УДК 517.956.27 DOI: 10.14529/mmp160401

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ ДВУМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В.К. Андреев

Рассматривается обратная начально-краевая задача для линейного параболического уравнения, которая возникает при математическом моделировании двумерных ползущих движений вязкой жидкости в плоском канале. Неизвестная функция времени входит в правую часть уравнения аддитивно и находится из дополнительного условия интегрального переопределения. Поставленная задача имеет два разных интегральных тождества, которые позволяют получить априорные оценки решения в равномерной метрике и доказать теорему единственности. При некоторых ограничениях на входные данные решение построено в виде ряда по специальному базису. Для этого задача путем дифференцирования по пространственной переменной сводится к прямой неклассической задаче с двумя интегральными условиями вместо обычных краевых. Новая задача решается методом разделения переменных, позволяющим найти неизвестные функции в виде быстро сходящихся рядов. Другой, стандартный, метод решения исходной задачи состоит в сведении ее к нагруженному уравнению и первой начально-краевой задаче для него. В свою очередь, эта задача сведена к одномерному по времени операторному уравнению Вольтерры со специальным ядром. Доказано, что оно имеет решение в виде ряда. Установлены некоторые вспомогательные формулы, полезные при численном решении этого уравнения методом преобразования Лапласа. Установлены достаточные условия, при которых решение с ростом времени выходит на стационарный режим по экспоненциальному закону.

Ключевые слова: обратная задача; априорные оценки; преобразование Лапласа; экспоненциальная устойчивость.

Введение

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$u_t = \nu u_{xx} + f(t) + g(x,t), \quad x \in (-1,1), \quad t \in [0,T]; \tag{0.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (-1,1); \tag{0.2}$$

$$u(-1,t) = u_1(t), \quad u(1,t) = u_2(t), \quad \int\limits_{-1}^{1} u(x,t)\,dx = q(t), \quad t \in [0,T]. \tag{0.3}$$

Здесь функции $g(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$, $q(t)$ и постоянные $\nu > 0$, $T > 0$ считаются заданными, а $u(x,t), f(t)$ – искомыми. Таким образом, задача (0.1) – (0.3) является обратной. Для ее гладких решений необходимо потребовать выполнения условий согласования

$$u_0(-1) = u_1(0), \quad u_0(1) = u_2(0), \quad \int\limits_{-1}^{1} u_0(x)\,dx = q(0).$$

К задаче (0.1) – (0.3) приводит математическое моделирование двумерных ползущих движений вязкой жидкости специального вида в плоском канале [1,2] или вязкой теплопроводной жидкости в модели микроконвекции [3]. При этом функция $f(t)$ есть продольный вдоль канала градиент давления, который ищется вместе с полем скоростей и температур. Функции $u_1(t)$, $u_2(t)$ задают движение стенок канала, а $g(x,t)$ – известное распределение температуры в нем для уравнений микроконвекции. Третье условие (0.3) представляет собой заданный расход жидкости через поперечное сечение слоя. Постоянная ν в уравнении (0.1) есть кинематическая вязкость жидкости. Конечно, возможна и чисто тепловая интерпретация задачи (0.1) – (0.3).

Следует отметить, что обратные задачи для параболических уравнений с интегральным условием переопределения более общего вида, чем (0.3), рассматривались в достаточно большом количестве работ, см., например, [4–8] и другие. Более полный обзор работ имеется в [9]. Как правило, в них доказывается существование и единственность решения, рассматриваются и обосновываются методы построения приближенных решений для случая (а он, по-видимому, представляет наибольшую трудность), когда неизвестная функция $f(t)$ входит в правую часть основного уравнения (системы) мультипликативным образом.

В данной работе неизвестная $f(t)$ входит в правую часть аддитивным слагаемым – это следует из постановок гидродинамических задач, упомянутых выше. Пользуясь спецификой задачи (0.1) – (0.3), ее одномерностью, удается получить достаточные условия сходимости ее решения к стационарному в равномерной метрике (в интегральной метрике подобный результат был получен в [7]), построить решение в виде рядов по специальному базису и тем самым решить уравнение второго рода для $f(t)$, если перейти к задаче для нагруженного уравнения. Кроме того, получена конечная формула преобразования Лапласа ядра интегрального уравнения, полезная при численном нахождении $f(t)$. Остальные гидродинамические характеристики: вертикальная компонента скорости, давление – легко восстанавливаются по функциям $u(x,t)$, $f(t)$ [2].

