УДК 517.955.8 DOI: 10.14529/mmp160202

ВОЗНИКНОВЕНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ РЭЛЕЯ С ДИФФУЗИЕЙ

А.В. Казарников, С.В. Ревина

Рассматривается система реакции-диффузии с кубической нелинейностью, которая является бесконечномерным аналогом классической системы Рэлея и частным случаем системы Фитцхью – Нагумо. Пространственная переменная изменяется в произвольной m-мерной ограниченной области, рассматриваются краевые условия Дирихле или смешанные краевые условия. Найдены критические значения управляющего параметра, отвечающие колебательной и монотонной потере устойчивости нулевого равновесия. Получены явные асимптотические представления пространственно-временных структур, которые образуются вследствие колебательной потери устойчивости нулевого равновесия при различных типах краевых условий. Показано, что происходит мягкая потеря устойчивости. С помощью построения абстрактной схемы и применения метода Ляпунова – Шмидта выведены формулы для общего члена разложения автоколебаний. Установлено, что для всех рассматриваемых краевых условий общий член асимптотики вторичного решения представляет собой нечетный тригонометрический полином по времени. Приведены примеры приложений общей схемы к случаю одной пространственной переменной, когда вторичные решения обладают дополнительными симметриями. Если на концах отрезка заданы краевые условия Дирихле, то в выражение для n-го члена асимптотики входят лишь конечные линейные комбинации собственных функций оператора Лапласа с нечетными индексами не выше n. Если на концах отрезка заданы смешанные краевые условия, то в выражения n-го члена асимптотики входят лишь конечные линейные комбинации собственных функций с индексами не выше $\frac{n+1}{2}$.

Ключевые слова: система Рэлея; метод Ляпунова – Шмидта; автоколебания; системы реакции-диффузии.

1. Постановка задачи

В настоящее время немало работ посвящены исследованию нелинейных параболических систем, называемых системами реакции-диффузии, которые широко применяются в моделировании биологических, химических и других процессов. Среди них особо следует выделить класс систем с кубической нелинейностью, к которому принадлежит хорошо известная система Фитцхью – Нагумо [1,2], первоначально возникшая при изучении распространения нервного импульса:

$$\begin{aligned} v_t &= \nu_1 \Delta v + \varepsilon(w - \alpha v - \beta), \\ w_t &= \nu_2 \Delta w - v + \mu w - w^3, \end{aligned} \tag{1}$$

где $v = v(x,t)$, $w = w(x,t)$, $x \in D$, $t > 0$, $D \subset \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ – ограниченная область, $\mu \in \mathbb{R}$ – управляющий параметр, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\varepsilon > 0$, $\nu_1 > 0$, $\nu_2 > 0$ – фиксированные параметры. Положив в (1) $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\varepsilon = 1$ и взяв коэффициенты диффузии равными $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, получим систему Рэлея с диффузией:

$$v_t = \nu \Delta v + w, \quad w_t = \nu \Delta w - v + \mu w - w^3. \tag{2}$$

В конечномерном случае, когда нет зависимости от пространственной переменной x, полагая $y_1(t) = v(t)$, $y_2(t) = w(t)$, приходим к классической системе обыкновенных дифференциальных уравнений Рэлея:

$$\dot{y_1} = y_2; \quad \dot{y_2} = -y_1 + \mu y_2 - y_2^3. \tag{3}$$

Известно, что нулевое равновесие системы (3) при $\mu \leq 0$ асимптотически устойчиво, а при $\mu > 0$ неустойчиво; при положительных μ в системе существует устойчивый предельный цикл. Первые члены асимптотики цикла неоднократно находились в литературе; в [3] получены четыре члена асимптотики при помощи метода Линштедта – Пуанкаре.

Системы реакции-диффузии с одной стороны, «наследуют» свойства обыкновенного дифференциального уравнения, которое получается из исходной системы отбрасыванием диффузионных членов, с другой стороны, возникающие в процессе изменения параметров пространственно-временные структуры обладают гораздо более сложным поведением, чем в конечномерном случае [4]. В то время, как системы вида (1) исследуются в основном численными методами [5], особую ценность представляют аналитические исследования и возможность явного построения решений нелинейных уравнений, даже в виде асимптотических формул.

Целью настоящей работы является построение асимптотики автоколебаний системы уравнений в частных производных (2), ответвляющихся от тривиального решения при изменении управляющего параметра μ и фиксированном коэффициенте диффузии ν. Известно, что в случае краевых условий Неймана диффузия не оказывает влияния на характер автоколебаний, в этом случае наблюдается пространственно-однородный автоколебательный режим. В настоящей работе в качестве краевых условий рассматриваются условия Дирихле или смешанные краевые условия. Подробные выкладки приведены в [6]. Для получения вторичных решений применен метод Ляпунова – Шмидта в форме, развитой В.И. Юдовичем [7]. Метод применим к дифференциальным уравнениям, заданным как в конечномерных, так и бесконечномерных пространствах, в том числе к уравнениям Навье – Стокса [8–10]. Обоснование асимптотики в данной работе не проводится, его можно провести с помощью применения теоремы о неявной функции в аналитической форме.

В настоящей работе сначала система (2) записывается в операторной форме. Находятся критические значения параметра μ, строятся первые члены асимптотики. Затем выводятся формулы для общего члена разложения. Далее рассматриваются примеры применений общей схемы к случаю одной пространственной переменной.

2. Операторный вид уравнения

Сведем систему Рэлея с диффузией (2) к обыкновенному дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве H вектор-функций $\boldsymbol{u} = (v, w)$, компоненты которых принадлежат $L_2(D)$, где D – ограниченная область в $\mathbb{R}^m$ с кусочно-гладкой границей. Скалярное произведение в H определяется стандартным образом:

$$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) = \int\limits_D [f_1 g_1^* + f_2 g_2^*] dx, \quad \boldsymbol{f}(x,t) = (f_1(x,t),\, f_2(x,t)),\, \boldsymbol{g}(x,t) = (g_1(x,t),\, g_2(x,t)),$$

звездочкой обозначено комплексное сопряжение.

