Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет»
(национальный исследовательский университет)
Архитектурно-строительный институт
Строительные конструкции и сооружения

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
к.т.н., доцент
_________________И.С.Дербенцев
_____________________________ 2020 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой, к.т.н.
доцент
________________М.В.Мишнев
_____________________ 2020 г.

Тема Анализ методов расчета надежности

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К КВАЛИФИКАЦИОННОЙ НАУЧНОЙ РАБОТЕ МАГИСТРА
ЮУрГУ–08.04.01.2020.078. ПЗ КНР

Руководитель
Ивашенко Ю.А.
_____________________ 2020 г.

Автор КНР
студент группы
Абылкадирова И.В.____________
_________________________ 2020 г.

Нормоконтролер
Ивашенко Ю.А.________________
_________________________ 2020 г.

Челябинск 2020

АННОТАЦИЯ

Абылкадирова И.В. Анализ методов расчета надежности. – Челябинск: ЮУрГУ, АС; 2020 92 с. 25 ил., библиогр. список – 30 наим.

В данной квалификационной научной работе выполнен анализ методов надежности строительных конструкций.

В данной квалификационной научной работе подробно описаны: обзор состояния вопроса, методов расчета надежности, описана методика исследования анализа методов расчета надежности, выполнено теоретическое исследование методов оценки надежности строительных конструкций и сделаны соответствующие выводы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Расчет строительных конструкций является одним из главных этапов проектирования зданий и сооружений, и по его окончанию, любая строительная конструкция должна быть надежной (безопасной), долговечной, стойкой к внешнем воздействиям, достаточной сопротивляемости статическим и динамическим нагрузкам.

С помощью методов строительной механики, теории упругости, теории пластичности и мн. другое можно определить значения таких величин, как напряжения, деформации, перемещения в конструкции, необходимых для расчета.

Но опыт строительства показывает, что любой анализ долговечности, безопасности конструкций и сооружений на основе вышеперечисленных параметров не всегда оказывается достаточно точным и верным. Ведь для одинаковых сооружений, возводимых и действующих в аналогичных условиях, выход из строя всего сооружения или его отдельных конструктивных элементов происходит в разные случайные моменты времени и зависит от ряда факторов случайной природы, т. е нельзя точно указать срок службы строительной конструкции, насколько и как долго она будет безопасной, а можно лишь оценить ту вероятность, с которой она будет эксплуатироваться в течении времени не меньшего, чем заданный срок службы.

На основании этого, современные нормы проектирования строительных конструкций должны учитывать вероятностный характер нагрузок и несущей способности конструкций. А расчет строительных конструкций, который отражает их реальное поведение в эксплуатации, должен базироваться на теории безопасности и надежности, основанный на вероятностных методах, которые позволят дать объективную оценку конструкции о ее пригодности к нормальной эксплуатации [2].

В связи с этим вопросы, исследуемые в данном научном дипломном проекте, направленные на исследования методов обеспечения надежности строительных элементов и конструкций с помощью вероятностных подходов являются актуальными для современного строительства.

Целью квалификационной научной работы является определение надежности строительной конструкции – железобетонной колонны с помощью существующих вероятностных методов ее расчета, сравнение полученных результатов и выбора наиболее достоверного метода по ее вычислению.

Поэтому основными задачами, которые решались в квалификационной научной работе, были следующие:

1. Ознакомление с понятием надежности, безопасности строительных конструкций;

2. Изучение существующих методов определения надежности без учета вероятностного характера переменных;

3. Изучение существующих методов определения надежности с учетом вероятностного характера переменных;

4. Выполнение вероятностных методов расчетов с целью исследования надежности, безопасности строительных конструкций;

5. Оценка достоверности вероятностных методов расчета надежности, безопасности строительных конструкций.

1 ОБЗОР СОСТОЯНИЯ ВОПРОСА, МЕТОДОВ РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ

1.1 Понятие надежности, безопасности строительных конструкций и ее элементов

Современный уровень научно-технического прогресса в области строительства позволяет сегодня создавать здания и сооружения, которые обладают высокой надежностью. Процесс создания сооружения включает в себя разнообразные операции, которые обеспечивают необходимый для них уровень надежности.

Если в процессе создания здания формируется уровень надежности и безопасности строительной конструкции, объекта в целом, то во время эксплуатации этот уровень реализуется, т.е. проявляется способность объекта выполнять свои функции в течении установленного срока службы. Такая способность строительной конструкции называется – надежностью. Однако для строительных конструкций понятие «надежность» в более узком понимании может трактоваться как возможность конструкции работать в течении определенного срока без «отказа» [3]. Под «отказом», подразумевается состояния объекта, при которых он не может выполнять свои функции. Также понятие отказа близко по смыслу к понятию предельного состояния. К предельным состояниям 1-й группы строительных конструкций согласно [7] относятся: общая потеря устойчивости формы, потеря устойчивости положения, любое разрушение, переход в изменяемую систему, качественное изменение конфигурации; состояния, при которых возникает необходимость прекращения эксплуатации в результате текучести материала, сдвига в соединениях, ползучести или чрезмерного раскрытия трещин. Предельные состояния 2-й группы – недопустимые деформации конструкций в результате прогиба, поворота или осадок, характеризуемых разностью вертикальных перемещений узлов, отнесенных к расстоянию между ними, креном сооружения в целом, относительным прогибом или выгибом, кривизной элемента, относительным углом закручивания, горизонтальным или вертикальным смещением элемента или сооружения в целом, углом перекоса или поворота. К предельным состояниям 2-й группы относятся также недопустимые колебания конструкции, изменение положения, образование или раскрытие трещин.

На основании вышесказанного, можно сделать вывод о том, что мерой надежности, а значит и безопасности строительной конструкции (объекта) является вероятность безотказной работы за заданный срок службы. Вероятностный подход обусловлен тем, что поведение любой строительной конструкции описывается факторами случайной природы, а все прочностные, геометрические и деформационные характеристики конструкции, а также все воздействия на нее представляют собой случайные величины или случайные процессы [3].

Таким образом, целью проектирования является создание строительной конструкции с необходимым целесообразным уровнем надежности, безопасности, т.е. с определенным заданным риском отказа, учитывая взаимодействие ряда случайных факторов.

Впервые учет статистической природы параметров, относящихся к строительным конструкциям, был показан в 1926 году, на примере коэффициента запаса прочности советским ученым М.Майером. В 1927 году советский ученый Н.Ф.Хоциалов предложил вести проектирование конструкций также учитывая вероятности «дефектных уклонений», уже закладывая саму идею вероятностной оптимизации. Позже совместно, М.Майер и Н.Ф.Хоциалов, выдвинули идею о применении статистических методов к расчетам на прочность, тем самым подвергая критике концепцию допускаемых напряжений.

Выдающаяся роль в деле внедрения статистических методов в строительную механику принадлежит Н.С.Стрелецкому, который начиная с 1935г. опубликовал ряд работ на эту тему [5]. В его книге [6] дано систематическое изложение статистической концепции надежности сооружений.

Определение вероятности разрушения конструкции может быть сведено к вычислению так называемой характеристики безопасности, т.е. отношению средне ожидаемого значения разности случайных величин, которое представляет собой обобщенную прочность конструкций и обобщенную нагрузку к среднеквадратичному отклонению этой разности. Принципиальные положения такого подхода были разработаны А.Р.Ржаницыным[3]. В дальнейшем они получили развитие в работах Б.И.Беляева, Б.И.Снаркиса. Из зарубежных исследований следует отметить работы А.М.Фрейденталя, Хасофера и Линда [3].

Использование точных методов состоит в представлении параметров конструкций и внешних воздействий в виде случайных функций. Для развития данного подхода важное значение имеют труды советского ученого В.В.Болотина, в которых впервые применена теория случайных процессов к решению многих задач надежности и обобщены вопросы теории надежности строительных конструкций. Аналогичные исследования за рубежом проводились С.А.Корнеллом [3].

Существенный вклад в совершенствование методов расчета надежности конструкций и обоснование процедур нормирования расчетных параметров внесли исследования А.Я.Дривинга, Б.И.Снаркиса, С.И.Тимашева, В.П.Чиркова, А.П. Кудзиса, А.С.Лычева и др.

1.2 Основные положения теории вероятностей

Как говорилось ранее, расчет безопасности зависит от ряда случайных факторов и носит вероятностный характер. Следовательно, для решения задач теории надежности строительных конструкций необходимо ознакомиться с основными положениями теории вероятностей.

Теория вероятностей – это математическая наука, позволяющая по вероятностям одних случайных событий находить вероятности других, связанных каким-либо образом с первыми. В ее основе лежит три основных понятия: случайное событие, случайная величина и случайная функция. Под случайным событием обычно понимают качественный или количественный результат опыта, осуществляемого при определенных условиях. Это событие обладает некоторой степенью возможности осуществления. Для сравнения различных событий по степени возможности их осуществления необходимо ввести численную меру указанной степени возможности, которая тем выше, чем более возможно событие. Эту численную меру принято называть вероятностью события [9].

В классическом понимании, вероятность события А - отношение числа благоприятных этому событию случаев, к общему числу всех возможных случаев:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (1)$$

Чаще всего, формула (1) носит название частота события А.

Важной теоремой, используемой при расчете вероятностей, является теорема сложения. Она формируется следующим образом: вероятность наступления в некотором опыте какого-либо одного (безразлично какого именно) из результатов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равна сумме вероятностей этих результатов, если каждые два из них несовместимы между собой:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \quad (2)$$

События считаются *несовместными* в испытании, если никакие два из них не могут появиться вместе и *совместными*, если при данном испытании могут произойти два эти события. Если же в формуле (2) рассматриваются противоположные события, т.е. такие два события A_1 и A_2, из которых только одно обязательно наступит A_1(например, попадание найденных из опыта численных значений ширины раскрытия трещин в заданный интервал) и A_2(не попадание значений ширины раскрытия трещин в заданный интервал), то событие A_1 либо A_2 есть событие достоверное, тогда

$$P(A_1) + P(A_2) = 1, \quad (3)$$

и, следовательно, сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице [3].

В реальных условиях события могут быть зависимыми одни от других или независимыми. Событие A_1 является независимым от события A_2, если вероятность события A_1 не зависит от того, произошло событие A_2 или нет. В противном случае события будут зависимыми.

Согласно [10] расчет по предельным состояниям проводиться с учетом наиболее неблагоприятных вариантов распределения нагрузок, воздействий и сочетаний, следовательно, для него будет не менее важна теорема умножения вероятностей, которая сможет учесть это сочетание нагрузок. Правило умножения вероятностей заключается в том, что вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности первого события A_1 на условную вероятность второго события $P(A_2/A_1)$, вычисленную в предположении, что первое событие состоялось:

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1). \quad (4)$$

Если события A_1 и A_2 независимы, то

$$P(A_2/A_1) = P(A_2). \quad (5)$$

И, следовательно, формула (4) примет вид:

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2). \quad (6)$$

Следствием правил сложения и умножения является формула полной вероятности. Пусть имеется n несовместных событий $A_1, A_2, \ldots A_n$ с вероятностями $P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_n)$ и пусть $P(B/A_1), P(B/A_2), \ldots, P(B/A_n)$ – условные вероятности осуществления события B с одним n событий $A_1, A_2, \ldots A_n$. Тогда вероятность осуществления события B выразится формулой:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P\left(\frac{B}{A_i}\right) \cdot P(A_i). \quad (7)$$

Пусть теперь требуется найти вероятность события A_i, если известно, что В произошло. С учетом теоремы умножения и формулы полной вероятности можно записать:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)\cdot P(\frac{B}{A_i})}{\sum_{j=1}^{n} P(\frac{B}{A_i})\cdot P(A_i)}. \qquad (8)$$

Формула (8) носит название формулы Байеса [3].

Случайная величина – это величина, которая поставлена в соответствие исходу некоторого испытания. Они могут быть дискретного и непрерывного типа. Примером дискретной случайной величины может служить число разрушившихся стержней в стержневой системе, состоящей из 7 стержней (возможные значения 0,1,2,3,4,5,6,7), число нагружений образца до разрушения при малоцикловой усталости. Примером непрерывной случайной величины является срок службы конструкции, значения предела текучести материала.

Понятие случайной величины в определенном смысле является обобщением понятия случайного события, так как каждому случайному событию можно поставить в соответствие случайную величину, принимающую значение 1, когда это событие имеет место, и 0 – в противоположном случае. Следовательно, все результаты, которые могут быть получены в схеме случайных событий, также могут быть получены и в схеме случайных величин. Однако понятие случайной случайной величины более содержательно, чем понятие случайного события [8].

Случайными величинами, с которыми приходится иметь дело при расчете строительных конструкций, могут быть значения действующих нагрузок, значения величин, характеризующих поведение материалов, а также значения величин, определяющих геометрию конструкции.

Совокупность возможных значений случайной величины с вероятностями, отнесенными к этим значениям, образуют закон распределения случайной величины. В этом смысле каждая случайная величина подчинена определенному закону распределения, форма задания которого может быть различной. Простейшей формой задания такого закона для дискретных случайных величин является таблица, в которой перечислены в порядке возрастания возможные значения случайной величины х и соответствующие им вероятности их появлений Р (см. таблицу 1) [3].

Таблица 1 – Ряд распределения дискретных величин

x_i	x_1	x_2	..	..	..	..	x_n
P_i	P_1	P_2	..	..	..	..	P_n

На основе ряда распределения может быть построен многоугольник распределения, представляющий собой одну из форм закона распределения.

Для непрерывной случайной величины невозможно построить ни ряд, ни многоугольник распределения, так как эта величина имеет бесконечное множество значений, перечисление которых осуществить нельзя [3]. Но, если рассмотреть непрерывную случайную величину X, которая может принимать любое значение на заданном интервале, конечном или бесконечном, то для нее функцию распределения, также называемую интегральной или интегральным законом распределения, можно представить графически. При решении практических задач бывает необходимо определять вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в пределах от x_1 до x_2. Такая вероятность равна приращению функций распределения в этих пределах:

$$P\ (x_1 < x \leq x_2) = P(x_2) - P(x_1). \quad (9)$$

Чаще всего используется другая форма закона распределения, которая называется дифференциальной функцией (законом) распределения или плотностью распределения вероятностей:

$$p(x) = \frac{dP(x)}{dx}. \quad (10)$$

Таким образом (9) с учетом (10) записывается следующим образом:

$$P\ (x_1 < x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx. \quad (11)$$

Случайной функцией называется функция некоторого аргумента, значение которой при любом значении аргумента неслучайной функции может принимать любые значения в заданном интервале, то функция называется случайным процессом, если аргумент может принимать только определенные дискретные значения, - случайной последовательностью. Случайная функция в процессе опыта может принимать тот или иной конкретный вид, принимаемый случайной функцией в результате опыта, называется реализацией случайной функции [8].

К числу случайных функций можно отнести процессы, характеризующие воздействие ветра на строительные конструкции, движение почвы при землетрясении, давление жидкости на гидротехнические конструкции и многое другое.

В решении многих практических задач не всегда необходимо полное описание случайной величины в виде функций распределения. Зачастую бывает достаточно знать основные числовые характеристики случайной величины, выражающие наиболее существенные особенности ее распределения [3].

Числовые характеристики служат мерами положения и рассеивания. К характеристикам положения относятся: математическое ожидание, мода, медиана, а к характеристикам рассеивания – дисперсию и среднеквадратичное отклонение.

Математическое ожидание – это одно из важнейших понятий в математической статистике и теории вероятностей.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X, принимающей конечное число значений x_i с вероятностями p_i, называется сумма:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \ldots x_n \cdot p_n. \quad (12)$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется интеграл от произведения ее значений x на плотность распределения вероятностей f(x):

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx\ . \quad (13)$$

Размерность математического ожидания совпадает с размерностью случайной величины.

Основные свойства математического ожидания:

1. $M(c \cdot X) = c \cdot M(X),\ c \in R$;
2. $M(X+Y) = M(X) + M(Y),\ X, Y \in E$;
3. $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$ для независимых случайных величин X и Y.

Мода дискретной случайной величины – это ее наиболее вероятное значение. Модой непрерывной случайной величины называется ее значение, при котором плотность вероятности максимальна.

Медиана случайной величины X – это ее значение Me, для которого имеет место равенство: т.е. равновероятно, что случайная величина X окажется меньше или больше Me. Геометрически медиана – это абсцисса точки, в которой площадь под кривой распределения делится пополам. В случае симметричного модального распределения медиана, мода и математическое ожидание совпадают.

Дисперсией случайной величины *X* называется число:

$$D(X) = M\{[X-M(X)]^2\} = M(X^2) – [M(X)]^2\ . \quad (14)$$

Дисперсия является *характеристикой рассеяния* значений случайной величины *X* относительно ее среднего значения *M* (*X*). Размерность дисперсии равна размерности случайной величины в квадрате. Исходя из определений дисперсии (14) и математического ожидания (12) для дискретной случайной величины и (13) для непрерывной случайной величины получим аналогичные выражения для дисперсии:

- дискретных случайных величин

$$D(X) = M(X- M(X))^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M(X)^{2}\cdot p_i . \qquad (15)$$

- непрерывных случайных величин

$$D(X) = M(X- M(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x - M(X))^2 \cdot f(x)dx. \qquad (16)$$

Основные свойства дисперсии:

1. $D(c\cdot X) = c^2\cdot D(X)$, $c \in R$;
2. $D (X+Y) = D(X) + D(Y)$, для независимых случайных величин X и Y.

Для наглядной характеристики рассеивания удобнее пользоваться величиной, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины. Такой величиной является среднее квадратическое отклонение случайной величины, которое представляет собой положительный квадратный корень из ее дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{D(X)} . \qquad (17)$$

В любых расчетах необходимо учитывать также взаимосвязь между случайными величинами. В теории вероятностей она носит название корреляционной зависимости или корреляции. Суть ее заключается в том, что при изменении значения одной переменной происходит закономерное изменение (уменьшение или увеличение) другой(-их) переменной(-ых). При расчете корреляций пытаются определить, существует ли статистически достоверная связь между двумя или несколькими переменными в одной или нескольких выборках. Примерами корреляционной зависимости могут выступать величина постоянной нагрузки и объемный вес бетона, прочность бетона и количество воды, количество снега и наклон поверхности, напряжение и деформация и многое др. Важно понимать, что корреляционная зависимость отражает только взаимосвязь между переменными и не говорит о причинно-следственных связях.

Показателем корреляционной зависимости является коэффициент корреляции, который отражает степень взаимосвязи двух переменных между собой. Он может варьировать в пределах от -1 (отрицательная корреляция) до +1 (положительная корреляция). Если коэффициент корреляции равен 0 то, это говорит об отсутствии корреляционных связей между переменными, а если коэффициент корреляции ближе к 1 (или -1) то говориться о сильной корреляции, а если ближе к 0, то о слабой.

