода.

Решается такая задача. Консоль прямоугольного сечения, имеющая толщину, равную единице, высоту h и длину ***l***, нагружена на верхней части контура распределённой горизонтальной (касательной) треугольной нагрузкой с наибольшей интенсивностью 2q (рис. 1а). Требуется исследовать напряжённое состояние этой пластины, т.е. получить формулы в виде функций для вычисления нормальных и касательных напряжений в любой точке сечения полосы.

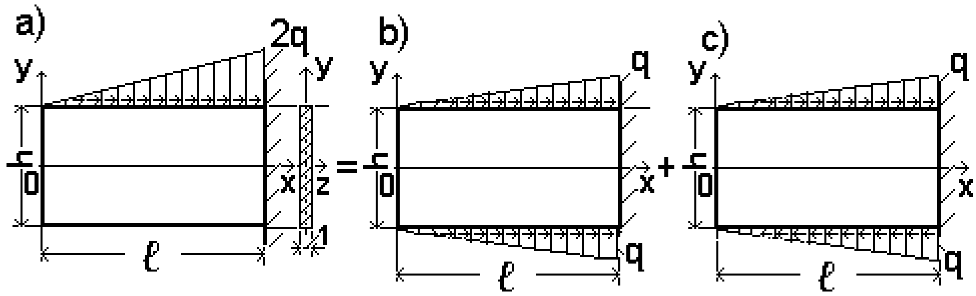

Рис. 1. Постановка плоской задачи теории упругости

С позиции сопротивления материалов поставленная задача – это внецентренное сжатие предполагаемое, что в поперечном сечении возникают только нормальные напряжения, определяемые по указанному ниже выражению.

Рассматривая пластину как брус при внецентренном сжатии распределённой нагрузкой, получим для произвольного сечения, отстоящем на расстоянии x от начала координат (рис. 2), такие внутренние усилия:

$M_z = 0{,}5\cdot 2qx/\boldsymbol{l}\cdot x\cdot h/2 = qx^2h/2\boldsymbol{l}$, $N = -\,2qx/\boldsymbol{l}\ x$. Поскольку $A = bh$ и $J_z = bh^3/12$, то при $b = 1$ получим:

$$\sigma_x = -\,N/A - M_z y/J_z = -\,2qx^2/h\boldsymbol{l} - 6qx^2y/h^2\boldsymbol{l} = -\,2qx^2/h\boldsymbol{l}(1 + 3y/h). \quad (1.1)$$

Согласно гипотезе о ненадавливании продольных волокон друг на друга в поперечном направлении имеем $\sigma_y = 0$, а из-за отсутствия Q_y $\tau_{xy} = 0$.

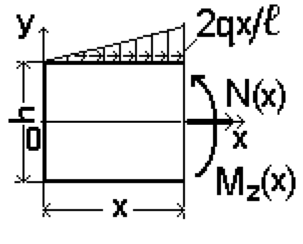

Рис. 2. Усилия в отсеченной части полосы

Однако предлагаемое решение не выдерживает никакой критики, так как оно не удовлетворяет уравнениям теории упругости. В самом деле.

Для плоской задачи теории упругости разрешающие уравнения в данном случае (при X = У = 0) имеют вид:

$$\begin{aligned} &\partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y = 0; \\ &\partial\tau_{yx}/\partial x + \partial\sigma_y/\partial y = 0; \\ &(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Подставив первую производную $\partial\sigma_x/\partial x = -\,4qx/h\boldsymbol{l}(1 + 3y/h)$ в первое уравнение равновесия при $\tau_{xy} = 0$, приходим к выводу, что оно не удовлетворяется; второе уравнение равновесия тождественно равно нулю.

Вторые производные $\partial^2\sigma_x/\partial x^2 = -12qx/h^2\boldsymbol{l}$ и $\partial^2\sigma_x/\partial y^2 = 0$, подставленные в уравнение совместности деформаций, тоже не дают нуля.

Далее, согласно закону о парности касательных напряжений, в произвольном сечении в точках с координатами ± h/2 тоже должны возникать вертикальные касательные напряжения. В сопротивлении материалов они отсутствуют.

Таким образом, в целом предлагаемое сопротивлением материалов решение даёт в данном случае поле неуравновешенных напряжений.

Продолжим поставленную задачу по определению таких напряжений σ_y и $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, которые в сочетании с напряжением σ_x дают равновесное поле напряжений.

Полоса – симметричная конструкция относительно оси x. Поэтому нагрузку можно разложить на две: симметричную и обратно симметричную, как показано на рис. 1, b, c, и решать две независимые задачи.