Произведем замену

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{3}{4}[u_1(t)+u_2(t)-q(t)]x^2 + \frac{1}{2}[u_2(t)-u_1(t)]x + \frac{1}{4}[3q(t)-u_1(t)-u_2(t)], \quad (0.4)$$

тогда функции $v(x,t)$, $f(t)$ суть решение задачи

$$v_t = \nu v_{xx} + f(t) + h(x,t), \quad x \in (-1,1), \quad t \in [0,T]; \quad (0.5)$$

$$v(x,0) = u_0(x) - \frac{3}{4}[u_1(0)+u_2(0)-q(0)]x^2 - \frac{1}{2}[u_2(0)-u_1(0)]x - \frac{1}{4}[3q(0)-u_1(0)-u_2(0)] \equiv v_0(x); \quad (0.6)$$

$$v(\pm 1,t) = 0, \quad \int\limits_{-1}^{1} v(x,t)\,dx = 0, \quad t \in [0,T], \quad (0.7)$$

где

$$h(x,t) = g(x,t) - \frac{3}{4}[u_1'(t)+u_2'(t)-q'(t)]x^2 - \frac{1}{2}[u_2'(t)-u_1'(t)]x - \frac{1}{4}[3q'(t)-u_1'(t)-u_2'(t)] + \frac{3}{2}\nu[u_1(t)+u_2(t)-q(t)] \quad (0.8)$$

и штрих означает дифференцирование по t.

Интегрирование уравнения (0.5) по x от -1 до 1 с использованием второго условия (0.7) дает связь

$$f(t) = \frac{1}{2}\left\{[v_x(-1,t) - v_x(1,t)] - \int\limits_{-1}^{1} h(x,t)\,dx\right\}. \tag{0.9}$$

Итак, если $u_1(t), u_2(t), q(t)$ принадлежат $C^1[0,T]$, $g(x,t) \in C((-1,1)\times[0,T])$, то задача (0.1) – (0.3) эквивалентна задаче (0.5) – (0.7), причем $f(t)$ определяется (по известной $v(x,t)$) равенством (0.9). Ниже и изучается задача определения функций $v(x,t)$ и $f(t)$. Дополнительные требования на входные данные будут сформулированы позднее.

1. Априорные оценки

Лемма 1. *Решение задачи* (0.5) – (0.8) *определяется единственным образом.*

Доказательство. Умножение уравнения (0.5) на $v(x,t)$ и интегрирование с использованием граничных условий (0.7) приводит к равенству

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} v^2(x,t)\,dx\right) + \nu\int\limits_{-1}^{1} v_x^2(x,t)\,dx = \int\limits_{-1}^{1} h(x,t)v(x,t)\,dx. \tag{1.1}$$

Поскольку в нашем случае имеет место неравенство Стеклова

$$\int\limits_{-1}^{1} v^2(x,t)\,dx \leqslant \frac{4}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1} v_x^2(x,t)\,dx,$$

то из (1.1) легко найти оценку

$$\int\limits_{-1}^{1} v^2(x,t)\,dx \leqslant \left[\left(\int\limits_{-1}^{1} v_0^2(x)\,dx\right)^{1/2} + \int\limits_{0}^{t} e^{\pi^2\nu\tau/2}k(\tau)\,d\tau\right]^2 e^{-\pi^2\nu t} \tag{1.2}$$

с функцией

$$k(t) = \left(\int\limits_{-1}^{1} h^2(x,t)\,dx\right)^{1/2}. \tag{1.3}$$

Из неравенства (1.2) и вытекает единственность определения $v(x,t)$, а из (0.9) и $f(t)$. □

Замечание 1. Если интеграл

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{\pi^2\nu\tau/2}k(\tau)\,d\tau \tag{1.4}$$

сходится (это означает, что $k(t) \sim e^{-\pi^2\nu\tau/2}$ при $t \to \infty$), то L_2-норма функции $v(x,t)$ экспоненциально убывает с ростом времени t.

Оказывается, что можно получить оценку $|v(x,t)|$, равномерную по $x \in [-1,1]$ и $t \in [0,T]$. Для этого заметим, что наряду с (1.1) имеет место другое интегральное тождество

$$\int\limits_{-1}^{1} v_t^2\,dx + \frac{\nu}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-1}^{1} v_x^2\,dx = -\int\limits_{-1}^{1} hv_t\,dx,$$

откуда, учитывая обозначение (1.3),

$$\int_{-1}^{1} v_x^2\,dx \leqslant \int_{-1}^{1} v_{0x}^2\,dx + \int_0^t k^2(\tau)\,d\tau. \tag{1.5}$$