Пусть $A(\mu) : H \to H$ – линейный оператор, действующий на вектор-функцию $\boldsymbol{u} = (v, w)$, $v, w \in W_2^2(D)$, по правилу:

$$\mathrm{A}(\mu)\boldsymbol{u} = \nu\Delta\boldsymbol{u} + \mathrm{B}\boldsymbol{u} + \mu\mathrm{C}\boldsymbol{u}. \tag{4}$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. В области определения оператора $A(\mu)$, как обычно, учитываются краевые условия. Будем предполагать выполненными однородные условия Дирихле ($\boldsymbol{u}|_{\partial D} = 0$) или смешанные краевые условия, когда на части границы заданы краевые условия Дирихле, а на оставшейся границе – Неймана ($\boldsymbol{u}|_{S_1} = 0$; $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial n}|_{S_2} = 0$; $S_1 \cup S_2 = \partial D$).

Пусть трилинейный оператор $K(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) : H^3 \to H$ действует по правилу:

$$K(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (0, a_2 b_2 c_2)\,.$$

Тогда систему (2) можно записать в операторном виде:

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \mathrm{A}(\mu)\boldsymbol{u} - K(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{u} \in H. \tag{5}$$

3. Задача на собственные значения

Значение параметра μ, при котором собственные значения линейного оператора $A(\mu)$ выходят на мнимую ось, будем называть критическим и обозначать μ_{cr}. Для нахождения μ_{cr} рассмотрим линейную спектральную задачу:

$$\mathrm{A}(\mu)\boldsymbol{\phi} = \sigma\boldsymbol{\phi}, \quad \boldsymbol{\phi} \neq 0.$$

Известно, что в пространстве H существует ортонормированный базис $\{\boldsymbol{e}_1\psi_k, \boldsymbol{e}_2\psi_k\}_{k=1}^{+\infty}$, $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0)$; $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$, ψ_k являются собственными функциями скалярного оператора $-\Delta$, заданного в области D с соответствующими краевыми условиями

$$-\Delta\psi_k = \lambda_k\psi_k, \tag{6}$$

а собственные значения образуют неубывающую последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$, причем первое собственное значание положительно: $\lambda_1 > 0$.

Собственные значения оператора $A(\mu)$ имеют вид:

$$\sigma_{1,2}^k(\mu) = \frac{-(2\nu\lambda_k - \mu) \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Отсюда находим критическое значение параметра μ:

$$\mu_{\mathrm{cr}} = \frac{1}{\nu\lambda_1} + \nu\lambda_1 \quad \text{при} \quad \nu \geq \frac{1}{\lambda_1}; \quad \mu_{\mathrm{cr}} = 2\nu\lambda_1 \quad \text{при} \quad \nu < \frac{1}{\lambda_1}.$$

При $\nu \geq \dfrac{1}{\lambda_1}$ в системе происходит монотонная потеря устойчивости, а при $\nu < \dfrac{1}{\lambda_1}$ имеет место колебательная потеря устойчивости. Всюду в дальнейшем будем интересоваться колебательной потерей устойчивости, полагая, что $\nu < \dfrac{1}{\lambda_1}$. В этом случае оператор $A(\mu_{cr})$ имеет пару чисто мнимых собственных значений:

$$\sigma_{1,2}(\mu_{cr}) = \pm i\omega_0, \qquad \omega_0 = \sqrt{1 - \nu^2\lambda_1^2}. \tag{7}$$

Очевидно, что сопряженный к $A(\mu)$ оператор $A^*(\mu) : H \to H$ имеет вид:

$$\mathrm{A}^*(\mu)\boldsymbol{u} = \nu\Delta\boldsymbol{u} - \mathrm{B}\boldsymbol{u} + \mu\mathrm{C}\boldsymbol{u}.$$

Следуя общей схеме метода Ляпунова – Шмидта [7], сначала найдем собственную функцию $\boldsymbol{\varphi}$ линейной спектральной задачи и собственную функцию $\boldsymbol{\Phi}$ линейной сопряженной задачи:

$$A(\mu_{cr})\boldsymbol{\varphi} - i\omega_0\boldsymbol{\varphi} = 0, \quad A^*(\mu_{cr})\boldsymbol{\Phi} + i\omega_0\boldsymbol{\Phi} = 0, \quad (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\Phi}) = 1.$$

Они имеют вид:

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{i}{2\omega_0}\begin{pmatrix} 1 \\ \nu\lambda_1 + i\omega_0 \end{pmatrix}\psi_1(x), \qquad \boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{(\nu\lambda_1 - i\omega_0)}\begin{pmatrix} 1 \\ -(\nu\lambda_1 - i\omega_0) \end{pmatrix}\psi_1(x). \tag{8}$$

4. Первые члены асимптотики автоколебаний

Для отыскания $\dfrac{2\pi}{\omega}$-периодического по времени решения уравнения (5), где ω-неизвестная циклическая частота, применим метод Ляпунова – Шмидта [7]. Введем в (5) замену времени $\tau = \omega t$, а через $\varepsilon^2 = \mu - \mu_{cr}$ обозначим надкритичность. Тогда (5) примет вид:

$$\omega\dot{\boldsymbol{u}} - A(\mu_{cr})\boldsymbol{u} = \varepsilon^2\mathrm{C}\boldsymbol{u} - K(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}), \tag{9}$$

где точкой обозначено дифференцирование по τ. Неизвестное 2π-периодическое по τ решение $\boldsymbol{u}$ и неизвестную частоту ω будем разыскивать в виде рядов по параметру ε:

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i\boldsymbol{u}_i, \qquad \omega = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\omega_i, \tag{10}$$