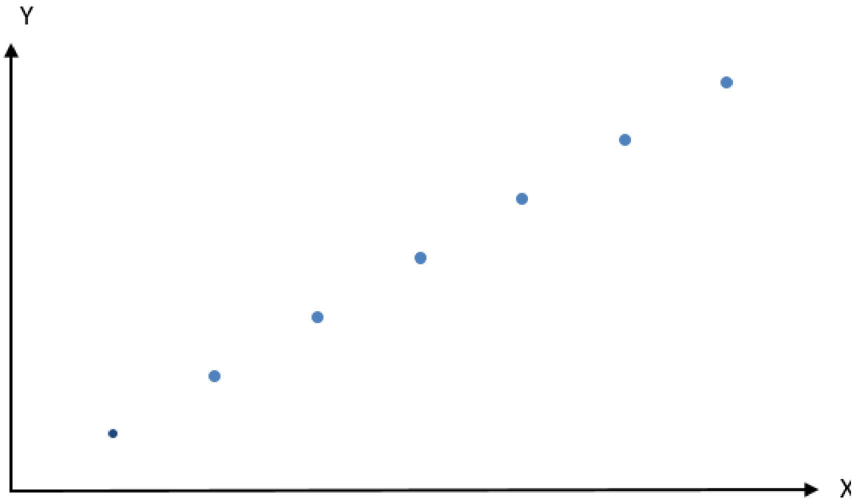

Рисунок 1 – Строгая прямая связь (сильная корреляция)

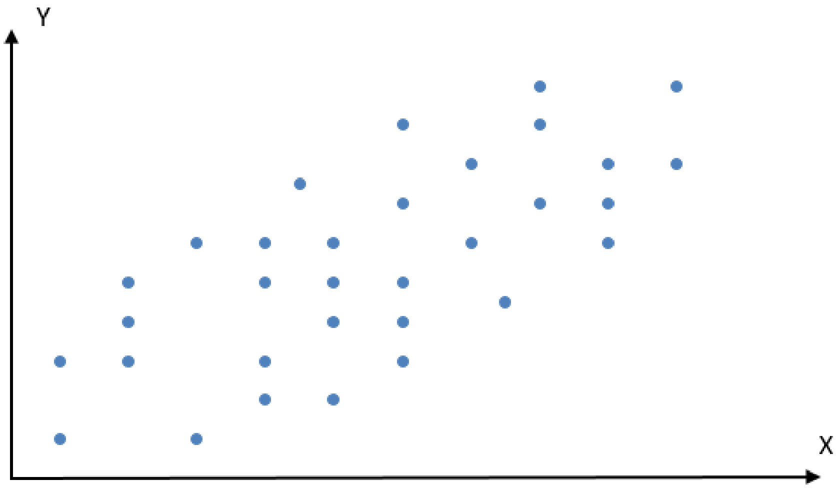

Рисунок 2 – Слабая прямая связь (слабая корреляция)

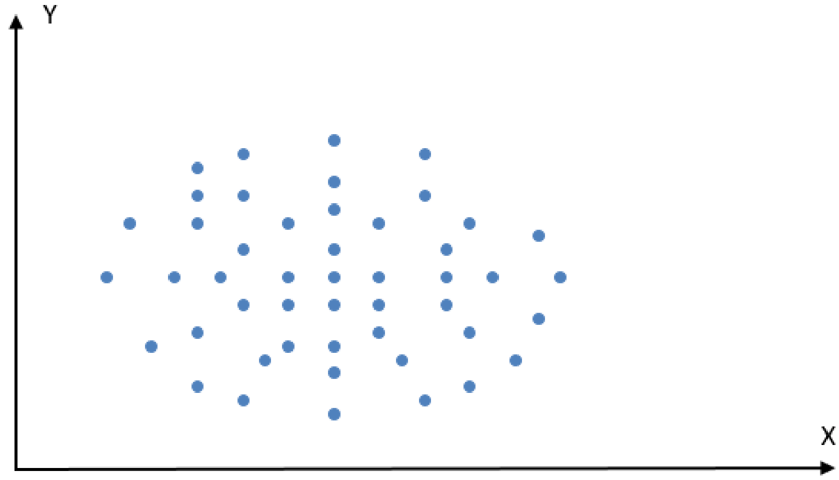

Рисунок – 3 –Нет связи (корреляции нет)

Вычисляется коэффициент следующим образом:

$$r_{xy} = \frac{M(XY) - M(X) \cdot M(Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}. \quad (18)$$

1.3 Методы расчета надежности, безопасности строительных конструкций

Безопасность строительных конструкций гарантируется расчетом на прочность и устойчивость, который определяет необходимые соотношения между внешними воздействиями с одной стороны и геометрическими размерами элементов конструкций, а также механическими свойствами - с другой [11]. Эти соотношения являются неравенствами, ограничивающие область безопасных состояний конструкций. Вместе с тем, любой расчет имеет другую, экономическую цель – максимально снизить их стоимость или наиболее выгодно использовать несущую способность конструкций, обеспечив максимальное восприятие нагрузки. В детерминистической постановке (когда используются вполне определенные величины) эта задача не вызывает принципиальных затруднений и обычно определение безопасных и наиболее выгодных соотношений между несущей способностью и стоимостью конструкции представляет собой одну и ту же двойственную задачу математического программирования.

Но вопрос осложняется, если учитывать случайный характер величин, входящих в расчет, но это совершенно необходимо. Например, прочность даже такого достаточно хорошо стандартизированного материала, как сталь, имеет значительный разброс с коэффициентом изменчивости порядка 0,10. Особенно большой разброс имеют внешние воздействия, в частности нагрузки, большинство которых представляют собой случайные функции времени. Размеры поперечных сечений (даже стандартных профилей, особенно тонкостенных) имеют значительные допуски и статистический разброс, также нагрузки обладают статистическим разбросом. Нагрузки подчиняются большему статистическому разбросу, чем, например, прочностные факторы. Поэтому при расчетах безопасности изучение изменчивости нагрузок играет главную роль. Однако наши знания о нагрузках, даже в части детерминированных зависимостей, находятся на значительно более низком уровне, чем знание основных законов прочности. Это обстоятельство повышает требования к обеспечению достаточной надежности, безопасности по отношению к возможным превышениям нагрузками опасных значений [11].

1.3.1 Изменчивость расчётных параметров

Основным критерием качества конструктивных систем зданий и сооружений является надёжность, оценить которую можно эмпирическими и теоретическими методами. В настоящее время для обеспечения надежности достаточно выполнить расчёт по методу предельных состояний, который регламентирован в [7], учитывающим основные положения европейского и международного стандартов.

При проектировании строительных конструкций используют три группы расчётных параметров: параметры внешней среды, конструктивные параметры и параметры надежности. К параметрам внешней среды относят нагрузки и воздействия Q и конструктивные характеристики R, которые включают в себя свойства материалов и конструктивных элементов, в частности, несущую способность. Они являются элементами расчётной системы, математическую модель которой представляется как

$$Q \leq R. \tag{19}$$

Элементы этой системы обычно рассматривают как исходные данные расчёта на надежность, а параметры надежности получают из отношения или сравнения исходных данных. Параметры исходных данных имеют существенные различия между собой, в то время как параметры надежности генетически связаны с исходными данными, концентрируют в себе их характерные особенности и тем самым приобретают общие признаки. Чтобы выполнить точный анализ результатов расчёта, требуется учёт особенностей всех параметров [12].

Нагрузки, которые действуют на конструкцию в данный момент или будут действовать в будущем, никогда точно не известны. Их неопределённость, объясняемую изменчивостью, иногда можно уменьшить за счёт повышения точности замеров и строгого контроля процесса нагружения, но полностью исключить почти невозможно. Характеристики конструкции и свойства материалов также изменчивы и неопределённы, но в значительно меньшей степени.

Если изменчивость параметров так мала, что ею можно пренебречь, то такие параметры считают детерминированными. Изменчивость расчётных параметров может иметь систематический или случайный характер. Систематические отклонения или неточности модели возникают в основном за счёт несовершенства методов расчёта. Эту неопределённость можно уменьшить или теоретически полностью устранить путём повышения точности расчёта. Случайную или стохастическую изменчивость можно также уменьшать, например, повышая качество материалов, но в большинстве случаев приходится учитывать эту неопределённость методами математической статистики и теории вероятностей.

Вероятностные свойства исходных данных в той или иной мере передаются параметрам надежности. Зная законы распределения нагрузок, используя методы строительной механики, можно для каждого элемента конструкции или опасного его сечения построить законы распределения усилий. С другой стороны, при известных законах распределения геометрических характеристик этих сечений и прочностных свойств материалов можно определить плотность распределения их несущей способности. Оценивают результаты расчёта конструктивной системы, прежде всего, с точки зрения эффективности, но если эти результаты имеют случайный характер, то и оценивать их следует только в вероятностном смысле.

В настоящее время результаты расчёта конструкций оценивают обычно по резервам прочности, коэффициентам запаса или надёжности. Коэффициенты запаса – наиболее простой вид оценки. По численным значениям коэффициентов запаса иногда судят об уровне надёжности конструкций, необходимость обеспечения которого является одним из основных требований к методам расчёта строительных конструкций. Анализ показывает, что кардинальные изменения методов расчёта в отечественных и зарубежных нормативных документах происходили, если обнаруживалось, что это требование не выполняется. Физический смысл коэффициентов запаса часто скрыт даже от проектировщика, поэтому он обычно воспринимается как обобщённое отражение мер предосторожности.

Коэффициенты запаса присутствовали практически во всех известных методах расчёта на прочность, однако соотношение значений коэффициентов и уровня надёжности не всегда было одинаковым. Это обусловлено тем, что по мере развития методов расчёта всё большее внимание уделялось учёту изменчивости исходных данных с использованием элементов теории вероятностей [13].

1.3.2 Метод расчета по допускаемым напряжениям

В классическом методе расчёта прочности по допускаемым напряжениям исходили из соотношения между максимальным напряжением σ_{max}, которое определяли в результате расчёта, и допускаемым значением [σ] в виде условия прочности:

$$\sigma_{max} \le [\sigma] = \frac{R}{k}, \tag{20}$$

Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата	08.04.01.2020.078-ПЗ КНР	Лист 24

где R– среднее значение сопротивления материала;

к ≥ 1 – коэффициент запаса прочности.

Для вычисления напряжений нагрузочного эффекта σ_{max} применяли простые линейные функции теории упругости (например, $\sigma_{max} = M/W$), связывающие внешние усилия (например, изгибающий момент M) от эксплуатационных (нормативных) нагрузок и геометрические характеристики сечений (например, момент сопротивления сечения W). Тем самым коэффициент запаса k определялся отношением среднего сопротивления к величине σ_{max}. Сопротивления бетона и арматуры железобетонных конструкций значительно различаются, поэтому применяли два коэффициента запаса прочности, которые в общем случае не были равны друг другу и должны были быть не меньше нормируемых величин. Так, по нормам 1934 г., для бетона марок $\bar{R}$=110 кгс/см^2 и $\bar{R}$=170 кгс/см^2 допускаемые напряжения составляли соответственно 50 и 70 кгс/см^2. Для арматуры сталей Ст.3 и Ст.5 допускаемые напряжения принимали равными соответственно 1250 и 1600 кгс/см^2 [13].

Результаты конструктивного расчёта, выполненного по допускаемым напряжениям, очень часто значительно отличались от опытных значений (например, для железобетонных конструкций фактический коэффициент запаса составлял k = 2,2… 3 против нормируемых величин k = 1,6… 2,2 в зависимости от вида нагрузок).

Одна из причин расхождений заключалась в том, что допускаемые напряжения принимали по средним или близким к ним значениям прочности материала при условии его работы в упругой стадии. Вероятность изменения нагрузок, большинства свойств материалов, условий эксплуатации, а также неточности классической теории учитывали, по существу, единым коэффициентом запаса, так как закономерности распределения случайных величин и событий, характеризующих перечисленные факторы, были ещё мало изучены.

Заменим в условии (20) допускаемое напряжение [σ] на среднее значение (математическое ожидание) несущей способности (как функции прочностных характеристик конструкции)$\bar{R}$, а напряжение σ_{max} − на среднее значение усилия от внешней (эксплуатационной) нагрузки Q, от действия которой возникает это напряжение. Тогда выражение для коэффициента запаса классического метода расчёта в виде, удобном для последующего анализа:

$$к=\bar{к}=\frac{\bar{R}}{\bar{Q}}\,. \qquad (21)$$

Детерминированную величину отношения математических ожиданий прочности и нагрузки называют статистическим [14] или общим коэффициентом запаса, не являющимся случайной величиной [15]. В сущности, оценить надёжность конструкции только по величине математического ожидания коэффициента запаса *k* без учёта вероятностной природы нагрузок и прочностных свойств материалов невозможно.

Главными недостатками данного метода является то, что коэффициент запаса для всех конструкций из данного материала был одинаков, что не отвечало фактической работе таких комплексных материалов, какими являются железобетон и каменная кладка, компоненты которых имеют различные механические характеристики и в соответствии с этим в различной степени и с различной быстротой исчерпывают свою несущую способность. Кроме того, работа строительных материалов в конструкциях рассматривалась лишь в упругой стадии, т.е. не учитывались пластические свойства материалов изменчивость нагрузок и сопротивлений материалов [21]. Недостатки данного метода устранялись постепенно, в течение длительного времени после обнаружения и исследования закономерностей в изменчивости не только физических свойств материалов, но и внешних воздействий. Позже метод допускаемых напряжений модифицировался в метод разрушающих нагрузок. В целом метод расчёта по допускаемым напряжениям имеет в основном историческое значение, несмотря на то, что ещё применяется в ряде стран, так как представляет собой простое средство, чтобы гарантировать достаточно малую вероятность отказа.

1.3.3. Метод двух моментов и вероятностная интерпретация общего коэффициента запаса

Если изменчивость нагрузки и прочности известна, например, в виде дисперсии D_Q и D_R или коэффициентов вариации

$$V_Q = \frac{S_Q}{\bar{Q}} \text{ и } V_R = \frac{S_R}{\bar{R}}\,, \tag{22}$$

где S_Q – резерв прочности;

$\bar{Q}$ – среднее значение нагрузки или усилий от нагрузки.

Можно оценить надежность по изменчивости функции, которую называют резервом прочности:

$$\tilde{S} = \tilde{R} - \tilde{Q}\,, \tag{23}$$

где $\tilde{R}$ и $\tilde{Q}$ - случайные величины несущей способности и нагрузочного эффекта, имеющие одинаковые размерности.

Основными вероятностными характеристиками этой функции является математическое ожидание $\tilde{S} = \tilde{R} - \tilde{Q}$ и дисперсия $D_S = D_R + D_Q$ (при отсутствии корреляционной связи между нагрузкой и несущей способностью).

Величину β, обратную коэффициенту вариации функции резерва прочности $V_S = \frac{S_S}{\bar{Q}}$, А.Р. Ржаницын назвал характеристикой безопасности, которая при распределении исходных данных по нормальному закону определяется определяется как:

$$\beta = \frac{\bar{S}}{S_S} = \frac{\bar{R} - \bar{Q}}{\sqrt{D_R^2 + D_Q^2}} = \frac{\bar{k} - 1}{\bar{k}^2 \cdot V_R^2 + V_Q^2}. \tag{24}$$

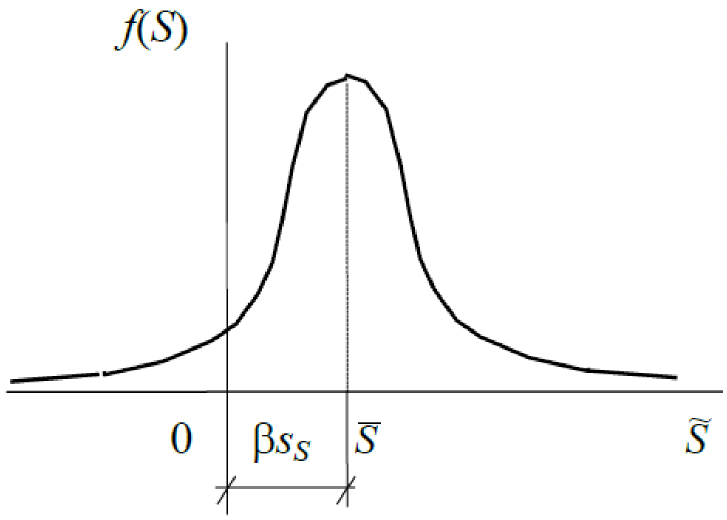

Рисунок 4 - Плотность распределения случайной величины $\tilde{S}$

Вероятность отказа (риск) или вероятность отрицательного значения резерва прочности $\tilde{S}$ при известном значении β определяется из формулы:

$$P_Q = P(\tilde{S}<0) = 0,5 - \Phi(\beta), \tag{25}$$

где $\Phi(\beta) = \frac{1}{2\Pi} \cdot \int_0^{\beta} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$ – интеграл вероятности или функция Лапласа переменной $x = \frac{\tilde{S}-\bar{S}}{s_S}$, соответствующей функции Ф (и) – функции нормированного нормального распределения.

Вероятность безотказной работы или надёжность конструкции:

$$P_R = 1- P_Q. \tag{26}$$

Индекс безопасности β является стандартизированной вероятностью случайной величины $\tilde{S}$. Метод оценки надежности посредством коэффициента β получил название метода двух моментов, поскольку для его определения используются по две характеристики случайных величин $\tilde{R}$ и $\tilde{Q}$.

Следует отметить, что характеристика безопасности в виде индекса безопасности β обладает рядом недостатков, наиболее существенный из которых − возможность достаточно точной оценки надёжности только для ограниченного круга прочностных задач при линейной зависимости $\tilde{R}$ и $\tilde{Q}$ и зависимости от математической формулировки предельного состояния. Данный подход применялся при исследовании надёжности в 60 − 70-х гг. прошлого века в связи с переработкой норм в некоторых странах [13].

1.3.4 Метод расчета по разрушающим нагрузкам и условный коэффициент запаса

Единый коэффициент запаса использовали и в методе расчёта по разрушающим (предельным) нагрузкам. Структура условия прочности по этому методу практически не изменилась:

$$Q_n \leq \frac{Q_{\text{разр}}}{\text{к}}, \qquad (26)$$

где Q_n - усилие от эксплуатационных (нормативных) нагрузок;

$Q_{\text{разр}}$ - разрушающее усилие, которое является функцией несущей способности конструкции с учётом нелинейных свойств материалов и резервов системы за счёт перераспределения внутренних усилий.

Длительное время исследования строительных конструкций были направлены на определение в большой степени несущей способности R и в меньшей степени на оценку нагрузочного эффекта Q. В новом методе расчёта в определённой степени произошла переориентация в оценке значимости исходных данных и особенно их изменчивости. Расчётные значения пределов прочности материалов принимались равными среднестатистическим значениям, а расчётные нагрузки устанавливались путём умножения эксплуатационных нагрузок на нормируемые коэффициенты запаса, дифференцированные от 1,6 до 2,2, в зависимости от соотношений несущей способности и воздействий. Например, нормируемый коэффициент запаса прочности нормальных сечений железобетонных конструкций имел два значения: 1,8 и 2.