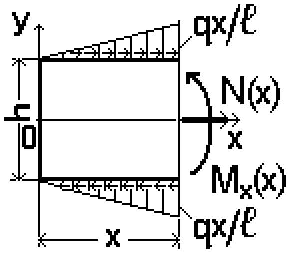

Рис. 3. Отсечённая часть полосы

На симметричную нагрузку задача уже решена [4]. В настоящей работе представлено решение задачи на обратно симметричную нагрузку и общее решение двух поставленной задачи.

Рассечём полосу в произвольном сечении, отстоящем от начала координат на расстоянии x, и рассмотрим равновесие её левой части (рис. 3).

На полосе отсутствует вертикальная нагрузка.

Следовательно, $Q(y) \equiv 0$. Составляющая горизонтальной нагрузки тоже равна нулю.

Тогда $N(x) = 0$. Изгибающий момент $M_z(x) = 2\cdot 0{,}5\cdot qx/\boldsymbol{l}\cdot x\cdot h/2 = qx^2h/2\boldsymbol{l}$.

Эпюра τ должна быть симметричной. С одной стороны, согласно условию статической эквивалентности $Q_y(x) = \int\tau dA = 0$ касательные напряжения в точках поперечного сечения должны равняться нулю. С другой стороны, согласно закону о парности касательных напряжений в точках сечения при $y = \pm\, h/2$ касательные напряжения $\tau = +\,qx/\boldsymbol{l}$. Это противоречие устраняется, если предположить, что касательные напряжения в сечении изменяются минимум по закону квадратной параболы, и она должна быть самоуравновешенной.

Пусть нормальные напряжения в произвольной точке сечения определяются формулой из сопротивления материалов:

$$\sigma_x(x,y) = -\frac{M_z(x)}{J_z}y = -\frac{qx^2h/2\boldsymbol{l}.}{2\boldsymbol{l}\cdot h^3/12}y = -\,6\,\frac{qx^2}{h^3\boldsymbol{l}}y. \qquad (1.3)$$

Эпюра $\sigma_x(x, y)$ приведена на рис. 4а.

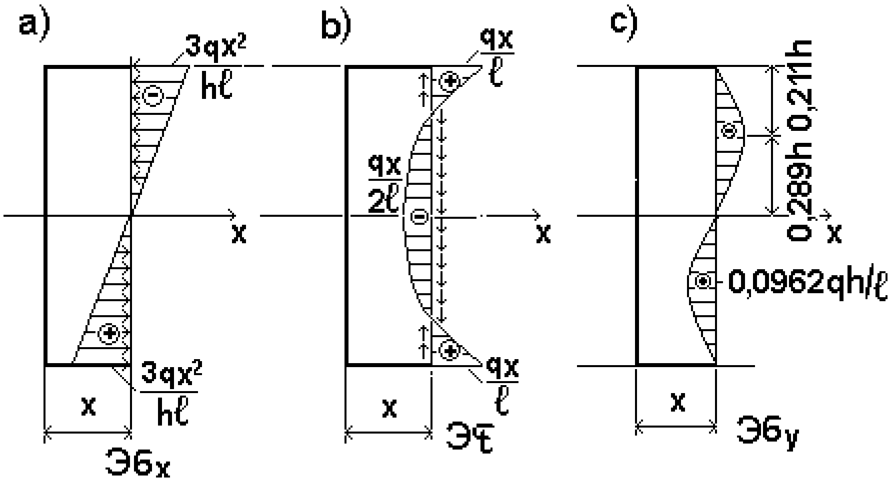

Рис. 4. Эпюры напряжений в произвольном сечении полосы

Теперь для решения задачи нужно проинтегрировать уравнения равновесия. Производная $\partial\sigma_x(x)/\partial x = -12qxy/h^2\boldsymbol{l}$. Подставив её в·первое уравнение равновесия и интегрируя его по y (с учётом добавления произвольной функции $f_1(x)$), найдём:

$$\boldsymbol{\tau_{xy}} = 6qxy^2/h^2l + f_1(x). \tag{1.4}$$

Произвольную функцию $f_1(z)$ найдём из условия на контуре. Так, на верхней и нижней кромках полосы при $y = \pm h/2$ имеем $\tau_{xy}(h/2) = qx/\boldsymbol{l}$. Теперь с помощью зависимости (1.4), находим:

$$f_1(x) = qx/\boldsymbol{l} - 6qx(h/2)^2/h^2\boldsymbol{l} = -qx/2\boldsymbol{l}. \tag{1.5}$$

После подстановки значение функции $f_1(x) = -qx/\boldsymbol{l}$ в выражение (1.4), после несложных преобразований получаем:

$$\boldsymbol{\tau_{xy}} = \boldsymbol{\tau_{yx}} = 6qxy^2/h^2l - qx/2\boldsymbol{l} = qx(12y^2/h^2 - 1)/2\boldsymbol{l}. \tag{1.6}$$

Эпюра $\boldsymbol{\tau_{xy}}(x,y)$ изображена на рис. 4b.