В силу неравенств (1.2), (1.5) имеем

$$v^2(x,t) = 2\int_{-1}^{x} v v_x\,dx \leqslant 2\Big(\int_{-1}^{1} v^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int_{-1}^{1} v_x^2\,dx\Big)^{1/2} \leqslant 2\Big[\Big(\int_{-1}^{1} v_0^2(x)\,dx\Big)^{1/2} +$$

$$+\int_0^t e^{\pi^2\nu\tau/4} k(\tau)\,d\tau\Big] \times \Big(\int_{-1}^{1} v_{0x}^2\,dx + \int_0^t k^2(\tau)\,d\tau\Big)^{1/2} e^{-\pi^2\nu t/4} \equiv \bar{k}^2(t) e^{-\pi^2\nu t/4}, \tag{1.6}$$

поэтому

$$|v(x,t)| \leqslant \bar{k}(t) e^{-\pi^2\nu t/8} \tag{1.7}$$

для всех $x \in [-1,1]$ и $t \in [0,T]$. Следовательно, если сходится интеграл (1.4), то функция $\bar{k}(t)$ ограничена для всех $t \in [0,\infty]$ и $|v(x,t)| \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по $x \in [-1,1]$.

Дифференцирование задачи (0.6) – (0.8) по t приводит к аналогичной задаче для $v_t(x,t)$, где нужно $f(t)$ заменить на $f_t(t)$, $h(x,t)$ на $h_t(x,t)$, начальные данные (0.6) на

$$v_t(x,0) = \nu v_{0xx} + \frac{1}{2}\Big\{\nu[v_{0x}(-1) - v_{0x}(1)] - \int_{-1}^{1} h(x,0)\,dx\Big\} \equiv v_{10}(x). \tag{1.8}$$

Здесь использовано уравнение (0.5) и равенство (0.9). Поэтому для $v_t(x,t)$ будут справедливы оценки (1.2), (1.7), где вместо $k(t)$ будет функция

$$k_1(t) = \Big(\int_{-1}^{1} h_t^2(x,t)\,dx\Big)^{1/2}, \tag{1.9}$$

а вместо $v_0(x)$ – функция $v_{10}(x)$ из (1.8). Значит,

$$|v_t(x,t)| \leqslant \bar{k}_1(t) e^{-\pi^2\nu t/8} \tag{1.10}$$

с ограниченной функцией

$$\bar{k}_1(t) = \Big\{2\Big[\Big(\int_{-1}^{1} v_{10}^2(x)\,dx\Big)^{1/2} + \int_0^t e^{\pi^2\nu\tau/4} k_1(\tau)\,d\tau\Big]\Big(\int_{-1}^{1} v_{10x}^2\,dx + \int_0^t k_1^2(\tau)\,d\tau\Big)^{1/2}\Big\}^{1/2}. \tag{1.11}$$

Оценку неизвестной функции $f(t)$ получим следующим образом. Умножим уравнение (0.6) на полином 2-го порядка $x^2 - 1$ и проинтегрируем по промежутку $[-1,1]$, найдем с использованием условий (0.7) представление для $f(t)$, именно

$$f(t) = \frac{3}{4}\Big[\int_{-1}^{1} (x^2-1) h(x,t)\,dx - \int_{-1}^{1} (x^2-1) v_t(x,t)\,dx\Big]. \tag{1.12}$$

Применение неравенств Коши – Буняковского к первому интегралу в (1.12) и (1.10) для второго интеграла дает оценку

$$|f(t)| \leqslant \sqrt{\frac{3}{5}}\, k(t) + \bar{k}_1(t) e^{-\pi^2 \nu t/8} \tag{1.13}$$

с функциями $k(t)$, $\bar{k}_1(t)$ из (1.3) и (1.11) соответственно. В выражении для $\bar{k}_1(t)$ функция $k_1(t)$ определяется равенством (1.9).

Замечание 2. Если дополнительно к (1.4) сходится интеграл

$$\int\limits_0^{\infty} e^{\pi^2 \nu \tau/4} k_1(\tau)\, d\tau, \tag{1.14}$$

то $\bar{k}_1(t)$ ограничена для всех $t \geqslant 0$ и $|f(t)| \to 0$ при $t \to \infty$ по экспоненциальному закону. Кроме того, из (0.5) и оценок (1.7), (1.10) и (1.13) аналогичный результат имеет место и для $|v_{xx}|$.

Нами доказана

Теорема 1. *Пусть* $v_0(x) \in C[-1,1] \bigcap C^2(-1,1)$, $h(x,t)$, $h_t(x,t) \in C((-1,1) \times [0,T])$, $f_t(t) \in C(0,T)$, *и решение задачи* (0.5) – (0.7) *существует, тогда оно является единственным, и выполнены оценки* (1.8), (1.10), *равномерные для всех* $x \in [-1,1]$ *и* $t \in [0,T]$. *Если интегралы* (1.4), (1.14) *сходятся, то функции* $v(x,t)$, $f(t)$ *стремятся к нулю с ростом времени по экспоненциальному закону.*

В следующем пункте устанавливается существование решения.