По мнению В.Д. Райзера [3], коэффициент запаса κ в условии (26) является, в сущности, функцией нормативных значений нагрузки и несущей способности:

$$к=к_n = \frac{R_n}{Q_n}\,. \tag{27}$$

Детерминированную величину $к_n$ Болотин В.В. назвал условным коэффициентом запаса, не являющимся случайной величиной, а выражение (28) − «классическим условием прочности» [1].

$$Q_n \leq \frac{R_n}{k_n}\,. \tag{28}$$

Математические ожидания нагрузки и несущей способности в выражении (21) и нормативные значения в формуле (27) являются детерминированными величинами. Но нормативные значения параметров, в том числе и коэффициента запаса k_n, в отличие от математических ожиданий должны быть установлены с учётом случайных изменений. Выразим нормативные значения нагрузки и несущей способности через математические ожидания в виде:

$$Q_n = \bar{Q}\cdot(1+\mu_Q\cdot\mu_Q) \text{ и } R_n = \bar{R}\cdot(1- \mu_R\cdot\mu_R), \tag{29}$$

где μ_Q и μ_R – число стандартов, характеризующих обеспеченность нормативных значений Q_n и R_n.

Подставляя выражение (29) в (27) и учитывая (21), получим зависимость коэффициентов $к_n$ и $\bar{к}$ в следующем виде:

$$к_n = \bar{к}\cdot\frac{1-\mu_R\cdot V_R}{1+\mu_Q\cdot V_Q}\,. \tag{30}$$

Из выражения (30) следует условие $к_n \leq \bar{к}$ и можно заключить, что условный коэффициент запаса $к_n$ зависит от изменчивости каждого из параметров, определяющих надёжность конструкций.

Так постепенно подошли к вероятностной трактовке расчёта конструкций, которая получила отражение в идее случайной величины недифференцированного коэффициента запаса, предложенной проф. Н.С. Стрелецким [6]:

$$\tilde{к} = \frac{\tilde{R}(x)}{\tilde{Q}(x)}, \qquad (31)$$

где x − конечное число случайных независимых параметров, характеризующих случайные величины прочности материала $\widetilde{R}(x)$ и внешней нагрузки $\widetilde{Q}(x)$.

Если известна плотность распределения p(k), то вероятность наступления состояния, обусловленного равенством (31) и названного предельным, определяется по формуле:

$$\mathrm{P_o} = \int_0^1 \mathrm{p}(\text{к})dk. \qquad (32)$$

Формулы (31) и (32) представляют собой основу простейшей вероятностной модели расчёта конструкций. Применительно к задачам прочности А.Р. Ржаницын назвал величину $\mathrm{P_o}(\mathrm{k}<1)$ вероятностью разрушения, удобную для вероятностных расчётов, когда нагрузка и прочность подчиняются несимметричным законам распределения, отличающимся от нормального закона. Имеются решения по её определению для различных случаев распределений нагрузки и прочности.

Единый коэффициент запаса, учитывающий одновременно изменчивость нагрузок и свойств материалов, а также точность расчётных схем и многообразные условия работы, не мог быть объективным критерием надёжности конструкций. Поэтому метод разрушающих нагрузок явился переходным к более совершенному методу предельных состояний.

1.3.5 Метод предельных состояний

Метод предельных состояний отличается от классических методов введением расчётных параметров с определённой обеспеченностью и дифференцированного коэффициента запаса $k(\gamma_i)$ в виде совокупности частных коэффициентов надёжности γ_i. За рубежом этот метод так и называется − метод частных коэффициентов. Общий вид условия прочности по этому методу

$$Q \le R, \tag{33}$$

где Q и R − расчётные значения нагрузок и прочностных характеристик конструкции.

До настоящего времени условие (33) проверяют в два этапа детерминированного расчёта. На первом этапе от действия расчётных нагрузок определяют напряжения, усилия, а при необходимости деформации и перемещения статическим расчётом с применением методов строительной механики, теории упругости или пластичности. На втором этапе выполняют конструктивный расчёт при расчётных значениях прочностных и деформационных характеристик с целью их сопоставления с нагрузочным эффектом и выбора надёжного и эффективного решения. На каждом этапе расчёта сохраняют свою роль и особенности все расчётные параметры.

Целью метода предельных состояний является обеспечение безотказного функционирования, т.е. надёжности проектируемой конструкции. Поэтому при расчете особое значение уделяется учёту изменчивости исходных данных. С другой стороны, расчёт на надёжность производится с целью предотвращения входа конструкции в предельное состояние, под которым понимается любое отклонение конструкции от условий её безопасности и нормальной эксплуатации. По мнению В.В. Болотина, понятие предельного состояния, принятое в нормах, в точности соответствует понятию отказа в теории надёжности [1].

Существует множество видов отказа, которые в действующих нормах расчёта строительных конструкций обобщены по степени опасности в две группы предельных состояний. Первая группа включает предельные состояния, которые ведут к полной непригодности для эксплуатации конструктивных элементов или систем; вторая группа включает предельные состояния, затрудняющие нормальную эксплуатацию конструкций или уменьшающие долговечность зданий (сооружений) по сравнению с рассматриваемым сроком службы. Стандартами установлены различные типы состояний, вероятность и последствия проявления которых могут сильно различаться [7].

Причинами входа конструкции в предельное состояние или её отказа являются повреждения, заключающиеся в нарушении качества отдельных элементов и узлов. Возникновение предельных состояний возможно также вследствие ошибок, допущенных при проектировании, монтаже и эксплуатации конструкций. По характеру повреждений они могут быть постепенными, внезапными и смешанными. Причинами постепенных повреждений являются условия агрессивной окружающей среды и многократно повторяющаяся нагрузка. Внезапные повреждения вызываются повторными перегрузками и динамическими воздействиями некоторых нагрузок [13].

Сооружение может отказать по одному или нескольким предельным состояниям, которые обычно связывают с какими-либо ограничениями. Их задают численными значениями, отношениями, уравнениями, алгоритмами или графическими зависимостями базисных переменных x_i, к которым относят нагрузки, свойства материалов, геометрические размеры, условия функционирования и т.д.

В общем случае конечного m-мерного пространства уравнение каждого предельного состояния j имеет вид:

$$\varphi_j(x) = \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0. \qquad (34)$$

Функция работоспособности $\varphi(x)$ в уравнении (34) характеризует границу допустимых состояний. Неравенство

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m) < 0 \qquad (35)$$

означает отказ по рассматриваемому предельному состоянию, а условие

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m) \geq 0 \qquad (36)$$

соответствует безотказной работе. Вероятность безотказной работы, т.е. надёжность, совпадает с вероятностью невыполнения предельного неравенства (35). Согласно условию (36), само предельное состояние является частью безопасной области, однако этот вопрос имеет смысл только при детерминированных расчётах [13].

Из рис.5 видно, что для двумерного (плоскостного) случая уравнение предельного состояния характеризует кривую, разделяющую пространство вероятных состояний на две части: I − область отказа и II − область безотказной работы.

Рисунок 5 - К определению предельного состояния в двумерном пространстве

Заметим, что понятие предельного состояния имеет системный смысл, так как характеризуется взаимодействием множества элементов − расчётных параметров, связанных в единую систему. Одномерный случай может характеризовать лишь какие-либо свойства или условия, но не состояние в целом. В соответствии с группами предельных состояний все расчётные параметры конструктивных систем разделяют на две практически независимые группы, в которых учитываются характеристики свойств конструкции (одна группа) и характеристики внешних воздействий (другая группа).

Согласно [7], условия обеспечения надёжности заключаются в том, чтобы расчётные значения нагрузок или вызванных ими усилий, напряжений, деформаций, перемещений, раскрытия или образования трещин (нагрузочный эффект) не превышали соответствующих им предельных значений, установленных нормами проектирования строительных конструкций. В отечественных нормах проектирования эти условия реализованы в детерминированных уравнениях (34) предельного состояния.

В общем случае уравнение первой группы (по несущей способности) представляют в виде:

$$\varphi_{I}(x) = r - q = 0, \quad (37)$$

где $r = \varphi_R(x_1)$ − функция сопротивления;

$q = \varphi_Q(x_2)$ − функция нагрузочного эффекта.

Уравнения второй группы предельных состояний (по пригодности к нормальной эксплуатации) исходят из равенства расчётных деформаций (перемещений) w предельно допустимым значениям w_u:

$$\varphi_{II}(x) = w - w_u = 0. \quad (38)$$

Положительные значения функций $\varphi_I(x)$ и $\varphi_{II}(x)$ отождествляют с запасом предельных состояний, а отрицательные значения рассматривают как условия отказа. Часто используют также понятие «условие прочности» в виде:

$$r > q. \quad (39)$$

При расчёте конструкций рассматривают различные расчётные ситуации, характеризуемые расчётной схемой, видами внешних воздействий, комплексами расчётных условий и требований. Основными аргументами функций сопротивления и нагрузки в формулах (37) и (39) то законы распределения которых устанавливают и уточняют путём систематического накопления и изучения опытных данных:

$$r = \varphi_R\,(R_1, R_2, \ldots) \text{ и } q = \varphi_Q\,(Q_1, Q_2, \ldots). \qquad (40)$$

Экспериментальные функции распределения прочностных свойств материалов и нагрузок сильно различаются и характер их таков, что сложно определить верхний предел (максимум) для внешних нагрузок и нижний предел (минимум) для несущей способности и поэтому невозможно предъявлять абсолютное требование к выполнению условия (39). Можно лишь поставить условие, чтобы оно выполнялось с требуемой вероятностью [1].

Основными параметрами прочности материалов являются нормативные значения r_n прочностных характеристик, а основными параметрами нагрузки − нормативные значения нагрузок q_n. В методе предельных состояний используют численные значения нормативных характеристик материалов и нагрузок, но определяются они вероятностным (статистическим) методом, так как имеют случайный характер. Нормативные величины выполняют две важные функции: расчётную (основа расчёта по второй группе предельных состояний) и контрольную (основа контроля материалов и воздействий). Они принимаются равными квантилям статистического распределения с заданной вероятностью p или средним значениям ($p = 0{,}5$). Обеспеченность (вероятность не превышения) нормативных значений прочностных характеристик материалов или конструкций, прошедших приёмочный контроль или сортировку, должна быть, как правило, не менее 0,95. Если $F(x)$ − функция распределения изменяющегося параметра x, то нормативную величину x_n назначают из условия

$$x_n = F^{-1}(p), \qquad (40)$$

где F^{-1} − обратная функция распределения, определяемая по таблицам или приближённым формулам [13].

Приближённые формулы для обратных функций некоторых распределений приведены, например, в работе [16].

Чтобы гарантировать достаточно малую вероятность отказа, в условие (37) наряду с нормативными значениями r_n и q_n вводят коэффициенты запаса γ. Даже при приближённой оценке любого предельного состояния, определяемого соотношением как минимум двух факторов, одного коэффициента запаса в виде формулы (21) или (27) совершенно недостаточно. В общем случае необходимо учитывать множество факторов, некоторые из которых пока ещё не поддаются строгому контролю.

Поэтому в уравнение предельного состояния вводят частные коэффициенты надёжности (запаса), которые учитывают изменчивость основных параметров и возможность отклонения их действительных значений в неблагоприятную сторону от нормативных величин:

$$\Phi\ [(\gamma_d r_n/\gamma_m)-(\gamma_n \gamma_f \psi q_n)]=0. \quad (41)$$

Различают несколько типов частных коэффициентов надёжности: по нагрузке γ_f и сочетанию нагрузок ψ; по материалу γ_m и грунту γ_q; по условиям работы γ_d (γ_s, γ_b и др.) и по ответственности или назначению γ_n. Основной принцип применения частных коэффициентов надёжности: большие значения коэффициентов должны обеспечивать и большую надёжность конструкции. Это означает, что по отношению к нагрузкам коэффициенты надёжности вводят в виде множителей, а к материалу − в виде делителей.

С учётом выражения (41) общее условие расчёта по первой группе предельных состояний обычно выражают зависимостью:

$$\gamma_n \cdot \psi \sum(\gamma_f \cdot \gamma_a \cdot Q_n) \le \gamma_d \cdot F(R_{n1}/\gamma_{m1}, R_{n2}/\gamma_{m2}). \quad (42)$$

Для второй группы предельных состояний общее условие имеет вид:

$$\gamma_n \cdot \psi \sum(\gamma_f \cdot \gamma_a \cdot Q_n) \cdot \gamma_d \cdot F(R_{n1}/\gamma_{m1}, R_{n2}/\gamma_{m2}) \le C, \quad (43)$$

где C − постоянная величина расчётного ограничения.

Из (29) видно, что нормативные величины имеют статистический характер и сдвинуты от средних величин в сторону более опасных значений. На рисунке 6 показаны соотношения нормативных и средних величин, роль коэффициентов надёжности в обеспечении безопасности конструкции и способ измерения надёжности P_R [13].

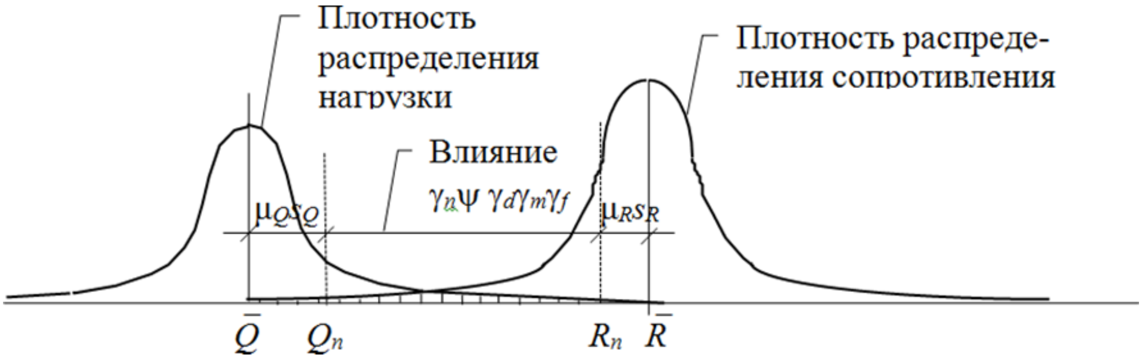

Рисунок 6 - К оценке надёжности расчёта по методу предельных состояний [13].

Коэффициенты надёжности по материалу γ_m и нагрузке γ_f характеризуют изменчивость свойств материалов и воздействий. Они учитывают возможные отклонения характеристик материалов и нагрузок в неблагоприятную сторону от их нормативных значений. Поэтому данные коэффициенты используются для перехода от нормативных значений к расчётным величинам.

Возможные отклонения принятой расчётной модели от реальных условий работы элементов конструкций, соединений, зданий и сооружений и их оснований, а также изменения свойств материалов вследствие влияния температуры, влажности, длительности воздействия, его повторяемости и других факторов, не отражаемых непосредственно в расчётах, учитываются коэффициентами условий работы. Эти коэффициенты могут учитывать факторы, которые не имеют приемлемого аналитического описания, такие как влияние коррозии, агрессии среды, биологических воздействий.

С помощью коэффициента надёжности по назначению (ответственности) γ_n дифференцируют уровни безопасности в зависимости от социального, экологического и экономического значения сооружения, от размера последствий и величины ущерба при возможном отказе. Считается, что с увеличением или уменьшением этого коэффициента можно изменять вероятности отказа, выравнивать их различия при разных сроках службы сооружений. Он имеет форму общего коэффициента запаса, на который умножаются все нагрузки (нагрузочный эффект) при расчётах по предельным состояниям.

Впервые значения коэффициента γ_n были установлены в 1981 г. правилами учёта повышенной, нормальной или пониженной ответственности зданий и сооружений при проектировании конструкций. Впоследствии появились предложения по дифференциации этого коэффициента в зависимости от вида возможного ущерба (материального γ_n = 0,9 – 1,0 и социального γ_n = 0,9 − 1,1) [17].

Изменчивость характеристик параметров, связанных в зависимости (33), позволяет давать их расчётным значениям вероятностную оценку. Вероятность непревышения расчётного значения нагрузки или превышения значения расчётного сопротивления называют обеспеченностью расчётных значений. Как уже отмечалось, обеспеченность нормативных значений сопротивлений материалов должна быть не менее 0,95 и строго контролируется в процессе испытаний.

Обеспеченность нормативных нагрузок и воздействий твёрдо не установлена и может существенно различаться.

Когда внедрялся метод предельных состояний, из-за недостаточности статистических данных опытный контроль расчётных значений был невозможен, однако предполагалось, что по мере накопления результатов испытаний удастся обосновать их обеспеченность [18]. В то же время были и остаются сомнения в практической возможности этого. Так, чтобы на основании опытных данных с достаточной достоверностью получить распределения случайных величин в области малых вероятностей (порядка 0,001), следует выполнить большой объём испытаний. При этом реальные возможности массового эксперимента могут быть значительно превышены [1]. Кроме этого, изменчивость некоторых параметров связана не только со статистическими факторами, но и с производственными, проектными или эксплуатационными условиями, которые не поддаются статистическому учёту [19].

Расчётные величины несущей способности и нагрузки, которые в уравнениях (35), (36) выделены круглыми скобками, и надежность конструкций, запроектированных из детерминированного условия $Q \leq R$, характеризуются не только контролируемыми нормативными величинами Q_n и R_n, но и величинами коэффициентов надёжности. По аналогии с формулами (29) расчётные величины можно представить в виде, отражающем их вероятностную основу:

$$Q = \gamma_f \cdot \bar{Q} \cdot (1 + \mu_Q \cdot \mu_Q) \text{ и } R = \bar{R} \cdot (1 - \mu_R \cdot \mu_R) / \gamma_m. \quad (44)$$

При одной нагрузке и одной прочностной характеристике представим выражение (42) с учётом (44) в виде:

$$\gamma_n \cdot \gamma_f \cdot \gamma_d \cdot \overline{Q_n} \cdot (1 + \mu_Q \cdot \mu_Q) \leq \bar{R} \cdot (1 - \mu_R \cdot \mu_R) / \gamma_m. \quad (45)$$

Отсюда можно получить выражение, связывающее статистический коэффициент запаса (21) с коэффициентами надёжности:

$$\bar{к} = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot \gamma_m \cdot \gamma_d \cdot (1 + \mu_Q \cdot \mu_Q) / (1 - \mu_R \cdot \mu_R). \quad (46)$$

Условный или «нормативный» коэффициент запаса:

$$к_n = \bar{к} \cdot \frac{1 - \mu_R \cdot V_R}{1 + \mu_Q \cdot V_Q} = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot \gamma_m \cdot \gamma_d. \quad (47)$$

«Расчётный» коэффициент запаса:

$$к = \frac{к_n}{\gamma_f \cdot \gamma_m} = \gamma_n \cdot \gamma_d. \quad (48)$$

Анализ зависимостей (46) − (48) показывает, что при вероятностном анализе условия (41) наиболее просто аппроксимировать коэффициенты надёжности γ_m и γ_f, характеризующие изменчивость случайных исходных величин $\tilde{R}$ и $\tilde{Q}$. Что касается других коэффициентов, особенно учитывающих влияние различных ошибок и упрощений на надёжность конструкций, то здесь однозначного подхода пока нет.