ω_0 определено в (7). Подставляя разложения (10) в (9) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, придем к цепочке уравнений:

$$\varepsilon^1: \quad \omega_0\dot{\boldsymbol{u}}_1 - A(\mu_{cr})\boldsymbol{u}_1 = 0, \tag{11}$$

$$\varepsilon^2: \quad \omega_0\dot{\boldsymbol{u}}_2 - A(\mu_{cr})\boldsymbol{u}_2 = -\omega_1\dot{\boldsymbol{u}}_1 \equiv \boldsymbol{f}_2, \tag{12}$$

$$\varepsilon^3: \quad \omega_0\dot{\boldsymbol{u}}_3 - A(\mu_{cr})\boldsymbol{u}_3 = -\omega_1\dot{\boldsymbol{u}}_2 - \omega_2\dot{\boldsymbol{u}}_1 + \mathrm{C}\boldsymbol{u}_1 - K(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1) \equiv \boldsymbol{f}_3, \tag{13}$$

$$\varepsilon^4: \quad \omega_0\dot{\boldsymbol{u}}_4 - A(\mu_{cr})\boldsymbol{u}_4 = -\omega_1\dot{\boldsymbol{u}}_3 - \omega_2\dot{\boldsymbol{u}}_2 - \omega_3\dot{\boldsymbol{u}}_1 + \mathrm{C}\boldsymbol{u}_2 - 3K(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) \equiv \boldsymbol{f}_4, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^5: \quad \omega_0\dot{\boldsymbol{u}}_5 - A(\mu_{cr})\boldsymbol{u}_5 = -\omega_1\dot{\boldsymbol{u}}_4 - \omega_2\dot{\boldsymbol{u}}_3 - \omega_3\dot{\boldsymbol{u}}_2 - \omega_4\dot{\boldsymbol{u}}_1 + \\ +\mathrm{C}\boldsymbol{u}_3 - 3K(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_3) - 3K(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2) \equiv \boldsymbol{f}_5,\end{aligned} \tag{15}$$

$$\cdots$$

$$\varepsilon^n: \quad \omega_0\dot{\boldsymbol{u}}_n - A(\mu_{cr})\boldsymbol{u}_n = C\boldsymbol{u}_{n-2} - \sum_{i=1}^{n-1}\omega_{n-i}\dot{\boldsymbol{u}}_i - \sum_{i_1+i_2+i_3=n} 3K(\boldsymbol{u}_{i_1}, \boldsymbol{u}_{i_2}, \boldsymbol{u}_{i_3}) \equiv \boldsymbol{f}_n. \tag{16}$$

В формуле (16) и далее будем предполагать, что индексы суммирования упорядочены по возрастанию: $i_1 \le i_2 \le i_3$.

Неоднородные уравнения (12) – (15) имеют 2π-периодические по τ решения тогда и только тогда, когда выполнено условие разрешимости: правая часть ортогональна решению однородного сопряженного уравнения

$$\int_0^{2\pi}(\boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{\Phi})e^{-i\tau}d\tau = 0. \tag{17}$$

Далее последовательно решим уравнения (11) – (15). 2π-периодическое по τ решение уравнения (11) можно представить в виде:

$$\boldsymbol{u}_1 = \alpha_1(\boldsymbol{\varphi} e^{i\tau} + \boldsymbol{\varphi}^* e^{-i\tau}), \qquad \alpha_1 > 0. \tag{18}$$

Рассмотрев условие разрешимости для уравнения (12) с учетом условия $\alpha_1 > 0$, заключаем, что $\omega_1 = 0$. Следовательно, решение уравнения при ε^2 (12) имеет вид:

$$\boldsymbol{u}_2 = \alpha_2(\boldsymbol{\varphi} e^{i\tau} + \boldsymbol{\varphi}^* e^{-i\tau}).$$

Слагаемые в правой части уравнения при ε^3 можно сгруппировать при степенях $e^{i\tau}$:

$$\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{f}_{13}(x)e^{i\tau} + \boldsymbol{f}^*_{13}(x)e^{-i\tau} + \boldsymbol{f}_{33}(x)e^{3i\tau} + \boldsymbol{f}^*_{33}(x)e^{-3i\tau},$$

где $\boldsymbol{f}_{13}(x) = \alpha_1 C\boldsymbol{\varphi} - 3\alpha_1^3 K(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}^*)$ и $\boldsymbol{f}_{33} = -\alpha_1^3 K(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi})$. Тогда условие разрешимости (17) данного уравнения принимает вид:

$$\int_0^{2\pi} (\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{\Phi})e^{-i\tau} d\tau = 2\pi(\boldsymbol{f}_{13}(x), \boldsymbol{\Phi}) = 0. \tag{19}$$

Отделяя вещественную и мнимую часть в (19), находим α_1^2 и ω_2:

$$\alpha_1^2 = \frac{4\omega_0^2}{3||\psi_1^2||^2_{L_2}}, \quad \omega_2 = 0. \tag{20}$$

Говорят, что имеет место мягкая потеря устойчивости, если при переходе через критическое значение параметра равновесие теряет устойчивость и рождается устойчивый предельный цикл. Если же ответвляющийся цикл существует в докритической области значений параметра и неустойчив, то имеет место жесткая потеря устойчивости. Тип потери устойчивости зависит от знака правой части в выражении коэффициента α_1^2 [7]. Так как в (20) коэффициент $\alpha_1^2 > 0$, то происходит мягкая потеря устойчивости.

Частное решение неоднородного уравнения (13) запишем в виде:

$$\boldsymbol{u}_3^p(\tau) = \boldsymbol{w}_{13}(x)e^{i\tau} + \boldsymbol{w}^*_{13}(x)e^{-i\tau} + \boldsymbol{w}_{33}(x)e^{3i\tau} + \boldsymbol{w}^*_{33}(x)e^{-3i\tau}, \tag{21}$$

где $\boldsymbol{w}_{13}(x) = -(A(\mu_{cr}) - i\omega_0 I)^{-1}\boldsymbol{f}_{13}(x)$ и $\boldsymbol{w}_{33}(x) = -(A(\mu_{cr}) - 3i\omega_0 I)^{-1}\boldsymbol{f}_{33}(x)$, причем выражение $\boldsymbol{w}_{13}(x)$ имеет смысл в силу выполнения условия (19).

Тригонометрический полином будем называть нечетным (четным), если он содержит лишь нечетные (четные) гармоники, т.е. гармоники вида $e^{(2n+1)i\tau}$ ($e^{2ni\tau}$). Очевидно, что $\boldsymbol{u}_3^p(\tau)$ – нечетный тригонометрический полином третьей степени.