2. Построение решения в виде рядов по специальному базису

Подстановка (0.9) в (0.5) приводит к нагруженному уравнению на $v(x,t)$ и первой начально-краевой задаче для него. Однако мы пока этого делать не будем, а поступим следующим образом. Поскольку в (0.9) входят неизвестные производные $v_x(\pm 1, t)$, продифференцируем уравнение (0.5) по x и введем новую неизвестную функцию

$$w(x,t) = v_x(x,t). \tag{2.1}$$

Она – решение начально-краевой задачи

$$w_t = \nu w_{xx} + h_x(x,t), \quad x \in (-1,1), \quad t \in [0,T]; \tag{2.2}$$

$$w(x,0) = v_{0x}(x) \equiv w_0(x), \quad x \in (-1,1); \tag{2.3}$$

$$\int\limits_{-1}^{1} w(x,t)\, dx = 0, \quad \int\limits_{-1}^{1} x w(x,t)\, dx = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{2.4}$$

Первое из условий (2.4) следует из (2.1), так как

$$v(x,t) = \int\limits_{-1}^{x} w(x,t)\, dx, \tag{2.5}$$

а второе – из интегрирования по частям второго равенства (0.7).

Неклассическая начально-краевая задача (2.2) – (2.4) решается методом разделения переменных, именно

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \sin \mu_k x, \tag{2.6}$$

$$w_k(t) = a_k e^{-\nu \mu_k^2 t} + \int_0^t b_k(\tau) e^{-\nu \mu_k^2 (t-\tau)} d\tau, \tag{2.7}$$

$$a_k = \frac{1+\mu_k^2}{\mu_k^2} \int_{-1}^{1} w_0(x) \sin \mu_k x \, dx, \quad b_k(t) = \frac{1+\mu_k^2}{\mu_k^2} \int_{-1}^{1} h_x(x,t) \sin \mu_k x \, dx, \tag{2.8}$$

μ_k – положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \mu = \mu$, причем [10] $\mu_k = \xi - \xi^{-1} - 2\xi^{-3}/3 + O(\xi^{-5})$, $\xi = \pi(k+1/2)$. Легко доказывается (см., например, [11, с. 381], [12]) что ряд (2.6) представляет собой классическое решение задачи (2.2) – (2.4) при $t \geqslant \varepsilon > 0$ и $w_0(x) \in C[-1,1]$, $h_x \in C([-1,1] \times [0,T])$.

Замечание 3. Система функций $\sin \mu_k x$ является ортогональной в L_2 на отрезке [-1,1] с нормой $\mu_k(1+\mu_k^2)^{-1/2}$ и образует там базис. Эти функции есть решения задачи на собственные значения

$$X_{xx} + \lambda X = 0, \quad x \in (-1,1); \quad \int_{-1}^{1} X(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x X(x)\, dx = 0$$

с $\lambda = \lambda_k = \mu_k^2$.

Из (0.9) и (2.6), (2.7) находим

$$f(t) = -\nu \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \sin \mu_k - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} h(x,t)\, dx, \tag{2.9}$$

а из (2.5) восстанавливаем $v(x,t)$:

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} w_k(t)(\cos \mu_k - \cos \mu_k x). \tag{2.10}$$

Искомая функция $u(x,t)$ определяется из замены (0.4). Формулы (2.9), (2.10) и дают классическое решение задачи (2.2) – (2.4) при указанных выше условиях на $w_0(x)$, $h(x,t)$.

Замечание 4. Легко видеть, что $f(t)$ в задаче (0.5) – (0.7) определяется только по четной части решения $v(x,t)$.

Действительно, пусть $h(x,t) = h_{\text{ч}}(x,t) + h_{\text{н}}(x,t)$, $v_0(x) = v_{\text{ч}0}(x) + v_{\text{н}0}(x)$ и $v(x,t) = v_{\text{ч}}(x,t) + v_{\text{н}}(x,t)$. Тогда для $v_{\text{н}}(x,t)$ получим классическую первую начально-краевую задачу для параболического уравнения с правой частью $h_{\text{н}}(x,t)$ и начальным значением $v_{\text{н}0}(x)$. Для четной части будет задача (0.5) – (0.7) с правой частью $f(t) + h_{\text{ч}}(x,t)$, начальным значением $v_{\text{ч}0}(x)$, а интеграл в (0.7) берется по промежутку [0,1]. Формулы (0.9), (2.9) упрощаются,

$$f(t) = -\nu v_{\text{ч}x}(1,t) - \int_0^1 h_{\text{ч}}(x,t)\, dx = -\nu \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \sin \mu_k - \int_0^1 h_{\text{ч}}(x,t)\, dx. \tag{2.11}$$

Далее предполагается, что в задаче (0.5) – (0.7) $v = v_ч$, $h = h_ч$, $v_0 = v_{ч0}$, индекс "ч" всюду ниже опускается.