Детерминированные коэффициенты γ являются лишь косвенными показателями надёжности, которых иногда бывает вполне достаточно для нормативных расчётов. Однако, по мнению А.Р. Ржаницына, схема назначения значений коэффициентов надёжности не отвечает вероятностной природе расчётных величин. В частности, она приводит к неэкономичным решениям при наличии в расчётных формулах большого числа случайных величин. Поэтому выражения (1.62) являются лишь условной характеристикой расчётных значений исходных параметров. Графически коэффициент $\gamma = R/Q$ характеризуется углом наклона луча, проходящего через точку k (рис. 7) [13].

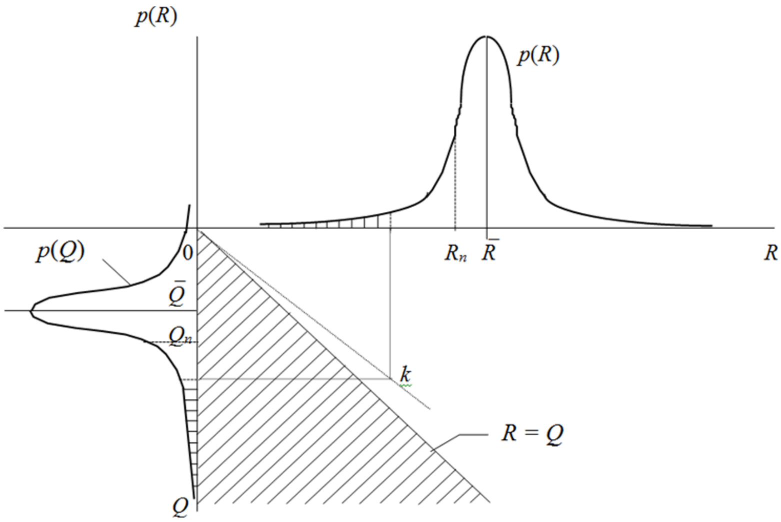

Рисунок 7 - Схема распределений сопротивлений и нагрузки (заштрихованные участки - область отказа) [13].

Для обоснованного выбора расчётных значений R и Q нужно знать распределения p(R) и p(Q), а в случае их зависимости − совместное (двухмерное) распределение p(R,Q). Тогда расчётные значения по аналогии с нормативными значениями будут равны некоторым квантилям соответствующих распределений. Однако только этих данных недостаточно для вероятностной оценки надёжности.

Информация о распределении $p(R)$ как минимум должна содержать математическое ожидание $\bar{R}$ и среднеквадратическое отклонение σ_R или коэффициент вариации v_R. Тогда можно записать:

$$R = \bar{R}\cdot(1- \eta_R\cdot V_R), \tag{49}$$

где η_R − числовой коэффициент, косвенно связанный с требуемой обеспеченностью расчётного значения R.

Из сопоставления выражений (44) и (45) приходим к вероятностной интерпретации коэффициента надёжности по материалу:

$$\gamma_m = \frac{1-\mu_R\cdot V_R}{1+\eta_R\cdot V_R}\,. \tag{50}$$

В полученном выражении неявно использован нормальный закон распределения.

Статистическое истолкование коэффициента надёжности по нагрузке γ_f более проблематично. Распределения нагрузок в большинстве случаев имеют существенные особенности (ярко выраженная асимметрия и зависимость от времени), которые исключают возможность их аппроксимации при помощи нормального распределения. Однако для наглядности часто используют расчётные значения нагрузки в виде:

$$Q = \bar{Q}\cdot(1+\eta_Q\cdot V_Q), \tag{51}$$

где η_Q – коэффициент, характеризующий обеспеченность расчётной нагрузки, т.е. вероятность проявления меньших значений, чем Q.

При вероятностной интерпретации коэффициент надёжности по нагрузке можно представить в виде:

$$\gamma_f = \frac{1+\eta_Q \cdot V_Q}{1+\mu_Q \cdot V_Q}. \tag{52}$$

Обеспеченность расчётных значений исходных параметров можно также представить в общем виде как функции характеристик безопасности или индексов надёжности β. Б.И. Снарскис ввёл также термин «дальности отказа» в [20], который используют для оценки обеспеченности расчётных значений параметров как дальности этих значений в виде:

$$P_R = P(\tilde{R}>R) = F(\beta_R) \text{ и } P_Q = P(\tilde{Q}>Q) = F(\beta_Q), \tag{53}$$

где $\beta_R = F^{-1}(P_R)$ – дальность расчетных значений сопротивлений – аналог характеристики безопасности η_R;

$\beta_Q = F^{-1}(P_Q)$ - дальность расчетных значений нагрузки – аналог характеристики безопасности η_Q.

В целом вероятностную оценку условия прочности по методу предельных состояний можно получить из отношения расчётных параметров, представленных в формулах (45) и (47) с учётом (53):

$$\overline{\kappa} \geq \frac{1+\beta_Q \cdot V_Q}{1-\beta_R \cdot V_R}. \tag{54}$$

Исходя из принципа равнообеспеченности, примем $\beta_0 = \beta_R = \beta_Q$. Тогда из формулы (54) получим выражение характеристики безопасности, которую применительно к условию прочности назовём условной:

$$\beta_0 \leq \frac{\overline{\kappa}-1}{\overline{\kappa} \cdot V_R + V_Q}. \tag{55}$$

По известному значению β_0 можно оценить вероятность отказа (невыполнения расчётного условия прочности $R \geq Q$). В частности, если функции $\tilde{R}$ и $\tilde{Q}$

подчиняются нормальным законам распределения, вероятность отказа определяется из формулы (25).

Зависимость (55) полностью соответствует полувероятностной характеристике метода предельных состояний и отражает его недостатки. Вероятность отказа, определённая таким образом, значительно больше, чем при вероятностном расчёте (25) [13].

Введение метода предельных состояний позволило учесть специфику работы разных конструкций и фактическую изменчивость нагрузок и механических свойств строительных материалов и т.д., т.е. позволило достичь определенного выравнивания надежности отдельных элементов конструкции, составляющих единое целое [21].

1.3.6. Совершенствование метода предельных состояний

В 40-х годах XX века советский ученый, чл.-корр. АН СССР *Н.С. Стрелецкий* предложил перейти от метода расчета по допускаемым напряжениям к вероятностно-статистическим методам. Им впервые исследовал совместное вероятностное влияние распределения нагрузки и несущей способности.

Пусть кривая распределения прочности характеризуется математическим ожиданием M и среднеквадратичным отклонением σ, а кривая распределения усилия от нагрузки - F. Эти кривые пересекаются в одной точке, соответствующей несущей способности M_0 и усилию от нагрузки — F_0 (рис.8). Значения переменных M_0 и F_0 могут быть приняты за расчетные. Для оценки безотказной работы конструкции Н. С. Стрелецкий ввел понятие «гарантия неразрушимости» и дал способ ее определения:

$$Г = 1 - \omega_1 \cdot \omega_2, \tag{56}$$

где Г - гарантия неразрушимости, безотказной работы;

ω_1 - вероятность того, что прочность конструкции получит заниженные значения $M < M_0$;

						Лист
					08.04.01.2020.078-ПЗ КНР	44
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		

ω_2 - вероятность того, что нагрузка получит завышенное значение, т. е. $F > F_0$;

$\omega_1 \cdot \omega_2$ - вероятность одновременного появления этих событий (вероятность отказа).

В данной формулировке отказ происходит при одновременном появлении двух независимых событий: снижения несущей способности ниже расчетной и превышения нагрузками расчетной величины [22].

Вероятности ω_1 и ω_2 нетрудно вычислить, если известны законы распределения нагрузки и несущей способности. Они равны площадям криволинейных треугольников, заключенных между осью абсцисс и отрезками кривых в диапазоне от M_0 до $-\infty$ для распределения несущей способности и от F_0 до $+\infty$ для распределения нагрузок:

$$\omega_1 = \int_{-\infty}^{M_0} f(M)dM \text{ и } \omega_2 = \int_{F_0}^{+\infty} f(F)dF. \quad (57)$$

Однако гарантия неразрушимости, безотказной работы служит примерной и завышенной оценкой вероятности безотказной работы, так как не учитывает все возможные сочетания нагрузок и несущей способности. Впоследствии была дана двусторонняя оценка для вероятности отказа $Q = 1 - Г$:

$$\omega_1 \cdot \omega_2 < Q < \omega_1 + \omega_2 - \omega_1 \cdot \omega_2\,, \quad (58)$$

если обе кривые распределения имеют по одному максимуму.

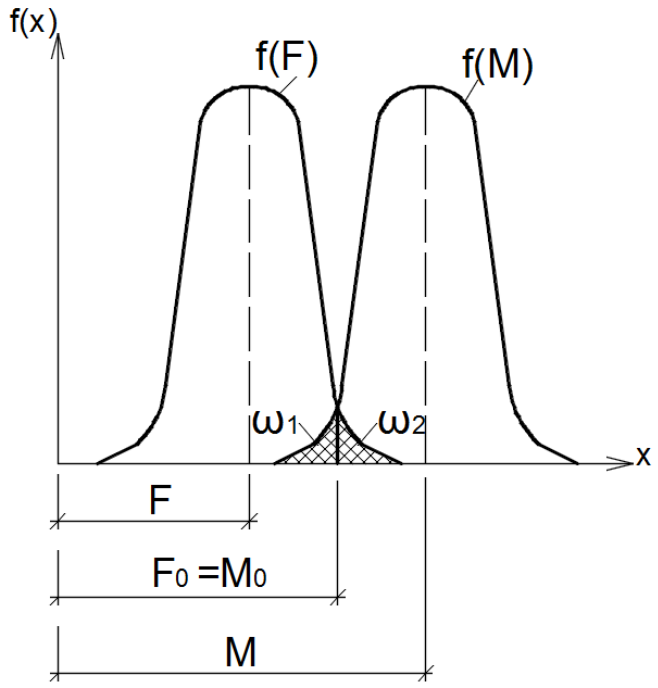

Рисунок 8 - К определению «гарантии неразрушимости»

Если Н.С. Стрелецкий предложил в вероятностно-статистическом методе проводить анализ двух случайных функций, то советский ученый, чл.-корр. АН СССР *А.Р. Ржаницын* предложил немного другой подход, который заключается в следующем.

Рассмотрим сначала случай, когда усилие от нагрузки описывается случайной величиной с плотностью распределения $f_F(F)$, а прочность принимает - одно детерминированное значение $Ф_{дет}$ (рис.9).

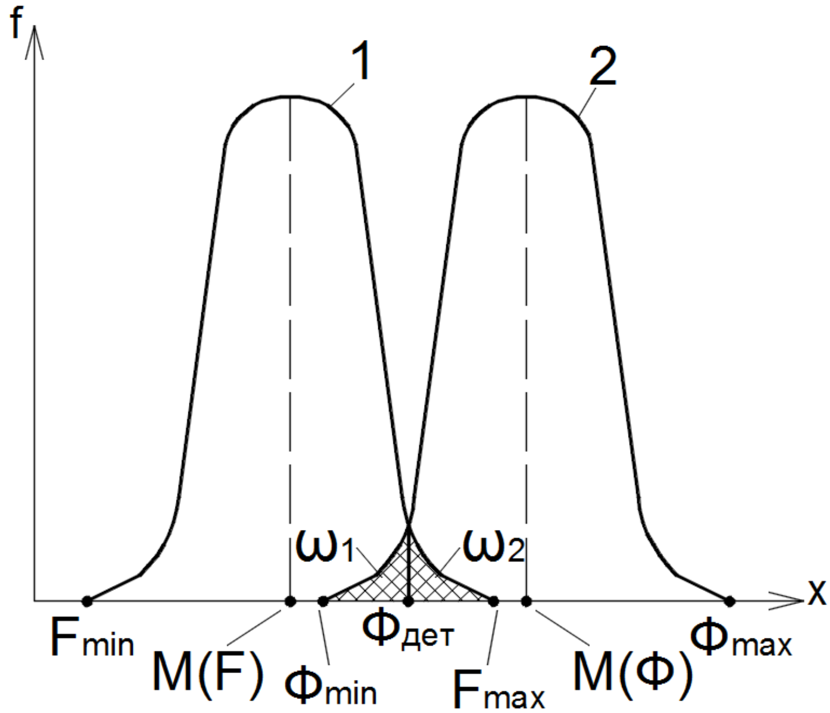

Рисунок 9 - Плотности распределения несущей способности $f_Ф(Ф)$ (кривая 1) и нагрузок $f_F(F)$ (кривая 2)

Тогда отказ работы наступит в том случае, когда усилие от нагрузки превысит значение прочности $Ф_{дет}$, $F - Ф_{дет} > 0$ с вероятностью Q, равной заштрихованной площади ω:

$$Q = \int_{Ф_{дет}}^{F_{max}} f_F(F)dF, \tag{59}$$

где F – максимальное значение нагрузки.

Тогда вероятность безопасной работы (надежность):

$$P = 1 - Q. \tag{60}$$

Если нагрузка и прочность случайные величины, то для нахождения вероятности отказа работы вводится случайная величина, которая называется резервом прочности и равна

$$Z = Ф - F. \tag{61}$$

Отказ происходит, когда

$$\Phi - F < 0 \text{ или } Z < 0. \qquad (62)$$

Область отказа определяется отрицательными значениями Z, а вероятность отказа равна заштрихованной площади на рис.10 и определяется:

$$Q = \int_{-Z_{min}}^{0} f(Z)dZ, \qquad (63)$$

где $Z_{min} = \Phi_{min} - F_{max}$.

Вероятность безотказной работы по-прежнему определяется формулой (60).

Следовательно, для определения вероятности безотказной работы конструкции необходимо знать распределение резерва прочности. На основе теории вероятностей закон распределения разности случайных величин имеет вид:

$$f(\phi) = \int_{\Phi_{min}}^{\Phi_{max}} f_{\Phi}(\Phi) \cdot f_F \cdot (\phi - Z)d\Phi, \qquad (64)$$

где Φ_{min} и Φ_{max} - минимальное и максимальное значения несущей способности.

Формула (64) справедлива, если нагрузка и прочность статистически независимы.

Приведенные формулы значительно упрощаются при нормальных законах распределения. Пусть

$$f_F(F) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi \cdot \sigma_F}} \cdot e^{-\frac{(F - M(F))^2}{2 \cdot M(F)^2}} \text{ и } f_{\phi}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi \cdot \sigma_{\Phi}}} \cdot e^{-\frac{(F - M(\phi))^2}{2 \cdot M(\phi)^2}}, \qquad (65)$$

где $M(F)$, σ_F и $M(\phi)$, σ_{Φ} - математическое ожидание и стандарт распределения усилий соответственно от нагрузки и несущей способности.

Распределение разности случайных величин, распределенных по нормальному закону, будет также нормальным:

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi \cdot \sigma_Z}} \cdot e^{-\frac{(Z - M(Z))^2}{2 \cdot M(Z)^2}}, \qquad (66)$$

с параметрами M(Z) = M(Ф) - M(F) и σ_Z^2 = $\sigma_Ф^2$ - σ_F^2.

Вероятность отказа:

$$Q = 0{,}5 – Ф(\gamma), \tag{67}$$

где $\gamma = \frac{M(Z)}{Z}$ – число стандартов, укладывающихся в интервале от Z=0 до Z = M(Z);

$Ф(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2П}} \cdot \int_0^{\gamma} \exp(-0{,}5x^2)\,dx$ – интеграл вероятностей.

Для интеграла вероятностей составлены таблицы, которые приводятся в справочниках и книгах по теории вероятностей. Величину γ называют характеристикой безопасности. Определенному значению γ соответствует вероятность отказа. Использование приведенных формул для γ, M(Z) и σ_Z при нормальных законах распределения нагрузки и несущей способности приводит к следующей расчетной формуле:

$$\gamma = \frac{M(Ф) - M(F)}{\sigma_Ф^2 - \sigma_F^2} \geq \gamma_н, \tag{68}$$

где $\gamma_н$ - характеристика безопасности, соответствующая нормативному значению надежности.

Для применения формул (57-64) необходимо знать плотности распределения нагрузки, несущей способности. Таким образом, вероятностный подход предполагает решение детерминистической задачи, расширяет ее возможности, дает оценку точности решения и определяет количественную меру риска выхода из строя конструкций.

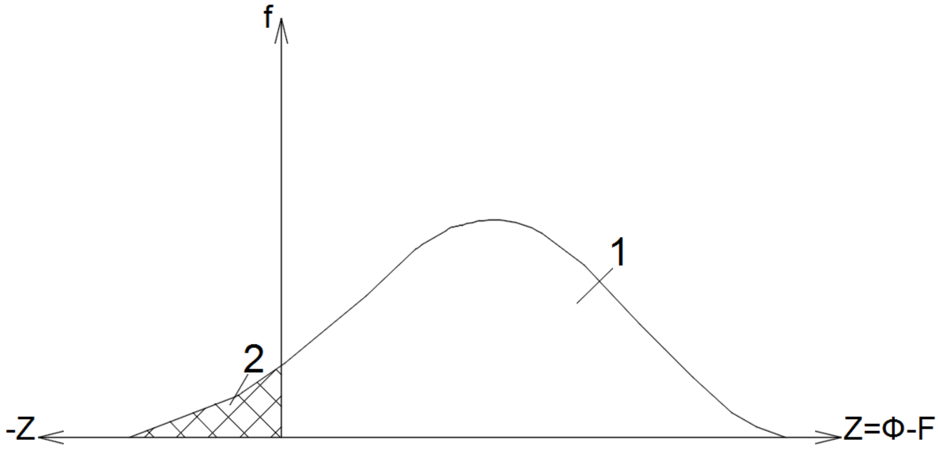

Рисунок 10 - Плотность распределения резерва прочности: 1 - область безотказной работы; 2 - область отказов

Таким образом, А.Р. Ржаницын в отличии от Н.С. Стрелецкого, использовал в вероятностном расчете не две случайные величины, а случайную функцию.

А.П.Кудзис предложил заменить случайный процесс одномерной композиционной случайной величиной $\tilde{Z} = \tilde{R} - \tilde{S}$. Тогда вероятность безотказной работы элементов может быть определена путем сопоставления случайных величин сопротивления $\tilde{R}$ и усилия $\tilde{S}$ с помощью формул:

$$P\{Z>0\}= \int_0^{\infty} f_s(S)[\int_R^{-\infty} f_R(a)da]dS = \int_0^{\infty} f_s(S)[1-F_R(R)]dS, \quad (69)$$

$$P\{Z>0\}= \int_0^{\infty} f_R(R)[\int_0^{R} f_S(b)db]dR = \int_0^{\infty} f_R(R)F_S(S)]dR, \quad (70)$$

где f_R(R), F_R(R) и f_s(S), F_S(S) – функции одномодального распределения вероятностей соответственно сопротивления и усилия.

Графически сущность расчета показана на рисунках 11-12.