Решение уравнения при ε^3 (13) имеет вид:

$$\boldsymbol{u}_3 = \alpha_3(\boldsymbol{\varphi} e^{i\tau} + \boldsymbol{\varphi}^* e^{-i\tau}) + \boldsymbol{u}_3^p(\tau),$$

α_3 определяется из условия разрешимости уравнения при ε^5. Из условия разрешимости уравнения (14) выводим $\alpha_2 = 0, \quad \omega_3 = 0$. Следовательно, правая часть уравнения при ε^4 равна нулю и 2π-периодическое решение уравнения (14) имеет вид:

$$\boldsymbol{u}_4 = \alpha_4(\boldsymbol{\varphi} e^{i\tau} + \boldsymbol{\varphi}^* e^{-i\tau}).$$

Аналогично, из условия разрешимости уравнения при ε^5 (15), приходим к выражению:

$$\alpha_3 + i\alpha_1\omega_4 = -3\alpha_1^2[2(K(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}^*, \boldsymbol{w}_{13}(x)), \boldsymbol{\Phi}) + (K(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}, (\boldsymbol{w}_{13}(x))^*), \boldsymbol{\Phi})+ \\ +(K(\boldsymbol{\varphi}^*, \boldsymbol{\varphi}^*, \boldsymbol{w}_{33}(x)), \boldsymbol{\Phi})] \equiv h_5.$$

Отделяя вещественную и мнимую части, получаем выражения α_3 и ω_4

$$\alpha_3 = Re(h_5), \qquad \omega_4 = \frac{1}{\alpha_1} Im(h_5). \tag{22}$$

Таким образом, выполняется утверждение

Предложение 1. *В системе Рэлея с диффузией (2) происходит мягкая потеря устойчивости нулевого равновесия и при малых $\varepsilon > 0$ в ней присутствует устойчивый предельный цикл. Первые члены асимптотики автоколебаний имеют вид:*

$$\begin{gathered} \boldsymbol{u} = \varepsilon\alpha_1(e^{i\omega t}\boldsymbol{\varphi} + e^{-i\omega t}\boldsymbol{\varphi}^*) + \varepsilon^3(\alpha_3(e^{i\omega t}\boldsymbol{\varphi} + e^{-i\omega t}\boldsymbol{\varphi}^*) + \boldsymbol{u}_3^p(\omega t)) + O(\varepsilon^4), \\ \omega = \sqrt{1-\nu^2\lambda_1^2} + \varepsilon^4\omega_4 + O(\varepsilon^5). \end{gathered} \tag{23}$$

Здесь α_1, $\boldsymbol{u}_3^p$, α_3, ω_4 задаются выражениями (20) – (22) соответственно.

5. Общий член асимптотики автоколебаний

По индукции доказывается утверждение.

Предложение 2. *Четные компоненты асимптотического разложения вторичного периодического по времени решения и нечетные компоненты циклической частоты ω равны нулю: для всякого $k \in \mathbb{N}$ $\boldsymbol{u}_{2k} = 0$, $\alpha_{2k} = 0$, $\omega_{2k-1} = 0$.*

Пусть n-нечетно, $n \geq 5$. Из предложений 1 и 2 следует, что для таких n уравнение (16) может быть записано в виде:

$$\omega_0\dot{\boldsymbol{u}}_n - A(\mu_{cr})\boldsymbol{u}_n = C\boldsymbol{u}_{n-2} - \sum_{i=1}^{n-4}\omega_{n-i}\dot{\boldsymbol{u}}_i - \sum_{i_1+i_2+i_3=n} 3K(\boldsymbol{u}_{i_1}, \boldsymbol{u}_{i_2}, \boldsymbol{u}_{i_3}) \equiv \boldsymbol{f}_n,\ n \geq 5, \tag{24}$$

где в обеих суммах, стоящих в правой части (24), индексы суммирования нечетны.

Преобразовав правую часть уравнения (24), найдем нечетные члены разложения амплитуды автоколебаний и четные компоненты циклической частоты ω:

Предложение 3. *Амплитуда α_{n-2} и компонента циклической частоты ω_{n-1} определяются из условия разрешимости уравнения (24) по формулам*

$$\alpha_{n-2} = Re(h_n),\ \omega_{n-1} = \frac{1}{\alpha_1} Im(h_n), \tag{25}$$

где

$$\begin{gathered} h_n = \int\limits_0^{2\pi}(\boldsymbol{g}_n, \boldsymbol{\Phi})e^{-i\tau}d\tau,\ \boldsymbol{g}_n = C(\boldsymbol{u}_{n-2}^p) - 3K(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_{n-2}^p) - \\ - \sum_{i=3}^{n-2}\omega_{n-i}\dot{\boldsymbol{u}}_i - \sum_{i_1+i_2+i_3=n} 3K(\boldsymbol{u}_{i_1}, \boldsymbol{u}_{i_2}, \boldsymbol{u}_{i_3}); \quad (i_1, i_2, i_3) \neq (1, 1, n-2), \end{gathered} \tag{26}$$

а через u_{n-2}^p обозначено частное решение неоднородного уравнения при ε^{n-2}.

Предложение 4. *Правая часть уравнения (24) есть нечетный тригонометрический полином по времени степени n:*

$$\boldsymbol{f}_n = \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{f}_{kn}(x)e^{ik\tau} + \boldsymbol{f}^*_{kn}(x)e^{-ik\tau}), \tag{27}$$

2π-периодическое решение уравнения (24) также является нечетным тригонометрическим полиномом степени n:

$$u_n = \alpha_n(\boldsymbol{\varphi}e^{i\tau} + \boldsymbol{\varphi}^*e^{-i\tau}) + \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{w}_{kn}(x)e^{ik\tau} + \boldsymbol{w}^*_{kn}(x)e^{-ik\tau}), \tag{28}$$

где $\boldsymbol{w}_{kn}(x) = -(A(\mu_{cr}) - ik\omega_0 I)^{-1}\boldsymbol{f}_{kn}(x)$, а индекс суммирования k в формулах (27) и (28) пробегает только нечетные значения.