Будем искать теперь решение первой краевой задачи для нагруженного уравнения (0.5), где $f(t)$ определена первой формулой (2.11), в виде ряда Фурье

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t) \cos \xi_n x, \quad \xi_n = \frac{\pi}{2}(2n+1), \tag{2.12}$$

при этом $v(\pm 1, t) = 0$, второе условие (0.7) использовано при выводе равенства (0.9). Представляя $h(x,t)$ и $v_0(x)$ в виде аналогичных рядов с коэффициентами

$$h_n(t) = 2\int_0^1 h(x,t)\cos \xi_n x\, dx, \quad v_{n0} = 2\int_0^1 v_0(x)\cos \xi_n x\, dx$$

и пользуясь ортонормальностью базиса $\cos \xi_n x$, из уравнения (0.5) находим для коэффициентов ряда (2.12)

$$v_n(t) = v_{n0} e^{-\nu \xi_n^2 t} + \int_0^t \left[(-1)^{n+1} \frac{2}{\xi_n} f(\tau) + h_n(\tau) \right] e^{-\nu \xi_n^2 (t-\tau)}\, d\tau. \tag{2.13}$$

Из (2.11) получим

$$f(t) = \nu \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \xi_n v_n(t) - \int_0^1 h(x,t)\, dx, \tag{2.14}$$

$$f(0) = \nu \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \xi_n v_n(0) - \int_0^1 h(x,0)\, dx.$$

Подстановка $v_n(t)$ из (2.13) в (2.14) приводит к интегральному уравнению второго рода (уравнение Вольтерры) на $f(t)$:

$$f(t) = -2\nu \int_0^t f(\tau) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\nu \xi_n^2 (t-\tau)}\, d\tau + m(t), \tag{2.15}$$

где

$$m(t) = -\int_0^1 h(x,t)\, dx + \nu \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \xi_n \left[v_{n0} e^{-\nu \xi_n^2 t} + \int_0^t h_n(\tau) e^{-\nu \xi_n^2 (t-\tau)}\, d\tau \right], \tag{2.16}$$

$m(0) = f(0)$. Ядро интегрального уравнения есть сумма ряда Дирихле

$$K(y) = -2\nu \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\nu \xi_n^2 y}, \quad y = t - \tau. \tag{2.17}$$

Лемма 2. *Функция $f(t)$, определяемая вторым равенством* (2.11), *является решением интегрального уравнения* (2.15).

Доказательство. Проведем его для $w_0(x) = A \sin \mu_k x$, где $A = \mathrm{const}$, k – фиксированное, $h(x,t) = 0$. В общем случае доказательство проводится аналогичными выкладками. Из (2.11) $f(t) = -\nu A e^{-\nu \mu_k^2 t} \sin \mu_k$, а из (2.10) – $v(x,t) = \mu_k^{-1} A e^{-\nu \mu_k^2 t} (\cos \mu_k - \cos \mu_k x)$.

Значит, коэффициенты ряда Фурье начальной функции $v_0(x) = \mu_k^{-1}(\cos\mu_k - \cos\mu_k x)$ по системе $\cos\xi_n x$ имеют вид

$$v_{n0} = \frac{2A(-1)^n \sin\mu_k}{\xi_n(\mu_k^2 - \xi_n^2)}, \quad \xi_n = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{2.18}$$

Функция $m(t)$ из (2.16) с помощью формулы (2.18) перепишется так:

$$m(t) = 2\nu A \sin\mu_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\nu\xi_n^2 t}}{\mu_k^2 - \xi_n^2}. \tag{2.19}$$

Вычислим первое слагаемое правой части уравнения (2.15):

$$2\nu^2 A \sin\mu_k \int\limits_0^t e^{-\nu\mu_k^2\tau} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\nu\xi_n^2(t-\tau)}\, d\tau =$$

$$= 2\nu A \sin\mu_k \left[-e^{-\nu\mu_k^2 t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\xi_n^2 - \mu_k^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\nu\xi_n^2 t}}{\mu_k^2 - \xi_n^2}\right]. \tag{2.20}$$

Сумма первого ряда в квадратных скобках равна [13, с. 688]

$$\frac{1}{\pi\bar{\mu}_k}\ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}\,\bar{\mu}_k\right), \quad \bar{\mu}_k = \frac{2}{\pi}\,\mu_k.$$

Поскольку $\mathrm{tg}\,\mu_k = \mu_k$, эта сумма есть $1/2$. Значит, правая часть (2.20) с учетом (2.19) и есть $f(t) - m(t)$, что и доказывает лемму. □

Уравнение (2.15) можно решить и методом преобразования Лапласа, продолжив функцию $h(x,t)$ нулем вне отрезка $[0,T]$, считая, что при $t = T$ она имеет разрыв 1-го рода [14].