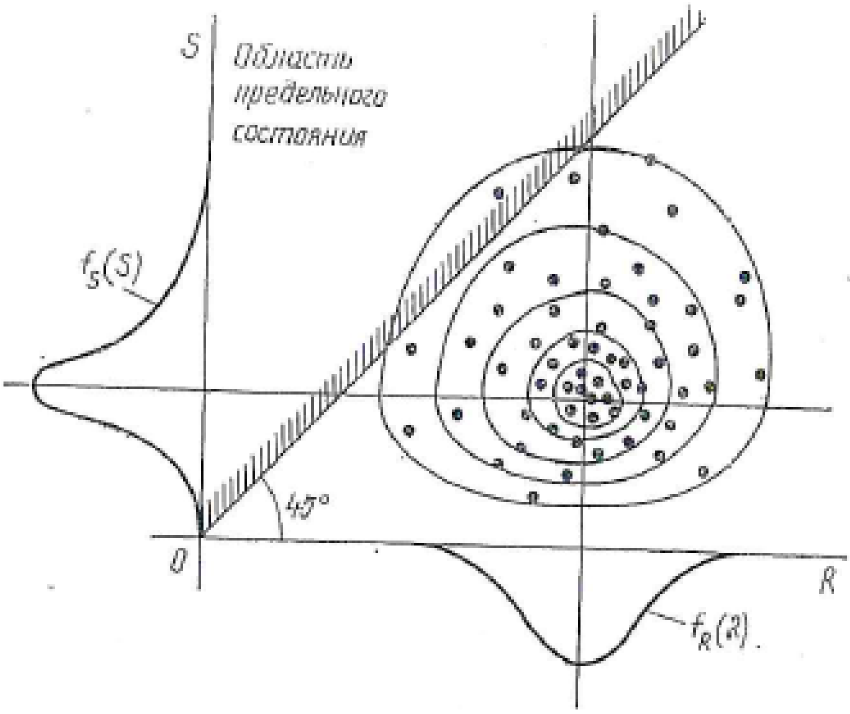

Рисунок 11 - К вычислению вероятности работоспособности, надежности и безопасности элементов при известных законах распределения усилия S и сопротивления R

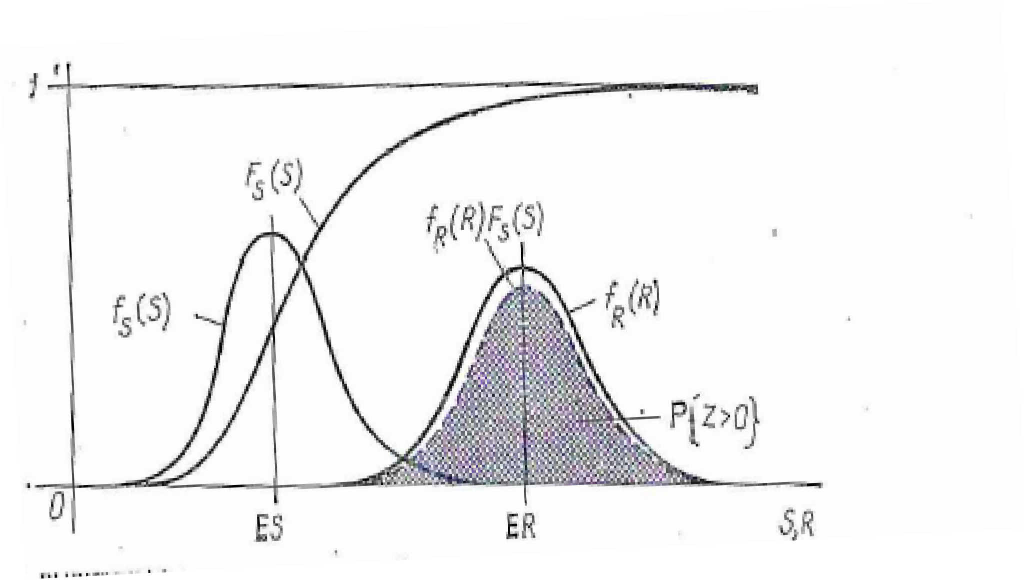

Рисунок 12 - К вычислению вероятности работоспособности, надежности и безопасности элементов по формуле (70)

Анализирую формулы, можно сделать вывод, что вероятность работоспособности, надежности и безопасности элементов в основном зависит от левостороннего отклонения сопротивления и правостороннего отклонения усилия от их средних значений.

Для вычисления мгновенной вероятности работоспособности элементов может быть использована также композиционная функция $\xi = \frac{R}{S}$. Среднее значение данной функции $E\cdot\xi = E\cdot R/E\cdot S$ является так называемым коэффициентом запаса или точнее – условным коэффициентом надежности элементов [23].

При нормальном законе распределения случайной величины $\xi = \frac{R}{S}$ вероятность работоспособности, надежности и безопасности элементов:

$$P\{\xi>1\} = \Phi[(E\cdot\xi-1)/\sigma\xi], \tag{71}$$

где $\Phi[(E\cdot\xi-1)/\sigma\xi]$ – табулированная функция ее нормированного нормального распределения [23].

Под табулированием понимается вычисление значений функции при изменении аргумента от некоторого начального значения до некоторого конечного значения с определённым шагом. Именно так составляются таблицы значений функций.

Если воспользоваться неравенством Чебышева, то вероятность работоспособности элементов:

$$P\{\xi>1\}=1-1/[1+(E\cdot\xi-1)^2/\sigma^2\xi]. \tag{72}$$

При логарифмически нормальном распределении сопротивления и усилия вероятность:

$$P\{\xi>1\}= \Phi[\frac{\ln\left(\frac{ER}{ES}\right)[(1+\sigma_R^2)/(1+\sigma_S^2)]^{1/2}}{[\ln(1+\sigma_R^2)/(1+\sigma_S^2)]^{1/2}}]. \tag{73}$$

Если сопротивление и усилие элементов выражаются сложными нелинейными функциями, то вероятность их работоспособности целесообразно определять методом статистических испытаний на ЭВМ. В результате случайных реализаций функции $\tilde{Z} = \tilde{R} - \tilde{S}$ или $\xi = \frac{R}{S}$ вычисляется вероятность работоспособности, надежности и безопасности:

$$P\{Z>0\} = (n\text{-}m)\cdot n \tag{74}$$

$$\text{или } P\{\xi>1\}= (n\text{-}m)\cdot n, \tag{75}$$

где n – общее число испытаний;

m – число результатов в области предельного состояния элемента [26].

Срок службы некоторых конструкций, находящихся в суровых условиях нагружения и воздействия окружающей среды, относительно небольшой. При обследовании эксплуатируемых и закончивших свою службу зданий и сооружений могут быть определены опытные статистики распределения наработки конструкций на отказ. Обычно эти статистики относятся к наработке на предельное состояние второй группы. При знании законов и статистик распределения оценка надёжности строительных конструкций не представляет сложности [13].

На основании приведенного обзора можно сделать следующие выводы.

1. В современных нормативных документах нет единого общепринятого подхода по расчету на надежность и безопасность строительных конструкций.

2. Как показывает опыт строительства и эксплуатации зданий и сооружений, который заключается в различных видах аварий и разрушений, расчеты должны основываться на применении методов теории надежности (вероятностные методы), которые позволяют учитывать **случайную** природу поведения несущих конструкций в процессе эксплуатации.

3. Расчеты на надежность и безопасность строительных конструкций связаны с вероятностью безотказной работы конструкции.

4. Совершенствование метода предельных состояний представлено несколькими вероятностными подходами, и на данный период времени, отсутствует их сравнение и точная оценка.

5. Вероятностный подход к расчету конструкций позволит проектировать их с заданным уровнем надежности и безопасности, а следовательно, получать эффективные проектные решения.

2 МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ АНАЛИЗА МЕТОДОВ РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ

Для оценки надежности и безопасности строительных конструкций методами, описанными в предыдущих главах, необходимо ознакомиться с методами вычислительной математики, с помощью которых будут выполняться все математические действия исследований.

Для решения поставленных задач данного дипломного проекта будут использованы методики вычисления определенного интеграла - для нахождения площадей, двойного интеграла – для вычисления объема.

2.1 Нормальный закон распределения

Нормальный закон распределения часто встречается на практике. Главная его особенность состоит в том, что он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при часто встречающихся типичных условиях. Непрерывная случайная величина X имеет нормальный закон распределения (закон Гаусса) с параметрами M(X)=E и σ^2, если ее плотность вероятности имеет вид [27]:

$$\varphi_{\text{x}} = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\Pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(\text{x}-\text{E})^2}{2\sigma^2}}, \tag{76}$$

где M(X) = E-математическое ожидание случайной величины (см. главу 1.2);

σ - среднее квадратическое отклонение случайной величины (см. главу 1.2).

Кривую нормального закона распределения называют нормальной, или гауссовой кривой. На рисунке 13 приведены нормальная кривая $\varphi_N(X)$ с параметрами E и σ^2, и график функции распределения случайной величины X, имеющей нормальный закон. Обратим внимание на то, что нормальная кривая симметрична относительно прямой x = E, имеет максимум в точке x = E, равный

$\text{x}_{max} = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\Pi})}$, а две точки перегибы x=E±σ с ординатой $f_{\text{пер}}(\text{E} \pm \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi\text{e}}}$ [27].

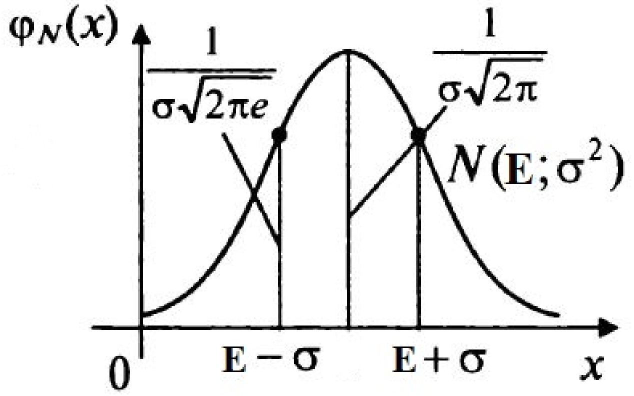

Рисунок 13 –Закон нормального распределения

2.2 Вычисление определенных интегралов

В процессе решения конкретных задач, как в научной, так и в инженерной практике возникает необходимость вычисления определенных интегралов вида:

$$I\,(f) = \int_a^b f(x)dx, \tag{77}$$

Подынтегральная функция $f(x)$ может быть задана одним из трех способов:

1. Задается явная формула для $f(x)$;
2. Функция $f(x)$ явно не задана, но ее значение может быть вычислено при любом x из отрезка $a,\ b$.
3. Для некоторого фиксированного конечного набора точек x_i из отрезка $a,\ b$ задается таблица значений x_i, $f(x_i)$.

Интегралы от функций первого типа иногда удается вычислить аналитически, либо вручную, либо с помощью машинных символьных систем. Интегралы от функций второго и третьего типа (а также первого, если не используются символьные методы) обычно находят численными методами, т.е. методами, позволяющими найти численное значение определенного интеграла приближенно с любой степенью точности [24].

Все методы приближенного вычисления определенных интегралов основаны на геометрическом смысле интеграла Ньютона-Лейбница. Он заключается в том, что определенный интеграл численно равен площади S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f\,(x)$, осью абсцисс и двумя прямыми x_a и x_b. Как показано на рисунке 14.

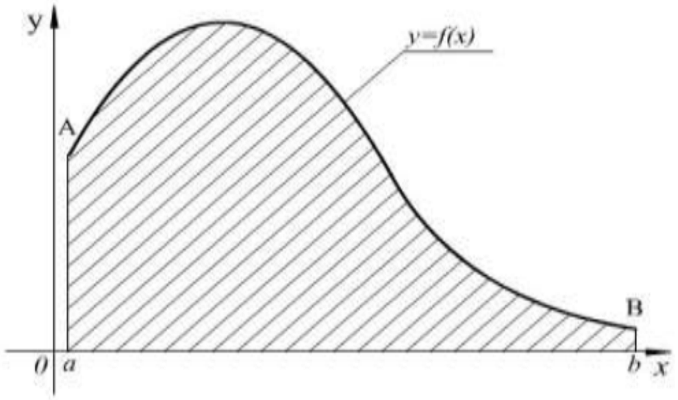

Рисунок 14 – Геометрический смысл интеграла Ньютона-Лейбница

$$I\,(f) = \int_a^b f(x)dx = F\,(a) - F\,(b), \tag{78}$$

где $f\,(x)$ - подынтегральная функция;

dx – знак дифференцирования;

a, b – пределы интегрирования;

F (a) – значение первообразной в верхнем пределе;

F (b) - значение первообразной в нижнем пределе.

Таким образом, для вычисления определённого интеграла необходимо найти первообразную подынтегральной функции, но для начала следует найти неопределённый интеграл. Постоянная из последующих вычислений исключается. Затем применяется формула Ньютона-Лейбница.

Геометрическим смыслом одинарного интеграла – является площадь.

Основная таблица неопределенных интегралов представлена на рисунке 15.

1) $\int 0 \cdot dx = C$	8) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
2) $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$	9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
3) $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1, \;\; x > 0$	10) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
4) $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	11) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad \lvert x\rvert < \lvert a\rvert$
5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	12) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$
6) $\int e^x dx = e^x + C$	13) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C, \quad \lvert x\rvert \neq a$
7) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	14) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$

Рисунок 15 – Таблица неопределенных интегралов

Не всегда поставленные задачи сводятся к определению площадей т.е. нахождения одинарного интеграла. В некоторых задачах целью является нахождение объема, и тогда используют понятие двойного интеграла.

Двойной интеграл в общем виде записывается следующим образом:

$$\iint_D f(x,y)dxdy, \tag{79}$$

где D – область интегрирования;

$f\,(x,y)$ – подынтегральная функция двух переменных;

dx, dy – знаки дифференциалов.

Геометрическим смыслом двойного интеграла является объем.

Для вычисления двойного интеграла, необходимо свести его к так называемым повторным интегралам. Сделать это можно двумя способами. Наиболее распространён следующий способ:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int dx \int f(x,y)dy. \tag{80}$$

У внешнего интеграла $\int dx$ пределами интегрирования являются числа, а у внутреннего – это функции одной переменной у = $f(x)$.

После перехода к повторным интегралам, непосредственно следует вычисления сначала внутреннего интеграла, а потом внешнего.

Существует еще один способ сведения двойного интеграла к повторным, но он встречается крайне реже. Внешний вид его представлен как

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int dy \int f(x,y)dx. \qquad (81)$$

Во втором способе уже меняется порядок интегрирования.

Сложность нахождения функции распределения случайной величины, распределенной по нормальному закону и вероятности ее попадания на некоторый промежуток связана с тем, что интеграл от функции является «неберущимся» в элементарных функциях. Поэтому их выражают через функцию:

$$\Phi(\mathrm{X}) = \frac{2}{\sqrt{2\Pi}} \cdot \int_0^{\mathrm{x}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \cdot \int_{-\mathrm{x}}^{\mathrm{x}} \mathrm{e}^{-t^2/2} dt, \qquad (82)$$

- функцию (интеграл вероятностей) Лапласа, для которой составлены таблицы, т.е. функция $\Phi(\mathrm{X})$ табулирована. Для применения этой таблицы необходимо знать свойства функции Ф(Х).

1. Функция $\Phi(\mathrm{X})$ нечетная, т.е. $\Phi(-\mathrm{X}) = -\Phi(\mathrm{X})$.
2. Функция $\Phi(\mathrm{X})$ монотонно возрастающая, причем при х→+∞ $\Phi(\mathrm{X})$→1 (практически можно считать, что уже при х>4 $\Phi(\mathrm{X}) \approx 1$).
3. Так как производная интеграла по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции при значении верхнего предела и всегда положительна, то Ф(Х) монотонно возрастает на всей числовой прямой [27].

Если вероятность P наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность того, что число m наступления события A в n независимых испытаниях заключено в пределах от a до b (включительно), при достаточно большом числе n приближенно равна:

$$P_n(a \leq m \leq b) \approx [\Phi(t_2) - \Phi(t_1)], \quad (83)$$

где $t_1 = \frac{x_1 - E}{\sigma}$ и $t_2 = \frac{x_2 - E}{\sigma}$.

Геометрическая функция Лапласа Ф(Х) представляет собой площадь под стандартной нормальной кривой на отрезке [-х;х].

Также если случайная величина Х имеет нормальный закон распределения с параметрами Е и σ^2, то ее значения заключены в интервале (Е-3σ; Е+3σ). Данное заключение носит название «правило трех сигм». Нарушение «правила трех сигм», т.е. отклонение нормально распределенной случайной величины Х больше, чем на 3σ (по абсолютной величине), является событием практически невозможным, так как его вероятность весьма мала и составляет 0,0027[27].

2.3 Многомерные случайные величины

Очень часто результат испытания характеризуется не одной случайной величиной, а некоторой системой случайных величин X_1, X_2……..X_n, которую называют также многомерной (п-мерной) случайной величиной или случайным вектором. Функцией распределения п-мерной случайной величины (X1, X2……..Xn) называется функция $F(x_1, x_2……x_n)$ выражающая вероятность совместного выполнения n неравенств:

$$F(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n). \quad (84)$$

В двумерном случае для случайной величины (Х, У) функция распределения F(x, y) определится равенством:

$$F(x,y) = P(X < x, Y < y). \quad (85)$$

Геометрически функция распределения F(x, y) означает вероятность попадания случайной точки (Х, У) в заштрихованную область – бесконечный квадрант, лежащий левее и ниже точки Е(х,у).

Геометрически функция распределения есть некоторая поверхность, обладающая указанными свойствами. Для дискретной случайной двумерной величины (x,y) ее функция распределения представляет собой некоторую ступенчатую поверхность, ступени которой соответствуют скачкам функции F(x, y).

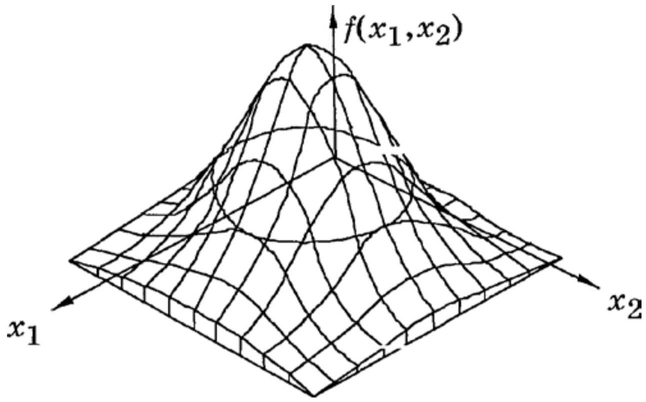

Рисунок 16 – Вид двумерной величины

Плотностью вероятности (плотностью распределения или совместной плотностью) непрерывной двумерной случайной величины (X, У) называется вторая смешанная частная производная ее функции распределения, т.е.

$$\varphi(x, y) = \frac{\partial F(x. y)}{\partial \text{x} \, \partial \text{y}} = F_{xy}^{``}(x, y)\,. \tag{86}$$

Геометрически плотность вероятности двумерной случайной величины (X, У) представляет собой поверхность распределения в пространстве Oxyz (см.рисунок 17). Плотность вероятности $\varphi(x, y)$ обладает свойствами, аналогичными свойствам плотности вероятности одномерной случайной величины.