Доказательство. Достаточно доказать соотношение (27), так как формула (28) непосредственно следует из него. Сначала покажем, что утверждение верно для $n = 5$. Известно, что первые члены асимптотики $\boldsymbol{u}_1$ и $\boldsymbol{u}_3$ представимы в виде (28), а трилинейный оператор в правой части уравнения (15) представлен одним слагаемым $3K(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_3)$. Подставляя в это слагаемое выражения $\boldsymbol{u}_1$ и $\boldsymbol{u}_3$, группируя слагаемые при экспонентах и учитывая остальные члены в правой части (24), получим формулу (27) при $n = 5$, где:

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{f}_{15}(x) = 3\alpha_1^2\alpha_3 K(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}^*) + 2\alpha_1^2 K(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}^*, \boldsymbol{w}_{13}(x)) + \alpha_1^2 K(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{w}^*_{13}(x)) + \\
+\alpha_1^2 K(\boldsymbol{\varphi}^*, \boldsymbol{\varphi}^*, \boldsymbol{w}_{33}(x)) + \alpha_3 C\boldsymbol{\varphi} + C\boldsymbol{w}_{13}(x) - i\alpha_1\omega_4\boldsymbol{\varphi}, \\
\boldsymbol{f}_{35}(x) = \alpha_1^2\alpha_3 K(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}) + \alpha_1^2 K(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{w}_{13}(x)) + 2\alpha_1^2 K(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}^*, \boldsymbol{w}_{33}(x)) + C\boldsymbol{w}_{33}(x), \\
\boldsymbol{f}_{55}(x) = \alpha_1^2 K(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{w}_{33}(x)),
\end{gathered}$$

а постоянные ω_4 и α_3 выбраны так, чтобы выполнялось условие разрешимости.

Пусть теперь $n > 5$. Докажем, что правую часть уравнения (24) можно привести к виду (27). Заметим, что суммы, стоящие в правой части, можно записать в виде нечетных тригонометрических полиномов n и $n-4$ степени соответственно:

$$\sum_{i_1+i_2+i_3=n} 3K(\boldsymbol{u}_{i_1}, \boldsymbol{u}_{i_2}, \boldsymbol{u}_{i_3}) = \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{K}_k(x)e^{ik\tau} + \boldsymbol{K}^*_k(x)e^{-ik\tau}),$$

$$\sum_{i=1}^{n-4} \omega_{n-i}\dot{\boldsymbol{u}}_i = \sum_{k=1}^{n-4} (\boldsymbol{G}_k(x)e^{ik\tau} + \boldsymbol{G}^*_k(x)e^{-ik\tau}),$$

где $\boldsymbol{G}_1(x) = \sum\limits_{j=1}^{n-4}(i\omega_{n-j}(\alpha_j\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{w}_{1j}(x))$, $\boldsymbol{G}_m(x) = \sum\limits_{j=1}^{n-4} i\omega_{n-j}\boldsymbol{w}_{mj}(x), m = 2, \ldots, n-4$, а индексы суммирования i, j, k пробегают только нечетные значения. Тогда приходим к (27), где

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{f}_{1n}(x) = \alpha_{n-2}C\boldsymbol{\varphi} + C\boldsymbol{w}_{1(n-2)}(x) - i\alpha_1\omega_{n-1}\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{K}_1(x) + \boldsymbol{G}_1(x), \\
\boldsymbol{f}_{3n}(x) = C\boldsymbol{w}_{3(n-2)}(x) + \boldsymbol{K}_3(x) + \boldsymbol{G}_3(x), \\
\ldots \\
\boldsymbol{f}_{(n-4)n}(x) = C\boldsymbol{w}_{(n-4)(n-2)}(x) + \boldsymbol{K}_{(n-4)}(x) + \boldsymbol{G}_{(n-4)}(x), \\
\boldsymbol{f}_{(n-2)n}(x) = C\boldsymbol{w}_{(n-2)(n-2)}(x) + \boldsymbol{K}_{(n-2)}(x), \\
\boldsymbol{f}_{nn}(x) = \boldsymbol{K}_n(x),
\end{gathered} \tag{29}$$

при этом постоянные α_{n-2} и ω_{n-1} выбираются так, чтобы выполнялось условие разрешимости (17). Тогда уравнение (27) имеет периодическое по времени решение, которое является нечетным тригонометрическим полиномом степени n по τ и представимо в виде (28). □

Выражения $\boldsymbol{w}_{kn}(x)$ в (28) могут быть найдены в виде рядов по базису пространства H.

Следствие 1. *Выражения для $\boldsymbol{w}_{kn}(x)$ в формуле (28) имеют вид:*

$$\boldsymbol{w}_{kn}(x) = -\sum_{j=1}^{+\infty} \boldsymbol{P}_j^k \psi_j; \quad \boldsymbol{P}_j^k = (C_{jk}^1 \boldsymbol{e}_1 + C_{jk}^2 \boldsymbol{e}_2), \tag{30}$$

причем компоненты вектора $(C_{jk}^1; C_{jk}^2)$ определяются по формуле:

$$C_{jk}^1 = (f_{kn}^{j2} - f_{kn}^{j1}(\mu_{cr} - R_j^k))\frac{(F_j^k)^*}{|F_j^k|^2}, \, C_{jk}^2 = f_{kn}^{j1} + R_j^k C_{jk}^1; \quad f_{kn}^{jm} = (\boldsymbol{f}_{kn}(x), \boldsymbol{e}_m \psi_j), \tag{31}$$

где $R_j^k = \nu\lambda_j + k(i\omega_0)$, $F_j^k = (\mu_{cr} - R_j^k)R_j^k - 1$, при $k \neq 1$, $j \neq 1$. В случае, когда $k = 1$, $j = 1$ $C_{11}^1 = 1$, $C_{11}^2 = 0$.

В частных случаях, некоторые из которых будут рассмотрены далее, ряды (30) превращаются в конечные суммы.