Производная $\partial\tau_{xy}(x)/\partial x = q(12y^2/h^2 - 1)/2\boldsymbol{l}$. Из второго уравнения равновесия после его интегрирования по y получаем формулу:

$$\sigma_y(x) = q(4y^3/h^2 - y)/2\boldsymbol{l} + f_2(x). \tag{1.7}$$

Произвольную функцию $f_2(x)$ находим из условия: при $y = \pm h/2$ $\sigma_y(x) = 0$.

Тогда $0 = q[4(h/2)^3/h^2 - h/2]/2\boldsymbol{l} + f_2(x)$. Или $f_2(x) = 0$.

И окончательно:

$$\sigma_y(x) = q(4y^3/h^2 - y)/2\boldsymbol{l}. \tag{1.8}$$

Эпюра $\sigma_y(y)$ показана на рис. 4c. Она не зависит от координаты x.

Проверим теперь уравнение совместности деформаций. Для этого нужны вторые производные по x и y от $\sigma_x(x)$ и $\sigma_y(x)$. Имеем:

$\partial^2\sigma_x(x)/\partial x^2=-12qy/h^2\boldsymbol{l}$; $\partial^2\sigma_x(x)/\partial y^2=0$; $\partial^2\sigma_y(x)/\partial y^2=12qy/h^2\boldsymbol{l}$; $\partial^2\sigma_y(x)/\partial x^2=0$.

После подстановки этих функций в уравнение совместности деформаций получаем:

$$-12qy/h^2\boldsymbol{l} + 0 + 0 + 12qy/h^2\boldsymbol{l} \equiv 0. \qquad (1.9)$$

Следовательно, уравнение совместности деформаций удовлетворяется.

Таким образом, решение полосы на действие обратно симметричной нагрузки получено в замкнутом виде. В поперечном сечении возникают все три напряжения σ_x, σ_y и τ_{xy}.

Теперь, суммируя выражения для σ_x, σ_y и τ_{xy} с полученными в [4], окончательно имеем:

$$\sigma_x = -\frac{qx^2}{h\boldsymbol{l}} - \frac{qh}{6\boldsymbol{l}} + \frac{4qy^2}{3h\boldsymbol{l}} - 6\frac{qx^2}{h^2 l}y; \qquad (1.10)$$

$$\tau_{xy}. = \frac{2qxy}{h\boldsymbol{l}} + \frac{qx}{2\boldsymbol{l}}\left(12\frac{y^2}{h^2} - 1\right) \qquad (1.11)$$

$$\sigma_y = \frac{q}{h\boldsymbol{l}}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) + \frac{qy}{2l}\left(4\frac{y^2}{h^2} - 1\right). \qquad (1.12)$$

Итак, в предлагаемой задаче в поперечном сечении полосы возникают все три напряжения: σ_x σ_y и τ_{xy}.

Опасной будет точка, расположенная около заделки с координатой h/2.

В ней возникают нормальные напряжения, зависящие от высоты полосы, и касательные напряжения, равные 2q. В высоких полосах касательные напряжения будут соизмеримы с нормальными напряжениями и ими пренебрегать нельзя.

Так, например, в заделке уже при $h = 0{,}2\boldsymbol{l}$ возникают нормальные напряжения:

$$\sigma_X = -\frac{q\cdot\boldsymbol{l}}{0{,}2\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l}} - \frac{q\cdot 0{,}2\boldsymbol{l}}{6\boldsymbol{l}} + \frac{4q(0{,}1\boldsymbol{l})^2}{3\cdot 0{,}2\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l}} - 6\frac{q\,\boldsymbol{l}^2\cdot 0{,}1\boldsymbol{l}}{(0{,}2\boldsymbol{l})^2\cdot\boldsymbol{l}\cdot 2} = -19{,}767q.$$

В этой же точке касательные напряжения $\tau_{XY} = 2{,}0q$. Т.е. оба напряжения нужно учитывать при исследовании напряжённого состояния точки.

Библиографический список

1. Жемочкин, Б.Н. Теория упругости: учебное пособие для строительных вузов и факультетов / Б.Н. Жемочкин. – М.: Госстройиздат, 1957. – 256 с.

2. Киселёв, В.А. Плоская задача теории упругости: учебное пособие для вузов / В.А. Киселёв. – М.: Высшая школа, 1976. – 152 с.

3. Александров, А.В. Основы теории упругости и пластичности: учебник для строительных специальностей вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов. – М.: Высшая школа, 1990. – 400 с.

4. Сбитнев, В.Ф. К вопросу о решении одной задачи теории упругости в полиномах / В.Ф. Сбитнев // Наука ЮУрГУ. Материалы 68-й научно-технической конференции преподавателей и сотрудников ЮУрГУ. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2015. – С. 102–107.

К содержанию