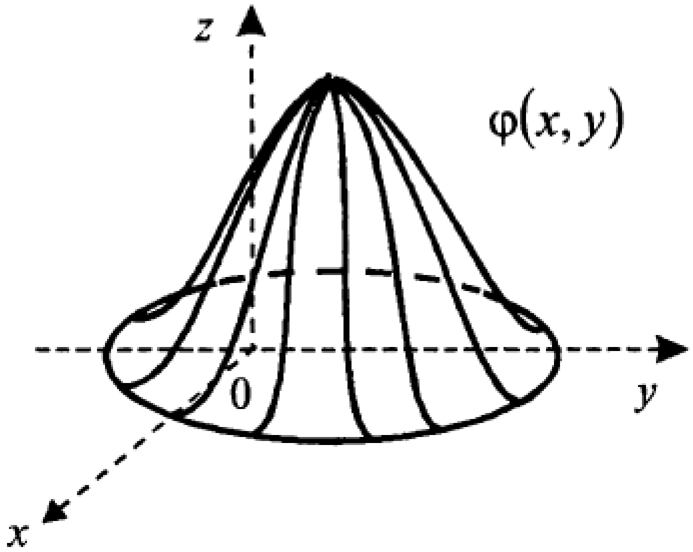

Рисунок 17 – Поверхность распределения двумерной случайной величины

Вероятность попадания непрерывной двумерной величины (Х, У) в область D равна:

$$\mathrm{P}[(\mathrm{X},\mathrm{У})] \in D = \iint \varphi(x,y)dxdy. \quad (87)$$

Для двумерной случайной величины (Х,У) вводится понятие «элемент вероятности», равный $\varphi(x,y)dxdy$. Он представляет (с точностью до бесконечно малых более высоких порядков) вероятность попадания случайной точки (Х, У) в элементарный прямоугольник со сторонами dx и dy (см.рисунок 18).

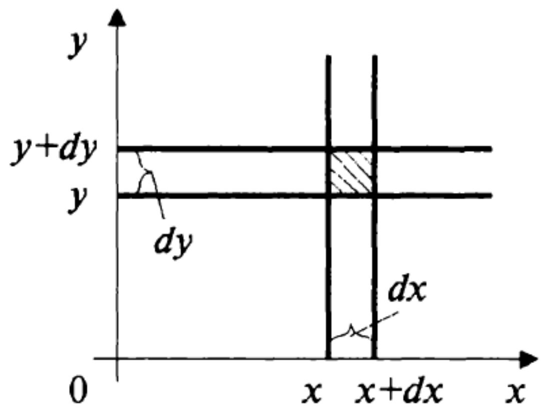

Рисунок 18 – Элементарный прямоугольник со сторонами dx и dy

					08.04.01.2020.078-ПЗ КНР	Лист
						62
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		

Эта вероятность приближенно равна объему элементарного параллелепипеда с высотой $\varphi(x, y)$, опирающегося на элементарный прямоугольник со сторонами dx и dy. Если вероятность попадания одномерной случайной величины на отрезок [a, b] геометрически выражалась площадью фигуры, ограниченной сверху кривой распределения φ(x) и опирающейся на отрезок [a, b], и аналитически выражалась интегралом $\int_a^b f(x)dx$ (формула 84), то вероятность попадания двумерной случайной величины в область D на плоскости Oxy геометрически изображается обьемом цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью распределения φ(x,y) и опирающегося на область D, а аналитически - двойным интегралом[27].

Если случайные величины x и y –независимые, то плотность двумерной величины можно записать как:

$$\varphi(x,y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y) = m \cdot n[\, e^{-\frac{(x-E_x)^2}{2\sigma_x^2}} \cdot e^{-\frac{(x-E_y)^2}{2\sigma_y^2}}\,]. \quad (88)$$

3 ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЧЕТОВ С ЦЕЛЬЮ ИССЛЕДОВАНИЯ МЕТОДОВ РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ

Исходными данными для исследования выбрана строительная конструкция - железобетонная колонна класса В25 квадратного сечения 40х40 см^2 с продольной арматурой класса А400 4Ø22 мм, расчетная длина колонны – 3,9 м. Постоянная и временная нагрузки принимаются соответственно 35 $\frac{кН}{м^2}$ и 25 $\frac{кН}{м^2}$. Грузовая площадь колонны $A_{груз}$ = 36 м^2. Расчетное сопротивление сжатию арматуры класса А400 350 МПа, расчетное сопротивление бетона класса В25 согласно [28]14,5 МПа.

<u>Метод, предложенный Н.С. Стрелецким</u>

Согласно разделу 1.3.6 для вероятностно-статистического метода определения надежности строительной конструкции по методу, предложенному Н.С. Стрелецким - колонны необходимо построение кривых распределения внешнего усилия N_{ext} и несущей способности N_{ult}.

Определение внешнего усилия N_{ext} по грузовой площади колонны определяется как

$$N_{ext} = A_{груз} \cdot (p+q), \tag{89}$$

где $A_{груз}$ = 36 м^2 – грузовая площадь колонны;

$p = 35\,\frac{кН}{м^2}$ – постоянная нагрузка;

$q = 25\,\frac{кН}{м^2}$ – временная нагрузка.

В формуле (89) составляющие $A_{груз}$, p, q принимаются случайными величинами, и N_{ext} , следовательно, случайная функция, зависящая от данных составляющих. Таким образом, формулу (89) можно представить в виде:

$$\widetilde{N_{ext}} = Ф\,(A_{груз}, p, q). \tag{90}$$

Устанавливаем изменение внешнего усилия N_{ext} под влиянием изменчивости каждой из составляющих функции случайной величины $\widetilde{N_{ext}}$.

- Влияние изменчивости грузовой площади $A_{груз}$ на N_{ext} :

$$\sigma_{N_{ext.A_{груз}}} = \left|\frac{d\Phi}{dA_{груз}}\right| \cdot \sigma_{A_{груз}} = (p+q) \cdot \sigma_{A_{груз}}, \tag{91}$$

где $\sigma_{A_{груз}} = 1{,}5$ м^2 – среднеквадратичное отклонение грузовой площади;

$\left|\frac{d\Phi}{dA_{груз}}\right|$ – дифференцирование функции Ф по грузовой площади $A_{груз}$.

$$\sigma_{N_{ext.A_{груз}}} = (35+25) \cdot 1{,}5 = 90 \text{ кН}.$$

- Влияние изменчивости постоянной нагрузки p на N_{ext}:

$$\sigma_{N_{ext.p}} = \left|\frac{d\Phi}{dp}\right| \cdot \sigma_p = A_{груз} \cdot \sigma_p, \tag{92}$$

где $\sigma_p = 2\ \frac{кН}{м^2}$ – среднеквадратичное отклонение постоянной нагрузки;

$\left|\frac{d\Phi}{dp}\right|$ – дифференцирование функции Ф по постоянной нагрузке p.

$$\sigma_{N_{ext.p}} = 36 \cdot 2 = 72 \text{ кН}.$$

- Влияние изменчивости временной нагрузки q на N_{ext}:

$$\sigma_{N_{ext.q}} = \left|\frac{d\Phi}{dq}\right| \cdot \sigma_q = A_{груз} \cdot \sigma_q, \tag{93}$$

где $\sigma_p = 2\ \frac{кН}{м^2}$ – среднеквадратичное отклонение временной нагрузки;

$\left|\frac{d\Phi}{dq}\right|$ – дифференцирование функции Ф по постоянной нагрузке p.

$$\sigma_{N_{ext.q}} = 36 \cdot 2 = 72 \text{ кН}.$$

Суммарное влияние $A_{груз}$, p, q на N_{ext}:

$$\sigma^2_{N_{ext}} = \sigma^2_{N_{ext.A_{груз}}} + \sigma^2_{N_{ext.p}} + \sigma^2_{N_{ext.q}} = 90^2+72^2+72^2 = 18468 \text{ кН}^2 \tag{94}$$

$$\sigma_{N_{ext}} = 135{,}9 \text{ кН}.$$

Математическое ожидание внешней силы принимается как значение внешней силы, рассчитанной по формуле (89) без учета ее случайного характера:

$$E_{N_{ext}} = N_{ext} = 36 \cdot (35+25) = 2160 \text{ кН}.$$

Таким образом, для построения кривой распределения получены числовые характеристики случайной величины N_{ext}:

математическое ожидание $E_{N_{ext}}$ = 2160 кН;

среднеквадратичное отклонение $\sigma_{N_{ext}}$ = 135,9 кН.

Определение несущей способности колонны N_{ult} определяется согласно п.8.1.16 [23] предельное значение несущей способности вычисляется как:

$$N_{ult} = \varphi \cdot (R_b \cdot A + R_{sc} \cdot A_{s.tot}), \qquad (95)$$

где A – площадь бетонного сечения;

$A_{s.tot}$ – площадь продольной арматуры в сечении элемента;

R_{sc} – расчетное значение сопротивления сжатию;

R_b – расчетное значение сопротивления бетона;

φ – коэффициент, принимаемый при длительном действии нагрузки. Он принимается по таблице 8.1 [23] в зависимости от гибкости элемента, где l_0 – расчетная длина колонны, а h – ширина поперечного сечения колонны. Таблица 8.1 представлена на рисунке 19.

Класс бетона	φ при l_0/h, равном			
	6	10	15	20
B20 – B55	0,92	0,9	0,83	0,7
B60	0,91	0,89	0,80	0,65
B80	0,90	0,88	0,79	0,64

Рисунок 19 – Определение коэффициента φ по [23]

График зависимости φ от l_0/h представлен на рисунке на 20.

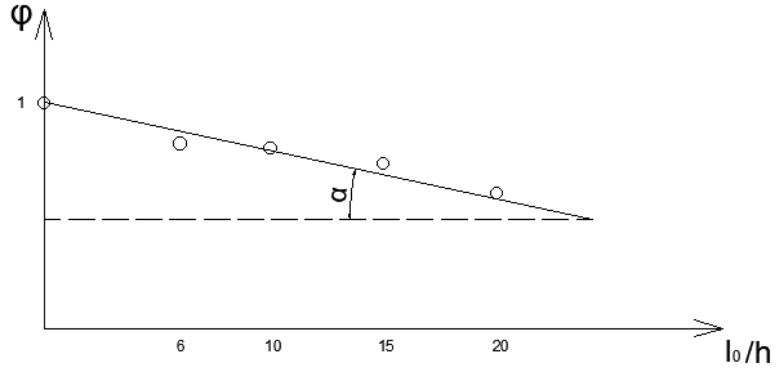

Рисунок 20 – Определение коэффициента φ

По графику можно принять линейную зависимость φ = Ф (l_0/h):

$$\varphi = 1 - a \cdot l_0/h\ , \tag{96}$$

где a=tgα = (1-0,7)/20 = 0,015.

Учет вероятностного смысла в определении коэффициента φ состоит в том, что l_0 и h – изменчивы, то есть являются случайными величинами. Заданы основные числовые характеристики для случайных величин l_0 и h – математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение.

Принимаем l_0 = 0,7l……1,5l, где l – высота колонны. Коэффициент вариации $\upsilon_{l_0}\approx$ 0,3 (30%). Зададим E_{l_0} = 280 см, тогда σ_{l_0} =0,3·2,8=0,84 см, E_h =1 см, σ_h = 0,5 см.

Для определения σ_φ используется тот же подход как и для определения N_{ext}:
- Влияние изменчивости расчетной длины колонны l_0 на φ:

$$\sigma_{\varphi.l_0} = \left|\frac{d\Phi}{dl_0}\right| \cdot \sigma_{l_0} = (0.0015/h) \cdot \sigma_{l_0}, \tag{97}$$

где σ_{l_0} = 0,84 см – среднеквадратичное отклонение расчетной длины колонны;

$\left|\frac{d\Phi}{dl_0}\right|$ – дифференцирование функции Ф по расчетной длине колонны l_0;

$$\sigma_{\varphi.l_0} = (0{,}015/40) \cdot 0{,}84 = 0{,}000315.$$

- Влияние изменчивости ширины поперечного сечения колонны h на φ:

$$\sigma_{\varphi.h} = \left|\frac{d\Phi}{dh}\right| \cdot \sigma_h = (0.0015 \cdot l_0/h^2) \cdot \sigma_h, \quad (98)$$

где σ_h = 0,5 (см) – среднеквадратичное отклонение ширины поперечного сечения колонны;

$\left|\frac{d\Phi}{dh}\right|$ – дифференцирование функции Ф по ширине поперечного сечения колонны h.

$$\sigma_{\varphi.h} = (0{,}015 \cdot 390/40^2) \cdot 0{,}5 = 0{,}002.$$

Суммарное влияние l_0 и h на σ_φ:

$$\sigma_\varphi^2 = \sigma_{\varphi.h}^2 + \sigma_{\varphi.l_0}^2 = 0{,}000315^2 + 0{,}002^2 = 0{,}002. \quad (99)$$

$$\sigma_\varphi = 0{,}05 \text{ кН}.$$

Математическое ожидание коэффициента φ принимается как значение коэффициента, рассчитанного по формуле (3.3) без учета его случайного характера:

$$\varphi = 1 - a \cdot l_0/h = 1 - 0{,}015 \cdot (3{,}9/0{,}4) = 0{,}86. \quad (100)$$

Таким образом, для φ получены числовые характеристики случайной величины φ:

математическое ожидание E_φ = 0,86;

среднеквадратичное отклонение σ_φ = 0,05.

В формуле (95) составляющие φ, R_b, A, R_{sc}, $A_{s.tot}$ принимаются случайными величинами, и N_{ult}, следовательно, случайная функция, зависящая от данных составляющих. Таким образом, формулу (95) можно представить в виде:

$$\widetilde{N_{ult}} = \Phi\,(\varphi, R_b, A, R_{sc}, A_{s.tot}). \quad (101)$$

Устанавливаем изменение несущей способности N_{ult} под влиянием изменчивости каждой из составляющих функции случайной величины $\widetilde{N_{ult}}$:

- Влияние изменчивости коэффициента φ на N_{ult}:

$$\sigma_{N_{ult.\varphi}} = \left|\frac{d\Phi}{d\varphi}\right| \cdot \sigma_{\varphi} = (R_b \cdot A + R_{sc} \cdot A_{s.tot}) \cdot \sigma_{\varphi}, \qquad (102)$$

где σ_{φ} =0,05 – среднеквадратичное отклонение коэффициента φ(был вычислен ранее);

$\left|\frac{d\Phi}{d\varphi}\right|$– дифференцирование функции Ф по коэффициенту φ.

$$\sigma_{N_{ult.\varphi}} = (14 \cdot 40 \cdot 40 + 350 \cdot 15{,}2) \cdot 0{,}05 = 138{,}6 \text{ кН}.$$

- Влияние изменчивости расчетного сопротивления бетона R_b на N_{ult}:

$$\sigma_{N_{ult.R_b}} = \left|\frac{d\Phi}{dR_b}\right| \cdot \sigma_{R_b} = (A \cdot \varphi) \cdot \sigma_{R_b}, \qquad (103)$$

где σ_{R_b}=0,02 $\frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$ – среднеквадратичное отклонение расчетного сопротивления бетона R_b;

$\left|\frac{d\Phi}{dR_b}\right|$– дифференцирование функции Ф по расчетному сопротивлению бетона R_b.

$$\sigma_{N_{ult.R_b}} = 40 \cdot 40 \cdot 0{,}86 \cdot 0{,}02 = 27{,}52 \text{ кН}.$$

- Влияние изменчивости площади бетонного сечения А на N_{ult}:

$$\sigma_{N_{ult.A}} = \left|\frac{d\Phi}{dA}\right| \cdot \sigma_{A} = (\varphi \cdot R_b) \cdot \sigma_{A}, \quad 1 \qquad (104)$$

где σ_A = 5 см^2 – среднеквадратичное отклонение площади бетонного сечения А;

$\left|\frac{d\Phi}{dA}\right|$– дифференцирование функции Ф по площади бетонного сечения А.

$$\sigma_{N_{ult.A}} = (0{,}86 \cdot 1{,}45) \cdot 5 = 6{,}235 \text{ кН}.$$

- Влияние изменчивости расчетного сопротивления сжатию арматуры R_{sc} на N_{ult}:

$$\sigma_{N_{ult.R_{sc}}} = \left|\frac{d\Phi}{dR_{sc}}\right| \cdot \sigma_{R_{sc}} = (A_{s.tot} \cdot \varphi) \cdot \sigma_{R_{sc}}, \qquad (105)$$

где $\sigma_{R_{sc}}$= 0,5 $\frac{кН}{см^2}$ – среднеквадратичное отклонение расчетного сопротивления сжатию арматуры R_{sc};

$\left|\frac{d\Phi}{dR_{sc}}\right|$– дифференцирование функции Ф по расчетному сопротивлению сжатию арматуры R_{sc}.

$$\sigma_{N_{ult.R_b}} = 0{,}86 \cdot 15{,}2 \cdot 0{,}5 = 6{,}536 \text{ кН}.$$

- Влияние изменчивости площади продольной арматуры $A_{s.tot}$ на N_{ult}:

$$\sigma_{N_{ult.A_{s.tot}}} = \left|\frac{d\Phi}{dA_{s.tot}}\right| \cdot \sigma_{A_{s.tot}} = (\varphi \cdot R_{sc}) \cdot \sigma_{A_{s.tot}}, \quad (106)$$

где $\sigma_{A_{s.tot}}$ = 0,25 см^2 – среднеквадратичное отклонение площади продольной арматуры $A_{s.tot}$;

$\left|\frac{d\Phi}{dA}\right|$– дифференцирование функции Ф по площади продольной арматуры $A_{s.tot}$.

$$\sigma_{N_{ult.A}} = (0{,}86 \cdot 35) \cdot 0{,}25 = 7{,}525 \text{ кН}.$$

Суммарное влияние φ, R_b, A, R_{sc}, $A_{s.tot}$ на N_{ult}:

$$\sigma^2_{N_{ult}} = \sigma^2_{N_{ult.\varphi}} + \sigma^2_{N_{ult.R_b}} + \sigma^2_{N_{ult.A}} + \sigma^2_{N_{ult.R_{sc}}} + \sigma^2_{N_{ult.A_{s.tot}}} . \quad (107)$$

$$\sigma^2_{N_{ult}} = 138{,}6^2 + 27{,}52^2 + 6{,}235^2 + 6{,}536^2 + 7{,}525^2 = 20105{,}54 \text{ кН}^2.$$

$$\sigma_{N_{ult}} = 141{,}79 \text{ кН}.$$

Математическое ожидание несущей способности принимается как значение несущей способности, рассчитанной по формуле (95) без учета ее случайного характера:

$$E_{N_{ult}} = N_{ult} = 0{,}90125 \cdot (1{,}45 \cdot 40 \cdot 40 + 35 \cdot 15{,}2) = 2570{,}37 \text{ кН}.$$

Коэффициент φ был получен с помощью интерполяции при значении гибкости l_0/h = 3,9/0,4=9,75 м.