6. Случай одной пространственной переменной

Пусть $x \in [0,1]$, и на концах отрезка заданы условия Дирихле либо смешанные краевые условия. Приведем выражения для первых членов асимптотики (23). Так как $\alpha_1 = \frac{2\sqrt{2}\omega_0}{3}$, то из формулы (18) находим первый член асимптотики автоколебаний $\boldsymbol{u}_1$:

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{i\sqrt{2}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ \nu\lambda_1 + i\omega_0 \end{pmatrix}\psi_1(x)e^{i\tau} - \frac{i\sqrt{2}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ \nu\lambda_1 - i\omega_0 \end{pmatrix}\psi_1(x)e^{-i\tau}.$$

Решение уравнения при ε^3 имеет вид (28) при $n = 3$, где

$$\begin{gathered} \boldsymbol{w}_{13}(x) = \tfrac{i\sqrt{2}}{9}\beta \boldsymbol{P}_1^3 \psi_{3-M}(x); \quad \beta = \nu\lambda_1 + i\omega_0, \\ \boldsymbol{w}_{33}(x) = -\tfrac{i\sqrt{2}}{9}\beta^3 \boldsymbol{P}_3^1 \psi_1(x) - \tfrac{i\sqrt{2}}{27}(\beta^*)^3 \boldsymbol{P}_3^3 \psi_{3-M}(x), \end{gathered} \tag{32}$$

причем $M = 0$ в случае краевых условий Дирихле и $M = 1$ в случае смешанных краевых условий, а коэффициенты $\boldsymbol{P}_j^k$ определены в (30).

Рассмотрев условие разрешимости уравнения при ε^5, придем к выражению:

$$\alpha_3 + i\alpha_1\omega_4 = i\sqrt{2}(\nu\lambda_1 + i\omega_0)(\frac{2}{27}C_{13}^2 + \frac{1}{27}(C_{13}^2)^* + \frac{1}{9}C_{31}^2 + \frac{1}{81}C_{33}^2) \equiv h_5.$$

Отделяя вещественную и мнимую части h_5, получим выражения для α_3 и ω_4:

$$\alpha_3 = Re\,(h_5) \quad \omega_4 = \frac{3}{2\sqrt{2}\omega_0} Im\,(h_5)\,.$$

Предложение 5. *Если $x \in [0,1]$, и на концах отрезка заданы краевые условия Дирихле, то в выражениях (27) и (28) компоненты вектор-функций $\boldsymbol{f}_{kn}(x)$ и $\boldsymbol{w}_{kn}(x)$*

представляют собой линейные комбинации базисных функций ψ_k с нечетными индексами k не выше n:

$$\boldsymbol{f}_{kn}(x) = \sum_{i \le n} \boldsymbol{C}_i^k \psi_i(x), \qquad \boldsymbol{w}_{kn}(x) = \sum_{i \le n} \boldsymbol{D}_i^k \psi_i(x), \qquad \boldsymbol{C}_i^k, \boldsymbol{D}_i^k \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \qquad (33)$$

где $n \ge 3$, $1 \le k \le n$, индексы i, k пробегают только нечетные значения.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\boldsymbol{f}_{kn}(x)$ представимы в виде (33), так как тогда из следствия 1 вытекает, что и $\boldsymbol{w}_{kn}(x)$ представимы в виде (33).

Из (32) следует, что утверждение верно для $n = 3$. Пусть $n \ge 5$. Предположим, что в выражениях для $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_3, \ldots,$ $\boldsymbol{u}_{n-2}$ функции $\boldsymbol{w}_{kn}(x)$ имеют вид (33). Так как первые два слагаемых в правой части уравнения (24), очевидно, имеют нужную форму, остается показать что и последний член $\sum\limits_{i_1+i_2+i_3=n} K(\boldsymbol{u}_{i_1}, \boldsymbol{u}_{i_2}, \boldsymbol{u}_{i_3})$ представим в виде (33). Представив $\boldsymbol{u}_{kj}(x)$ в виде (28) и введя обозначения:

$$\boldsymbol{z}_{1k_j}(x) = \alpha_n \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{w}_{1n}(x),\ \boldsymbol{z}_{ik_j}(x) = \boldsymbol{w}_{ik_j}(x), \quad i > 1,$$

приходим к разложению:

$$K(\boldsymbol{u}_{k_1}, \boldsymbol{u}_{k_2}, \boldsymbol{u}_{k_3}) = \sum_{(j,l,m) \le (k_1,k_2,k_3)} K(\boldsymbol{z}_{jk_1}, \boldsymbol{z}_{lk_2}, \boldsymbol{z}_{mk_3}) e^{i(j+l+m)\tau} + K^*(\boldsymbol{z}_{jk_1}, \boldsymbol{z}_{lk_2}, \boldsymbol{z}_{mk_3}) e^{-i(j+l+m)\tau},$$

где индексы j, l, m пробегают только нечетные значения. Показатель экспоненты будет также нечетным как сумма трех нечетных чисел. С учетом разложения (33), справедливого для $\boldsymbol{z}_{ik_j}(x)$, имеем:

$$K(\boldsymbol{z}_{jk_1}(x), \boldsymbol{z}_{lk_2}(x), \boldsymbol{z}_{mk_3}(x)) = \sum_{(p,r,s) \le (k_1,k_2,k_3)} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \tilde{C}_{prs} (\psi_{p+r-s} + \psi_{-p+r+s} + \psi_{p-r+s} \pm \psi_{p+r+s} \end{pmatrix},$$

где $\tilde{C}_{prs} \in \mathbb{C}$, знак при ψ_{p+r+s} выбирается положительным в случае, когда на левой границе отрезка задано краевое условие Неймана, а на правом - Дирихле и отрицательным во всех остальных случаях. В силу нечетности p, r, s при разложении произведения функций $\psi_p \psi_r \psi_s$ в сумму, в результате получатся функции только с нечетными индексами. Также, ясно что $p + r + s \le n$. Следовательно, $K(\boldsymbol{u}_{k_1}, \boldsymbol{u}_{k_2}, \boldsymbol{u}_{k_3})$ имеет вид (33). Тогда вся правая часть уравнения (24) может быть представлена в виде линейной комбинации базисных функций ψ_k с нечетными индексами не выше n. □

Следствие 2. *Общий член асимптотики автоколебаний при $n \ge 5$ и краевых условиях Дирихле является нечетным тригонометрическим полиномом по времени степени n, причем его коэффициенты представляют собой линейные комбинации базисных функций ψ_j с нечетными индексами k не выше n.*

Аналогично доказывается утверждение.