Пусть

$$\hat{u}(p) = \int\limits_0^{\infty} e^{-pt} u(t)\, dt$$

есть преобразование Лапласа $u(t)$. Тогда в изображениях уравнение (2.15) имеет решение [15, 16]

$$\hat{f}(p) = \hat{m}(p) + \frac{\hat{K}(p)\hat{m}(p)}{1 - \hat{K}(p)},$$

откуда

$$f(t) = m(t) + \int\limits_0^t k(t-\tau) m(\tau)\, d\tau, \tag{2.21}$$

где $k(t)$ есть оригинал $\hat{K}(p)(1 - \hat{K}(p))^{-1}$. В нашем случае [14] из (2.17)

$$\frac{\hat{K}(p)}{1 - \hat{K}(p)} = -2\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p + \nu\xi_n^2} \left[1 + 2\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p + \nu\xi_n^2}\right]^{-1} = \hat{k}(p).$$

Поскольку [13]

$$2\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p + \nu\xi_n^2} = \sqrt{\frac{\nu}{p}}\ \mathrm{th}\sqrt{\frac{p}{\nu}},$$

получим

$$\hat{k}(p) = -\frac{\operatorname{th}\sqrt{p/\nu}}{\sqrt{p/\nu} + \operatorname{th}\sqrt{p/\nu}}. \tag{2.22}$$

Формула (2.22) может быть полезна при численном решении уравнения (2.15).

Замечание 5. Используя равенства (2.16), (2.22), можно доказать совпадение выражений для $f(t)$ (2.11) и (2.21).

3. О поведении решения при $t \to \infty$

Сначала найдем стационарное решение. В этом случае в задаче (0.6) – (0.8) начальные данные (0.7) не ставятся; функция h^s не зависит от времени t, и решение $v^s(x)$, f^s определяется по формулам

$$v^s(x) = C_1 x + C_2 - \frac{f^s}{2\nu} x^2 - \frac{1}{\nu} \int\limits_{-1}^{x} (x-z) h^s(z)\, dz,$$

$$f^s = 3 \int\limits_0^1 z^2 h^s(z)\, dz, \quad C_1 = \frac{1}{\nu} \int\limits_0^1 h^s(z)\, dz, \tag{3.1}$$

$$C_2 = \frac{1}{\nu} \int\limits_0^1 \left(1 + \frac{3}{2} z^2\right) h^s(z)\, dz.$$

Исходное решение $u^s(x)$ найдется из замены (0.4)

$$u^s(x) = v^s(x) + \frac{3}{4}(u_1^s + u_2^s - q^s)x^2 + \frac{1}{2}(u_2^s - u_1^s)x + \frac{1}{4}(3q^s - u_1^s - u_2^s). \tag{3.2}$$

В формулах (3.1) функция $h^s(z)$ считается четной согласно замечанию 2.

Если в задаче (0.6) – (0.8) функция $h(x,t)$ задана для всех $t \geqslant 0$, то возникает вопрос об асимптотическом поведении функций $v(x,t)$ и $f(t)$ при $t \to \infty$. В частности, при каких условиях на $h(x,t)$ решение задачи (0.6) – (0.8) с ростом времени выходит на стационарный режим (3.1)? Для ответа на этот вопрос произведем замену

$$V(x,t) = v^s(x) - v(x,t), \quad F(t) = f^s - f(t), \tag{3.3}$$

тогда $V(x,t)$ и $F(t)$ являются решением задачи (0.6) – (0.8) с заменой $h(x,t)$ на

$$H(x,t) = h^s(x) - h(x,t) \tag{3.4}$$

и начальных данных (0.7) на

$$V_0(x) = v^s(x) - v_0(x). \tag{3.5}$$

Имеет место

Теорема 2. *При условии сходимости интегралов*

$$\int\limits_0^\infty K(\tau) e^{\pi^2 \nu \tau / 4}\, d\tau, \quad \int\limits_0^\infty K_1(\tau) e^{\pi^2 \nu \tau / 4}\, d\tau, \tag{3.6}$$