Таким образом, для построения кривой распределения получены числовые характеристики случайной величины N_{ult}:

математическое ожидание $E_{N_{ult}}$ = 2570,37 кН;

среднеквадратичное отклонение $\sigma_{N_{ult}}$ = 141,79 кН.

Принимаем, что несущая способность N_{ult} и внешнее усилие N_{ext} подчиняются нормальному закону распределения.

Нормальный закон распределения характеризуется плотностью вероятности вида:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\Pi}}\cdot e^{-\frac{(x-E)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (108)$$

где σ – среднеквадратичное отклонение;

Е – математическое ожидание.

Задавая значения x и подставляю их в формулу плотности можно построить закон распределения случайной величины.

Плотность вероятности для N_{ext} при подстановки переменных σ и Е имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{135{,}9\cdot\sqrt{2\cdot3{,}14}}\cdot e^{-\frac{(x-2160)^2}{2\cdot123{,}81^2}} = 0{,}0029\cdot e^{-\frac{(x-2160)^2}{36937{,}62}}. \qquad (109)$$

Плотность вероятности для N_{ult} при подстановки переменных σ и Е имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{141{,}79\cdot\sqrt{2\cdot3{,}14}}\cdot e^{-\frac{(x-2570{,}37)^2}{2\cdot141{,}79^2}} = 0{,}0028\cdot e^{-\frac{(x-2570{,}37)^2}{40208{,}81}}. \qquad (110)$$

Значения переменных N_{ult} и N_{ext} при значении x представлено в таблице 2.

Таблица 2 – Таблица для построения графиков

x	N_{ext}	N_{ult}
2160	$290\cdot10^{-5}$	$6\cdot10^{-5}$
2200	$280\cdot10^{-5}$	$9{,}3\cdot10^{-5}$
2250	$230\cdot10^{-5}$	$22\cdot10^{-5}$
2300	$170\cdot10^{-5}$	$46\cdot10^{-5}$
2350	$110\cdot10^{-5}$	$84\cdot10^{-5}$
2400	$61\cdot10^{-5}$	$136\cdot10^{-5}$
2450	$30\cdot10^{-5}$	$195\cdot10^{-5}$
2500	$10\cdot10^{-5}$	$248\cdot10^{-5}$
2550	$5\cdot10^{-5}$	$277\cdot10^{-5}$
2570,37	$3\cdot10^{-5}$	$280\cdot10^{-5}$

Графики кривых распределения внешнего усилия N_{ext} и несущей способности N_{ult} показаны на рисунке 21. Согласно методу, который предложил Н.С. Стрелецкий, гарантией неразрушимости является формула (56). Согласно рисунку 21, пересечением f (N_{ext}) с f (N_{ult}) является т.А с координатами x = 2362,87 и y = 0,00097. Тогда вероятность того, что нагрузка получит заниженное значение прочности:

$$\omega_1=\int_{-\infty}^{M_0} f(N_{ult})dN_{ult} = [\Phi\left(\frac{X_2-E_{N_{ult}}}{\sigma_{N_{ult}}}\right)-\Phi(\frac{X_1-E_{N_{ult}}}{\sigma_{N_{ult}}})]. \qquad (111)$$

$$\omega_1= [\Phi\left(\frac{2362{,}87-2570{,}37}{141{,}79}\right)-\Phi(\frac{-\infty-2570{,}37}{141{,}79})] = [\Phi(-1{,}46)-\Phi(-\infty)] = 0{,}4279.$$

Вероятность того, что нагрузка получит завышенное значение внешнего усилия:

$$\omega_2 = \int_{F_0}^{+\infty} f(N_{ext})N_{ext} = [\Phi\left(\frac{X_2-E_{N_{ext}}}{\sigma_{N_{ext}}}\right)-\Phi(\frac{X_1-E_{N_{ext}}}{\sigma_{N_{ext}}})]. \qquad (112)$$

$$\omega_2= [\Phi\left(\frac{+\infty-2160}{135.9}\right)-\Phi(\frac{2362.87-2160}{135.9})] = [\Phi(+\infty)-\Phi(1.49)] = 0{,}5681.$$

Гарантия неразрушимости (вероятность безотказной работы) железобетонной колонны класса В25 составляет:

$$\Gamma = 1 - \omega_1 \cdot \omega_2 = 1 - 0{,}4279 \cdot 0{,}5681 = 0{,}76 \cdot 100\% = 76\% \,. \qquad (113)$$

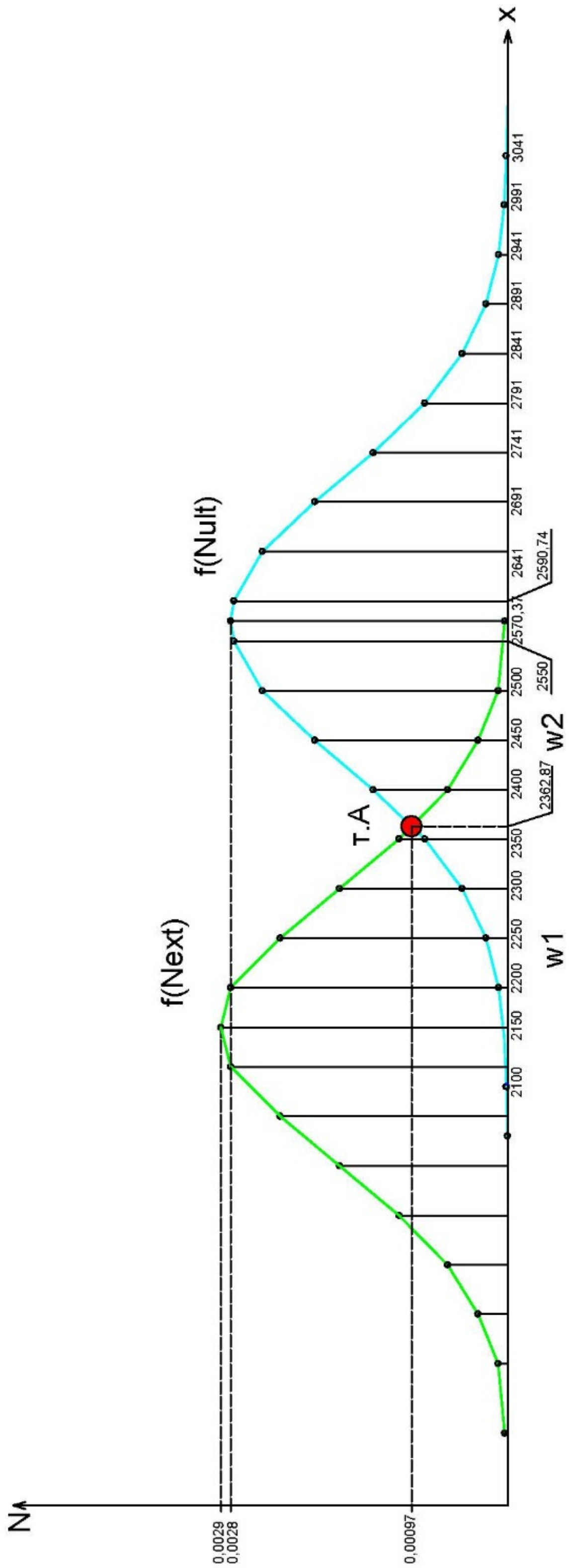

Рисунок 21 – Графики кривых распределения внешнего усилия N_{ext} и несущей способности N_{ult}

Метод, предложенный А.Р.Ржаницыным

Согласно разделу 1.3.6 для вероятностно-статистического метода определения надежности строительной конструкции по методу, предложенному А.Р. Ржаницыным - колонны необходимо построение кривой случайной величины резерва прочности Z. Определение резерва прочности определяется согласно формуле (61) как:

$$Z = Ф – F,$$

где Ф – значение прочности;

F – значение усилия от нагрузки.

В данной формуле составляющие Ф, F принимаются случайными величинами, и Z, следовательно, случайная функция, зависящая от данных составляющих. Таким образом, формулу (61) можно представить в виде:

$$\tilde{Z}=Ф(\widetilde{N_{ult}}; \widetilde{N_{ext}}). \quad (114)$$

Устанавливаем изменение резерва прочности Z под влиянием изменчивости каждой из составляющих функции случайной величины $\tilde{Z}$.

- Влияние изменчивости несущей способности колонны N_{ult} на Z:

$$\sigma_{Z_{N_{ult}}} = \left|\frac{dФ}{dN_{ult}}\right| \cdot \sigma_{N_{ult}} = 1\cdot \sigma_{N_{ult}}, \quad (115)$$

где $\sigma_{N_{ult}}$ = 141,79 кН – среднеквадратичное отклонение несущей способности колонны (вычислено в подразделе 3.1);

$\left|\frac{dФ}{dN_{ult}}\right|$ – дифференцирование функции Ф несущей способности колонны N_{ult}.

$$\sigma_{Z_{N_{ult}}} = 1\cdot 141{,}79 = 141{,}79 \text{ кН}.$$

- Влияние изменчивости внешней силы N_{ext} на Z:

$$\sigma_{Z_{N_{ext}}} = \left|\frac{dФ}{dN_{ext}}\right| \cdot \sigma_{N_{ext}} = 1\cdot \sigma_{N_{ext}}, \quad (116)$$

где $\sigma_{N_{ext}}$= 135,9 кН – среднеквадратичное отклонение внешней силы N_{ext} (вычислено в подразделе 3.1);

$\left|\frac{d\Phi}{dN_{ext}}\right|$– дифференцирование функции Ф по внешней силе N_{ext}.

$$\sigma_{Z_{N_{ext}}} = 1\cdot 135{,}9 = 135{,}9 \text{ кН}.$$

Суммарное влияние N_{ult} и N_{ext} на Z:

$$\sigma_Z^2 = \sigma_{Z_{N_{ult}}}^2 + \sigma_{Z_{N_{ext}}}^2 = 141{,}79^2+135{,}9^2 = 38573{,}21 \text{ кН}^2 \qquad (117)$$

$$\sigma_Z = 196{,}4 \text{ кН}.$$

Математическое ожидание резерва прочности принимается как значение разности несущей способности и внешней нагрузки, рассчитанной по формуле (61) без учета ее случайного характера:

$$\text{E}_Z = E_{N_{ult}} - E_{N_{ext}} = 2570{,}37 - 2160 = 410 \text{ кН}.$$

Таким образом, для построения кривой распределения получены числовые характеристики случайной величины Z:

математическое ожидание E_Z= 410 кН;

среднеквадратичное отклонение σ_Z = 196,4 кН.

Принимаем, что резерв прочности Z подчиняются нормальному закону распределения. Нормальный закон распределения характеризуется плотностью вероятности согласно формуле (76):

$$\text{f(x)} = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\Pi}}\cdot \text{e}^{-\frac{(\text{x}-\text{E})^2}{2\sigma^2}},$$

где σ – среднеквадратичное отклонение;

Е – математическое ожидание.

Задавая значения x и подставляю их в формулу плотности можно построить закон распределения случайной величины. Кривая распределения по нормальному закону имеет симметричный холмообразный вид.

Плотность вероятности для Z при подстановки переменных σ и E имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{196.4 \cdot \sqrt{2 \cdot 3,14}} \cdot e^{-\frac{(x-410)^2}{2 \cdot 196.4^2}} = 0,002 \cdot e^{-\frac{(x-410)^2}{77145.92}}. \quad (118)$$

Значения переменной Z при значении x представлено в таблице 3.

Таблица 3 – Значения переменной Z

x	**Z**
410	$200 \cdot 10^{-5}$
400	$199 \cdot 10^{-5}$
350	$190 \cdot 10^{-5}$
300	$170 \cdot 10^{-5}$
250	$140 \cdot 10^{-5}$
200	$110 \cdot 10^{-5}$
150	$83 \cdot 10^{-5}$
100	$57 \cdot 10^{-5}$
50	$37 \cdot 10^{-5}$
0	$23 \cdot 10^{-5}$
-50	$13 \cdot 10^{-5}$

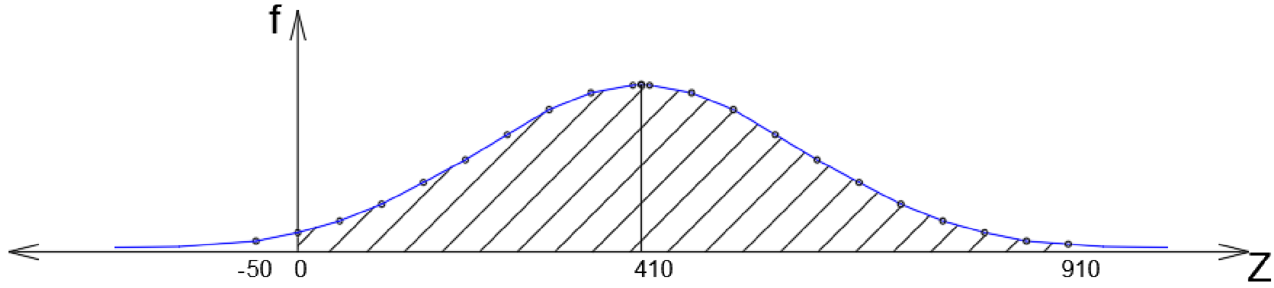

Рисунок 22 - График кривой распределения резерва прочности Z

График кривой распределения резерва прочности Z показаны на рисунке 22. Согласно методу, который предложил А.Р. Ржаницын, гарантией неразрушимости прочности является формула (61-62). Согласно рисунку 22, область, соответствующая безотказной работе располагается на промежутке [0;910]. Тогда вероятность того, что отказа работы не будет:

$$Z = [\Phi\left(\frac{X_2-E_Z}{\sigma_Z}\right) - \Phi(\frac{X_1-E_Z}{\sigma_Z})]. \quad (119)$$

$$Z = [\Phi\left(\frac{910-410}{196.4}\right) - \Phi(\frac{0-410}{196.4})] = [\Phi(0{,}4917) - \Phi(-0{,}4816)] = 0{,}9733.$$

$$Z = 0{,}9733 \cdot 100\% = 97{,}33\%$$

Метод, предложенный А.П. Кудзисом

Согласно разделу 1.3.6 для вероятностно-статистического метода определения надежности строительной конструкции по методу, предложенному А.П.Кудзисом - колонны необходимо построение кривой функции распределения от двух случайных величин N_{ult} и N_{ext}. Геометрическим результатом функции распределения, в отличии от предыдущих методов будет являться некоторая поверхность. Плотностью вероятности распределения многомерной функции является выражение согласно формулам (92-94):

$$\varphi(x,y) = \frac{\partial F(x.y)}{\partial x\, \partial y} = F_{xy}^{``}(x,y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y) = [\, e^{-\frac{(x-E_X)^2}{2\sigma_X^2}} \cdot e^{-\frac{(x-E_y)^2}{2\sigma_y^2}}\,],$$

где $x = N_{ult}$ – несущая способность исследуемой конструкции;

y = N_{ext} - внешнего усилие на исследуемую конструкцию;

E_x и E_y – значение математического ожидания для несущей способности и внешнего усилия соответственно;

σ_x и σ_y – значение среднеквадратического отклонения для несущей способности и внешнего усилия соответственно.

Плотность вероятности для N_{ext} при подстановки переменных σ и Е имеет вид (определена при расчете по методу Н.С. Стрелецкого – подраздел 3.1):

$$f(x) = \frac{1}{135{,}9 \cdot \sqrt{2 \cdot 3{,}14}} \cdot e^{-\frac{(x-2160)^2}{2 \cdot 123{,}81^2}} = 0{,}0029 \cdot e^{-\frac{(x-2160)^2}{36937{,}62}}.$$

Плотность вероятности для N_{ult} при подстановки переменных σ и Е имеет вид (определена при расчете по методу Н.С. Стрелецкого – подраздел 3.1):

$$f(x) = \frac{1}{141{,}79 \cdot \sqrt{2 \cdot 3{,}14}} \cdot e^{-\frac{(x-2570{,}37)^2}{2 \cdot 141{,}79^2}} = 0{,}0028 \cdot e^{-\frac{(x-2570{,}37)^2}{40208{,}81}}.$$

Числовые характеристики случайной величины N_{ext} (определены при расчете по методу Н.С. Стрелецкого – подраздел 3.1):

математическое ожидание $E_{N_{ext}}$ = 2160 кН;

среднеквадратичное отклонение $\sigma_{N_{ext}}$ = 135,9 кН.

Числовые характеристики случайной величины N_{ult} (определены при расчете по методу Н.С. Стрелецкого – подраздел 3.1):

математическое ожидание $E_{N_{ult}}$ = 2570,37 кН;

среднеквадратичное отклонение $\sigma_{N_{ult}}$ = 141,79 кН.

Элементом вероятности попадания случайной точки будет элементарный прямоугольник со сторонами, которые определяются согласно «правилу трех сигм» (см. раздел 2).

Основание поверхности лежит в плоскости Оху. Границы элементарного прямоугольника по Ох (Ох = N_{ult}):

$$E_x - 3\sigma_x < x < E_x + 3\sigma_x \tag{120}$$

$$2570{,}37 - 3 \cdot 141{,}79 < x < 2570{,}37 + 3 \cdot 141{,}79$$

$$2145 < x < 2995{,}74$$

Границы элементарного прямоугольника по Оу (Оу = N_{ext}):

$$E_y - 3\sigma_y < y < E_y + 3\sigma_y \qquad (121)$$

$$2160 - 3 \cdot 135{,}9 < x < 2160 + 3 \cdot 135{,}9$$

$$1752{,}3 < x < 2567{,}7$$

Основание поверхности в плоскости Оху представлено на рисунке 23.

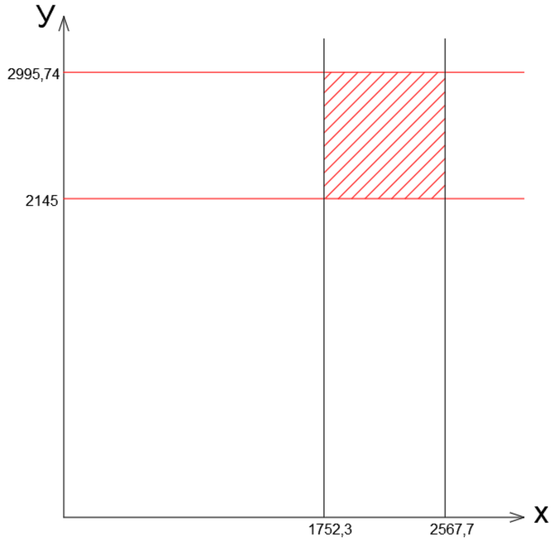

Рисунок 23 – Основание поверхности в плоскости Оху

Задачей данного метода является нахождение объема поверхности (это и будет вероятность), отсеченного плоскостью, параллельной оси Oz и проходящей через прямую y=x. На рисунке 24 изображен вид сверху поверхности, а также ее визуальное представление.