Следствие 3. *Расмотрим уравнение (24) в случае нечетного $n \ge 5$. Если $x \in [0, 1]$, и на концах отрезка заданы смешанные краевые условия, то в выражениях (27) и (28) функции $\boldsymbol{f}_{kn}(x)$ и $\boldsymbol{w}_{kn}(x)$ представляют собой линейные комбинации базисных функций ψ_k с индексами не выше $\dfrac{n+1}{2}$.*

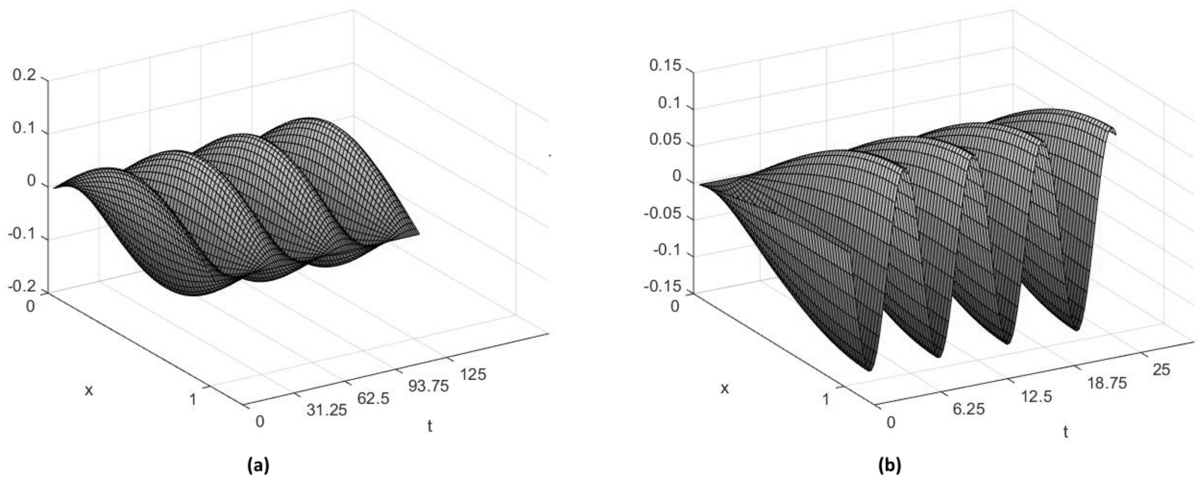
Приведем выражения, необходимые для вычисления первых членов асимптотики вторичного периодического по времени решения в случае различных типов краевых условий. Для краевых условий Дирихле имеем:

$$\mu_{cr} = 2\nu\pi^2, \qquad \omega_0 = \sqrt{1-\nu^2\pi^4}, \qquad \boldsymbol{\varphi} = \frac{i}{2\omega_0}\begin{pmatrix} 1 \\ \nu\pi^2 + i\omega_0 \end{pmatrix}\sin(\pi x),$$
$$\boldsymbol{w}_{13}(x) = \frac{i\sqrt{2}}{9}(\nu\pi^2 + i\omega_0)\boldsymbol{P}_1^3 \sin(3\pi x),$$
$$\boldsymbol{w}_{33}(x) = -\frac{i\sqrt{2}}{9}(\nu\pi^2 + i\omega_0)^3[\boldsymbol{P}_3^1 \sin(\pi x) - \frac{1}{3}\boldsymbol{P}_3^3 \sin(3\pi x)],$$
$$h_5 = i\sqrt{2}(\nu\pi^2 + i\omega_0)\left(\frac{2}{27}C_{13}^2 + \frac{1}{27}(C_{13}^2)^* + \frac{1}{9}C_{31}^2 + \frac{1}{81}C_{33}^2\right).$$

Для смешанных краевых условий (условий Дирихле при $x=0$ и условий Неймана при $x=1$) получаем выражения:

$$\mu_{cr} = \frac{\nu\pi^2}{2}, \qquad \omega_0 = \sqrt{1-\frac{\nu^2\pi^4}{16}}, \qquad \boldsymbol{\varphi} = \frac{i}{2\omega_0}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\nu\pi^2}{4} + i\omega_0 \end{pmatrix}\sin(\frac{\pi}{2}x),$$
$$\boldsymbol{w}_{13}(x) = \frac{i\sqrt{2}}{9}(\nu\frac{\pi^2}{4} + i\omega_0)\boldsymbol{P}_1^3 \sin(\frac{3\pi}{2}x),$$
$$\boldsymbol{w}_{33}(x) = -\frac{i\sqrt{2}}{9}(\nu\frac{\pi^2}{4} + i\omega_0)^3[\boldsymbol{P}_3^1 \sin(\frac{\pi}{2}x) - \frac{1}{3}\boldsymbol{P}_3^3 \sin(\frac{3\pi}{2}x)],$$
$$h_5 = i\sqrt{2}(\nu\frac{\pi^2}{4} + i\omega_0)\left(\frac{2}{27}C_{13}^2 + \frac{1}{27}(C_{13}^2)^* + \frac{1}{9}C_{31}^2 + \frac{1}{81}C_{33}^2\right).$$

Полученные асимптотические представления автоколебаний хорошо согласуются с результатами численного интегрирования системы. На рисунке представлена визуализация автоколебаний, для которой использованы ведущие члены асимптотики.



Вторая компонента асимптотики вторичного решения при $\nu = 0,1$, $\mu = \mu_{cr} + 0,01$ для краевых условий Дирихле (a) и смешанных краевых условий (b)

Разрушение цикла было исследовано численно. В экспериментах для случая краевых условий Дирихле использовалось значение коэффициента диффузии $\nu = 0,1$, которому соответствует критическое значение параметра μ, равное $\mu_{cr} = 1,9739$. Было установлено, что при $\mu < \mu_{cr} + 0,01$ в системе наблюдается автоколебательный режим, который сменяется двухчастотными квазипериодическими колебаниями при увеличении значений управляющего параметра. При $\mu \geq \mu_{cr} + 0,05$ в системе наблюдается устойчивое пространственно-неоднородное стационарное решение.