где

$$K(t) = \left(\int\limits_{-1}^{1} H^2(x,t)\,dx \right)^{1/2}, \quad K_1(t) = \left(\int\limits_{-1}^{1} H_t^2(x,t)\,dx \right)^{1/2},$$

решение задачи (0.6) – (0.8) *с ростом времени* t *стремится к стационарному режиму* (3.1) *по экспоненциальному закону.*

Доказательство. Действительно, в этом случае для $V(x,t)$ из (3.3) справедливы оценки (1.7), (1.10), а для $F(t)$ – оценка (1.13) с указанными выше заменами $h(x,t)$ на $H(x,t)$ из (3.4) и $v_0(x)$ на $V_0(x)$ из (3.5). □

Замечание 6. В условиях теоремы 3 имеет место экспоненциальная устойчивость стационарного решения (3.1). В терминах исходных данных задачи (0.1) – (0.3) для ограниченности интегралов (3.6) достаточно потребовать сходимости интегралов

$$\int\limits_0^\infty \left\{ \int\limits_{-1}^{1} [g(x,\tau) - g^s(x)]^2 dx \right\} e^{\pi^2 \nu\tau/4}\,d\tau, \quad \int\limits_0^\infty \int\limits_{-1}^{1} g_\tau^2(x,\tau)\,dx\, e^{\pi^2\nu\tau/4}\,d\tau;$$

$$\int\limits_0^\infty [u_j(\tau) - u_j^s]^2 e^{\pi^2\nu\tau/4}\,d\tau, \quad j = 1,2, \quad \int\limits_0^\infty [u_j^{(n)}(\tau)]^2 e^{\pi^2\nu\tau/4}\,d\tau, \quad n = 0,1,2,$$

$$\int\limits_0^\infty [q(\tau) - q^s]^2 e^{\pi^2\nu\tau/4}\,d\tau, \quad \int\limits_0^\infty [q^{(n)}(\tau)]^2 e^{\pi^2\nu\tau/4}\,d\tau, \quad n = 0,1,2.$$

Литература

1. Andreev, V.K. Unsteady 2D Motions a Viscous Fluid Described by Partially Invariant Solutions to the Navier – Stokes Equations / V.K. Andreev // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2015. – V. 8, № 2. – P. 140–147.
2. Andreev, V.K. On an Inverse Problem for Two-Dimensional Navier – Stokes Equation / V.K. Andreev // Abstracts of the International Conference «Differential Equations and Mathematical Modeling». – Ulan-Ude, 2015. – P. 44–45.
3. Mathematical Models of Convection / V.K. Andreev, Yu.A. Gaponenko, O.N. Goncharova et al. – Berlin: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2012. – 417 p. DOI: 10.1515/9783110258592
4. Prilepko, A.I. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics / A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin. – N.-Y.: Marcel Dekker, 1999.
5. Cannot, J.R. Determination of a Parameter $p(t)$ in Some Quasi-Linear Parabolic Differential Equations / J.R. Cannot, Y. Lin // Inverse Problems. – 1988. – V. 4. – P. 35–45.
6. Васин, И.А. О некоторых обратных задачах динамики вязкой несжимаемой жидкости в случае интегрального переопределения / И.А. Васин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1992. – Т. 32, вып. 7. – С. 1071–1079.
7. Васин, И.А. Об асимптотическом поведении решений обратных задач для параболических уравнений / И.А. Васин, В.Л. Камынин // Сибирский математический журнал. – 1997. – Т. 38, № 4. – С. 750–766.
8. Кожанов, А.И. Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени / А.И. Кожанов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2005. – Т. 45, № 12. – С. 2168–2184.

9. Пятков, С.Г. О некоторых классах линейных обратных задач для параболических систем уравнений / С.Г. Пятков, Е.И. Сафонов // Сибирские электронные математические известия. – 2014. – Т. 11. – С. 777–799.
10. Олвер, Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции / Ф. Олвер. – М.: Наука, 1978. – 375 с.
11. Михлин, С.Г. Линейные уравнения в частных производных / С.Г. Михлин. – М.: Высшая школа, 1977. – 431 с.
12. Ильин, В.А. О разрешимости смешанных задач для гиперболических и параболических уравнений / В.А. Ильин // Успехи математических наук. – 1960. – Т. 15, вып. 2 (92). – С. 97–154.
13. Прудников, А.П. Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
14. Лаврентьев, М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
15. Дёч, Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа / Г. Дёч. – М.: Наука, 1965. – 288 с.
16. Полянин, А.Д. Справочник по интегральным уравнениям / А.Д. Полянин, А.В. Манжиров. – М.: Факториал Пресс, 2000. – 384 с.