Литература

1. Fitzhugh, R. Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane / R. Fitzhugh // Biophysical Journal. – 1961. – № 1. – P. 257–278.
2. Nagumo, J.M. An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon / J.M. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa // Proceedings of the IRE. – 1962. – V. 50. – P. 2061–2070.
3. Tuwankotta, J.M. Studies on Rayleigh Equation / J.M. Tuwankotta // Integral. – 2000. – V. 5, № 1. – P. 1–9.
4. Глызин, С.Д. Конечномерные модели диффузионного хаоса / С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2010. – Т. 50, № 5. – С. 860–875.
5. Башкирцева, И.А. Бифуркация расщепления стохастических циклов в модели Фицхью – Нагумо / И.А. Башкирцева, Л.Б. Ряшко, Е.С. Слепухина // Нелинейная динамика. – 2013. – Т. 9, № 2. – С. 295–307.
6. Казарников, А.В. Бифуркация рождения цикла в пространственно-распределенной системе Рэлея / А.В. Казарников, С.В. Ревина // Деп. ВИНИТИ. – 2013. – Т. 83, № 242-В2013.
7. Юдович, В.И. Исследование автоколебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима / В.И. Юдович // Прикладная математика и механика. – 1972. – Т. 36, № 3. – С. 450–459.
8. Ревина, С.В. Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических трехмерных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений / С.В. Ревина, В.И. Юдович // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2001. – № 2. – С. 29–41.
9. Мелехов, А.П. Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических двумерных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений / А.П. Мелехов, С.В. Ревина // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2008. – № 2. – С. 41–56.
10. Ревина, С.В. Рекуррентные формулы длинноволновой асимптотики задачи устойчивости сдвиговых течений / С.В. Ревина // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. – Т. 5, № 8. – С. 1387–1401.

Алексей Владимирович Казарников, аспирант, кафедра вычислительной математики и математической физики, Южный федеральный университет (г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация), kazarnikov@gmail.com.

Светлана Васильевна Ревина, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра вычислительной математики и математической физики, Южный федеральный университет (г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация); научный сотрудник, Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук (г. Владикавказ, Российская Федерация), revina.ru@gmail.com.

Поступила в редакцию 22 мая 2015 г.

MSC 35Q92 **DOI: 10.14529/mmp160202**

The Onset of Auto-Oscillations in Rayleigh System with Diffusion

A.V. Kazarnikov, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation, kazarnikov@gmail.com**,**
S.V. Revina, Southern Federal University, Rostov-on-Don; Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Russian Federation, revina@math.rsu.ru

A reaction-diffusion system with cubic nonlinear term, which is the infinite-dimensional case of classical Rayleigh oscillator, is considered in the present paper. Spatial variable belongs to a bounded m-dimensional domain D, supposed that Dirichlet or Neumann conditions are set on the boundary. Critical values of control parameter, corresponding to monotonous and oscillatory instability are found. Asymptotic approximations of patterns, branching from zero uniform solution due to oscillatory instability are found. Asymptotic approximations are valid for different types of boundary conditions. It is shown that soft loss of stability takes place in the system. By developing an abstract scheme and applying Lyapunov-Schmidt method, formulas for consecutive terms of asymptotic expansion are found. It was found that all terms of asymptotic expansion are odd trigonometric polynomials in time. Several applications of abstract scheme to one-dimensional domain are shown. In this case, branching solutions have certain symmetries. It is shown that the n-th term of asymptotic contains eigenfunctions of Laplace operator with indexes less or equal to n in the case of Diriclet boundary conditions or less or equal to $\frac{n+1}{2}$ otherwise.

Keywords: Rayleigh equation; Lyapunov – Schmidt reduction; self-oscillations; reaction-diffusion systems.

References

1. Fitzhugh R. Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane. *Biophysical Journal*, 1961, no. 1, pp. 257–278.
2. Nagumo J.M., Arimoto S., Yoshizawa S. An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon. *Proceedings of the IRE*, 1962, vol. 50, pp. 2061–2070.
3. Tuwankotta J.M. Studies on Rayleigh Equation. *Integral*, 2000, vol. 5, no. 1, pp. 1–9.
4. Glyzin S.D., Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. Finite-Dimensional Models of Diffusion Chaos. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2010, vol. 50, no. 5, pp. 816–830. DOI: 10.1134/S0965542510050076
5. Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B., Slepoykhina E.S. [Splitting Bifurcation of Stochastic Cycles in FitzHugh – Nagumo Model]. *Nelineynaya dinamika* [Nonlinear Dynamics], 2013, vol. 9, no. 2, pp. 295–307. (in Russian)

6. Kazarnikov A.V., Revina S.V. [Hopf Bifurcation in Spatially Distributed Rayleigh Equation]. Dep. VINITI, 2013, vol. 83, no. 242-B2013. (in Russian)
7. Yudovich V.I. Investigation of Auto-Oscillations of a Continuous Medium, Occurring at Loss of Stability of a Stationary Mode. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1972, vol. 36, no. 3, pp. 450–459.
8. Revina S.V., Yudovich V.I. Initiation of Self-Oscillations at Loss of Stability of Spatially-Periodic, Three-Dimensional Viscous Flows with Respect to Long-Wave Perturbations. *Fluid Dynamics*, 2001, vol. 36, no. 2, pp. 192–203.
9. Melekhov A.P., Revina S.V. Onset of Self-Oscillations upon the Loss of Stability of Spatially Periodic Two-Dimensional Viscous Fluid Flows Relative to Long-Wave Perturbations. *Fluid Dynamics*, 2008, vol. 43, no. 2, pp. 203–216.
10. Revina S.V. Recurrence Formulas for Long Wavelength Asymptotics in the Problem of Shear Flow Stability. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2013, vol. 53, no. 8, pp. 1207–1220. DOI: 10.1134/S096554251306016X

Received May 22, 2015