Виктор Константинович Андреев, доктор физико-математических наук, профессор, зав. отделом «Дифференциальные уравнения механики», Институт вычислительного моделирования СО РАН – обособленное подразделение ФИЦ КНЦ СО РАН (г. Красноярск, Российская Федерация), andr@icm.krasn.ru.

Поступила в редакцию 28 июня 2016 г.

MSC 35K20 **DOI: 10.14529/mmp160401**

ON THE SOLUTION OF AN INVERSE PROBLEM SIMULATING TWO-DIMENSIONAL MOTION OF A VISCOUS FLUID

V.K. Andreev, Institute Computational Modelling SB RAS, Krasnoyarsk, Russian Federation, andr@icm.krasn.ru

An inverse initial boundary value problem for a linear parabolic equation that arises as a result of mathematical modelling of 2D creeping motion of viscous liquid in a flat channel is considered. The unknown function of time is added in the right part of equation and can be found from additional condition of integral overdetermination. This problem has two different integral identities, permitting to obtain a priori estimates of solutions in uniform metric and to proof the uniqueness theorem. Under some restrictions on input data the solution is constructed as a series in the special basis. For this purpose the problem is reduced by differentiation with respect to the spatial variable to a direct non-classic problem with two integral conditions instead of ordinary ones. The new problem is solved by separation of variables, which allows one to find the unknown functions in the form of rapidly converging series. Another method for solving the initial problem is to reduce the problem to the loaded equation and to state the first initial boundary value problem for this equation. In its turn, this problem is reduced to one-dimensional in time Volterra operator equation with a special kernel. It is proved that it has a series solution. Some auxiliary formulas which are useful for the numerical solution of this equation by the Laplace transform are obtained. Sufficient conditions under which the solution with increasing time converges to steady regime by exponential law are established.

Keywords: inverse problem; a priori assessment; Laplace transform; exponential stability.

References

1. Andreev V.K. Unsteady 2D Motions a Viscous Fluid Described by Partially Invariant Solutions to the Navier – Stokes Equations. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2015, vol. 8, no. 2, pp. 140–147.
2. Andreev V.K. On an Inverse problem for Two-Dimensional Navier – Stokes Equation. *Abstracts of the International Conference "Differential Equations and Mathematical Modeling"*. Ulan-Ude, 2015, pp. 44–45.
3. Andreev V.K., Gaponenko Yu.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V. *Mathematical Models of Convection*. Berlin, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2012. 417 p. DOI: 10.1515/9783110258592
4. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*. N.Y., Marcel Dekker, 1999.
5. Cannot J.R., Lin Y. Determination of a Parameter $p(t)$ in Some Quasi-Linear Parabolic Differential Equations. *Inverse Problems*, 1988, vol. 4, pp. 35–45. DOI: 10.1088/0266-5611/4/1/006
6. Vasin I.A. On Some Inverse Problems of the Dynamics of a Viscous Incompressible Fluid in the Case of Integral Overdetermination. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1992, vol. 32, no. 7, pp. 955–963.
7. Vasin I.A., Kamynin V.L. On the Asymptotic Behavior of the Solutions of Inverse Problems for Parabolic Equations. *Siberian Mathematical Journal*, 1997, vol. 38, no. 4, pp. 647–662. DOI: 10.1007/BF02674572
8. Kozhanov A.I. Parabolic Equations with an Unknown Time-Dependent Coefficient. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2005, vol. 45, no. 12, pp. 2085–2101.
9. Pyatkov S.G., Safonov E.I. On Some Classes of Linear Inverse Problems for Parabolic Equations. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2014, vol. 11, pp. 777–799. (in Russian)
10. Olver F. *Vvedenie v asimptoticheskie metody i spetsial'nye funktsii* [Introduction to Asymptotics and Special Functions]. Moscow, Nauka, 1978. 375 p.
11. Michlin S.G. *Lineynye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Linear Partial Differential Equations]. Moscow, Vysshaia shkola, 1977. 431 p.
12. Ilyin V.A. [On the Solubility of Mixed Problems for Hyperbolic and Parabolic Equations]. *Russian Mathematical Surveys*, 1960, vol. 15, issue 2, pp. 97–154. (in Russian)
13. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. *Integraly i ryady* [Integrals and Series]. Moscow, Nauka, 1981. 800 p.
14. Lavrentyev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Methods of Theory of Complex Variable Functions]. Moscow, Nauka, 1973. 736 p.
15. Doetsch G. *Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniyu preobrazovaniya Laplasa* [Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation]. Moscow, Nauka, 1965. 288 p.
16. Polyanin A.D., Manzhirov A.V. *Spravochnik po integral'nym uravneniyam* [Handbook of Integral Equations]. Moscow, Factorial Press, 2000. 384 p.

Received June 28, 2016