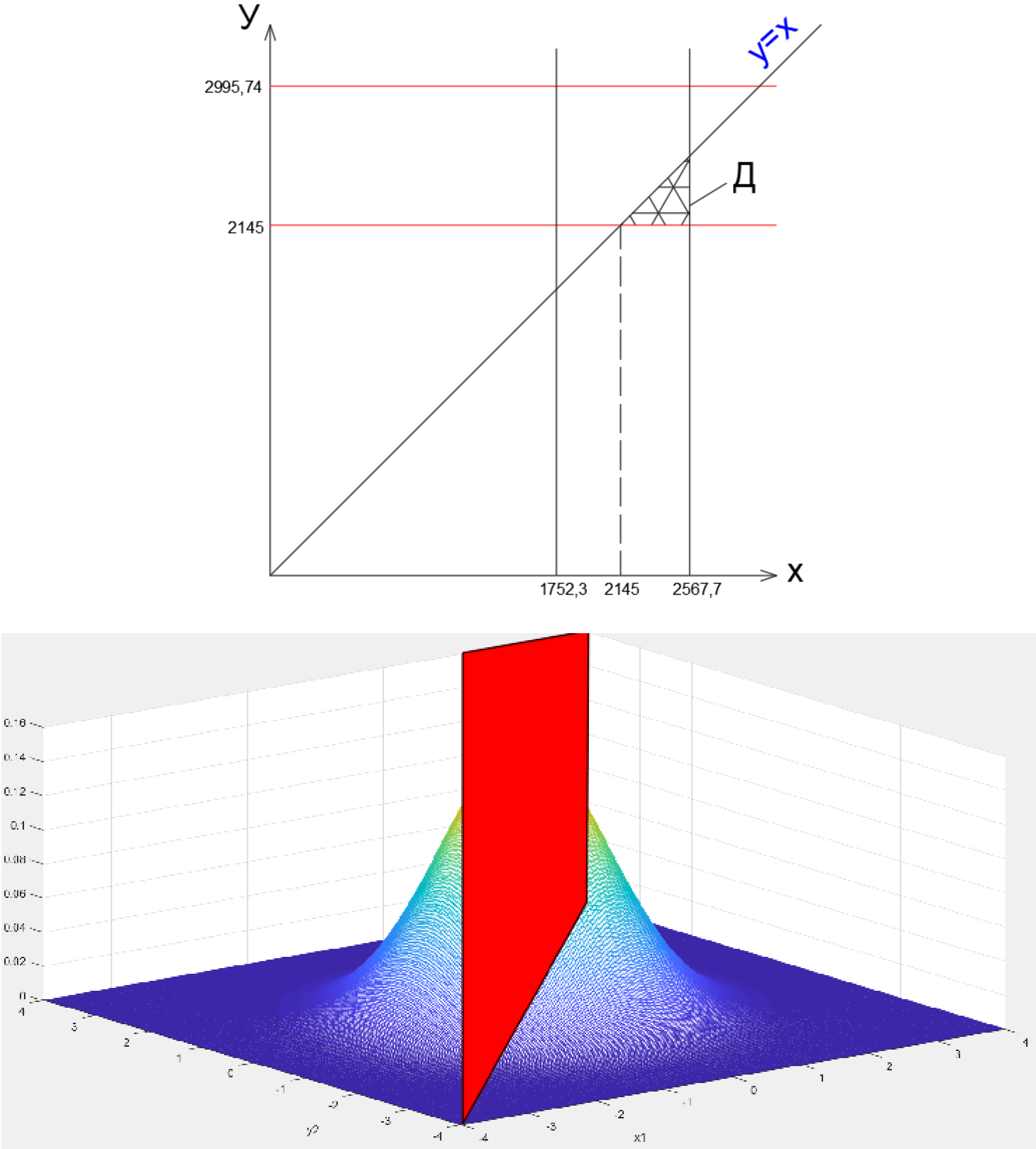

Рисунок 24 – Поверхность, рассекаемая плоскостью, параллельной оси Oz и проходящей через прямую y=x

Для упрощения расчетов поставленной задачи, с учетом геометрического смысла определенного интеграла, фигуру, для которой необходимо найти объем, разбили на 17 участков в виде простых прямоугольников, для которых можно вычислить объем (а значит и вероятность). Фигура, полученная для расчета показана на рисунке 25.

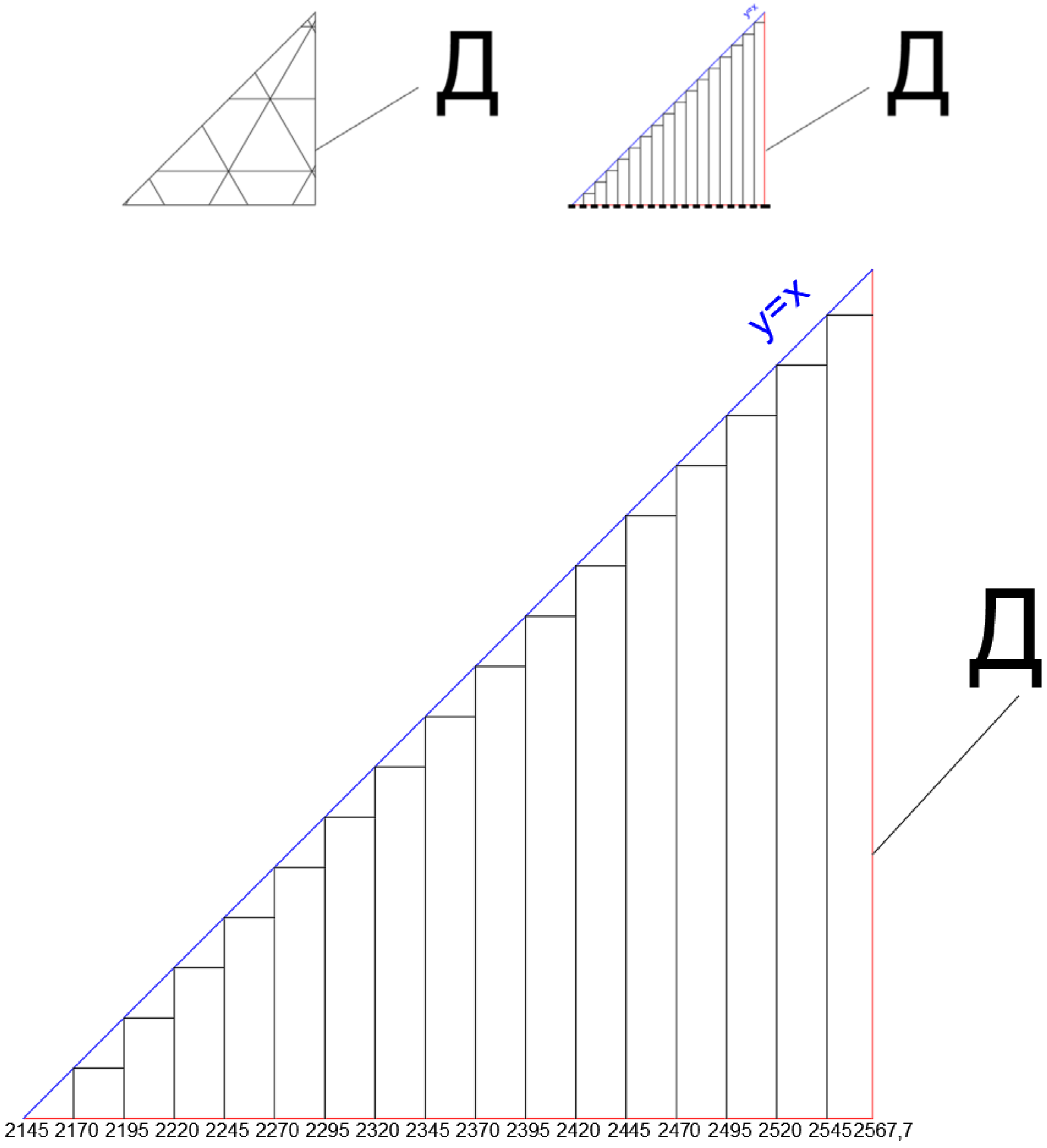

Рисунок 25 – К расчету вероятности

Общий объем (вероятность) всех 17 участков находиться как:

$$V(P) = \int_{x_0}^{x_1} A_1 dx \cdot \int_{c}^{kx_0} B_1 dy + \int_{x_1}^{x_2} A_2 dx \cdot \int_{c}^{kx_1} B_2 dy + \int_{x_2}^{x_3} A_3 dx \cdot \int_{c}^{kx_2} B_3 dy + \int_{x_3}^{x_4} A_4 dx \cdot$$

$$\cdot \int_{c}^{kx_3} B_4 dy + \int_{x_4}^{x_5} A_5 dx \cdot \int_{c}^{kx_4} B_5 dy + \int_{x_5}^{x_6} A_6 dx \cdot \int_{c}^{kx_5} B_6 dy + \int_{x_6}^{x_7} A_7 dx \cdot \int_{c}^{kx_6} B_7 dy +$$

$$+ \int_{x_7}^{x_8} A_8 dx \cdot \int_{c}^{kx_7} B_8 dy + \int_{x_8}^{x_9} A_9 dx \cdot \int_{c}^{kx_8} B_9 dy + \int_{x_9}^{x_{10}} A_{10} dx \cdot \int_{c}^{kx_9} B_{10} dy + \int_{x_{10}}^{x_{11}} A_{11} dx \cdot$$

$$\cdot \int_{c}^{kx_{10}} B_{11} dy + \int_{x_{11}}^{x_{12}} A_{12} dx \cdot \int_{c}^{kx_{11}} B_{12} dy + \int_{x_{12}}^{x_{13}} A_{13} dx \cdot \int_{c}^{kx_{12}} B_{13} dy + \int_{x_{13}}^{x_{14}} A_{14} dx \cdot$$

$$\cdot \int_{c}^{kx_{13}} B_{14} dy + \int_{x_{14}}^{x_{15}} A_{15} dx \cdot \int_{c}^{kx_{14}} B_{15} dy + \int_{x_{15}}^{x_{16}} A_{16} dx \cdot \int_{c}^{kx_{15}} B_{16} dy + \int_{x_{16}}^{x_{17}} A_{17} dx \cdot$$

$$\cdot \int_{c}^{kx_{16}} B_{17} dy \tag{122}$$

1 участок:

$$\int_{x_0}^{x_1} A_1 dx \cdot \int_{c}^{kx_0} B_1 dy = [\Phi\left(\frac{x_1 - E_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_0 - E_x}{\sigma_x}\right)] \cdot [\Phi\left(\frac{x_1 - E_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{c - E_y}{\sigma_y}\right)] =$$

$$= [\Phi\left(\frac{2170 - 2570{,}37}{141{,}79}\right) - \Phi\left(\frac{2145 - 2570{,}37}{141{,}79}\right)] \cdot [\Phi\left(\frac{2145 - 2160}{135{,}9}\right) -$$

$$\Phi\left(\frac{1752{,}3 - 2160}{135{,}9}\right)] = [\Phi(-2{,}82) - \Phi(-3)] \cdot [\Phi(-0{,}1) - \Phi(-3)] = 0{,}001.$$

2 участок:

$$\int_{x_1}^{x_2} A_2 dx \cdot \int_{c}^{kx_1} B_2 dy = [\Phi\left(\frac{x_2 - E_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - E_x}{\sigma_x}\right)] \cdot [\Phi\left(\frac{x_1 - E_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{c - E_y}{\sigma_y}\right)] =$$

$$= [\Phi\left(\frac{2195 - 2570{,}37}{141{,}79}\right) - \Phi\left(\frac{2170 - 2570{,}37}{141{,}79}\right)] \cdot [\Phi\left(\frac{2170 - 2160}{135{,}9}\right) -$$

$$\Phi\left(\frac{1752{,}3 - 2160}{135{,}9}\right)] = [\Phi(-2{,}65) - \Phi(-2{,}82)] \cdot [\Phi(0{,}07) - \Phi(-3)] = 0{,}001.$$

3 участок:

$$\int_{x_2}^{x_3} A_3dx \cdot \int_{c}^{kx_2} B_3dy = [\Phi\left(\frac{x_3 - E_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_2 - E_x}{\sigma_x}\right)] \cdot [\Phi\left(\frac{x_2 - E_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{c - E_y}{\sigma_y}\right)] =$$

$$= [\Phi\left(\frac{2220 - 2570{,}37}{141{,}79}\right) - \Phi\left(\frac{2195 - 2570{,}37}{141{,}79}\right)] \cdot [\Phi\left(\frac{2195 - 2160}{135{,}9}\right) -$$

$$\Phi\left(\frac{1752{,}3 - 2160}{135{,}9}\right)] = [\Phi(-2{,}47) - \Phi(-2{,}65)] \cdot [\Phi(0{,}26) - \Phi(-3)] = 0{,}002.$$

4 участок:

$$\int_{x_3}^{x_4} A_4dx \cdot \int_{c}^{kx_3} B_4dy = [\Phi\left(\frac{x_4 - E_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_3 - E_x}{\sigma_x}\right)] \cdot [\Phi\left(\frac{x_3 - E_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{c - E_y}{\sigma_y}\right)] =$$

$$= [\Phi\left(\frac{2245 - 2570{,}37}{141{,}79}\right) - \Phi\left(\frac{2220 - 2570{,}37}{141{,}79}\right)] \cdot [\Phi\left(\frac{2220 - 2160}{135{,}9}\right) -$$

$$\Phi\left(\frac{1752{,}3 - 2160}{135{,}9}\right)] = [\Phi(-2{,}3) - \Phi(-2{,}47)] \cdot [\Phi(0{,}44) - \Phi(-3)] = 0{,}003.$$

5 участок:

$$\int_{x_4}^{x_5} A_5dx \cdot \int_{c}^{kx_4} B_5dy = [\Phi\left(\frac{x_5 - E_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_4 - E_x}{\sigma_x}\right)] \cdot [\Phi\left(\frac{x_4 - E_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{c - E_y}{\sigma_y}\right)] =$$

$$= [\Phi\left(\frac{2270 - 2570{,}37}{141{,}79}\right) - \Phi\left(\frac{2245 - 2570{,}37}{141{,}79}\right)] \cdot [\Phi\left(\frac{2245 - 2160}{135{,}9}\right) -$$

$$\Phi\left(\frac{1752{,}3 - 2160}{135{,}9}\right)] = [\Phi(-2{,}12) - \Phi(-2{,}3)] \cdot [\Phi(0{,}63) - \Phi(-3)] = 0{,}005.$$

6 участок:

$$\int_{x_5}^{x_6} A_6dx \cdot \int_{c}^{kx_5} B_6dy = [\Phi\left(\frac{x_6 - E_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_5 - E_x}{\sigma_x}\right)] \cdot [\Phi\left(\frac{x_5 - E_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{c - E_y}{\sigma_y}\right)] =$$

$$= [\Phi\left(\frac{2295 - 2570{,}37}{141{,}79}\right) - \Phi\left(\frac{2270 - 2570{,}37}{141{,}79}\right)] \cdot [\Phi\left(\frac{2270 - 2160}{135{,}9}\right) -$$

$$\Phi\left(\frac{1752{,}3-2160}{135{,}9}\right)] = [\Phi(-1{,}94)-\Phi(-2{,}12)]\cdot[\Phi(0{,}8)-\Phi(-3)] = 0{,}007.$$

7 участок:

$$\int_{x_6}^{x_7} A_7dx\cdot\int_{c}^{kx_6} B_7dy = [\Phi\left(\frac{x_7-E_x}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{x_6-E_x}{\sigma_x}\right)]\cdot\ [\Phi\left(\frac{x_6-E_y}{\sigma_y}\right)-\Phi\left(\frac{c-E_y}{\sigma_y}\right)] =$$

$$= [\Phi\left(\frac{2320-2570{,}37}{141{,}79}\right)-\Phi\left(\frac{2295-2570{,}37}{141{,}79}\right)]\cdot\ [\Phi\left(\frac{2295-2160}{135{,}9}\right)-$$

$$\Phi\left(\frac{1752{,}3-2160}{135{,}9}\right)] = [\Phi(-1{,}77)-\Phi(-1{,}94)]\cdot[\Phi(0{,}99)-\Phi(-3)] = 0{,}01.$$

8 участок:

$$\int_{x_7}^{x_8} A_8dx\cdot\int_{c}^{kx_7} B_8dy = [\Phi\left(\frac{x_8-E_x}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{x_7-E_x}{\sigma_x}\right)]\cdot\ [\Phi\left(\frac{x_7-E_y}{\sigma_y}\right)-\Phi\left(\frac{c-E_y}{\sigma_y}\right)] =$$

$$= [\Phi\left(\frac{2345-2570{,}37}{141{,}79}\right)-\Phi\left(\frac{2320-2570{,}37}{141{,}79}\right)]\cdot\ [\Phi\left(\frac{2320-2160}{135{,}9}\right)-$$

$$\Phi\left(\frac{1752{,}3-2160}{135{,}9}\right)] = [\Phi(-1{,}6)-\Phi(-1{,}94)]\cdot[\Phi(1{,}18)-\Phi(-3)] = 0{,}02.$$

9 участок:

$$\int_{x_8}^{x_9} A_9dx\cdot\int_{c}^{kx_8} B_9dy = [\Phi\left(\frac{x_9-E_x}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{x_8-E_x}{\sigma_x}\right)]\cdot\ [\Phi\left(\frac{x_8-E_y}{\sigma_y}\right)-\Phi\left(\frac{c-E_y}{\sigma_y}\right)] =$$

$$= [\Phi\left(\frac{2370-2570{,}37}{141{,}79}\right)-\Phi\left(\frac{2345-2570{,}37}{141{,}79}\right)]\cdot\ [\Phi\left(\frac{2345-2160}{135{,}9}\right)-$$

$$\Phi\left(\frac{1752{,}3-2160}{135{,}9}\right)] = [\Phi(-1{,}4)-\Phi(-1{,}6)]\cdot[\Phi(1{,}36)-\Phi(-3)] = 0{,}023.$$

10 участок:

$$\int_{x_9}^{x_{10}} A_{10}dx \cdot \int_{c}^{kx_9} B_{10}dy = \left[\Phi\left(\frac{x_{10} - E_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_9 - E_x}{\sigma_x}\right)\right] \cdot \left[\Phi\left(\frac{x_9 - E_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{c - E_y}{\sigma_y}\right)\right]$$

$$= \left[\Phi\left(\frac{2395 - 2570{,}37}{141{,}79}\right) - \Phi\left(\frac{2370 - 2570{,}37}{141{,}79}\right)\right] \cdot \left[\Phi\left(\frac{2370 - 2160}{135{,}9}\right) -\right.$$

$$\left.\Phi\left(\frac{1752{,}3 - 2160}{135{,}9}\right)\right] = [\Phi(-1{,}24) - \Phi(-1{,}4)] \cdot [\Phi(1{,}55) - \Phi(-3)] = 0{,}03.$$

11 участок:

$$\int_{x_{10}}^{x_{11}} A_{11}dx \cdot \int_{c}^{kx_{10}} B_{11}dy = \left[\Phi\left(\frac{x_{11} - E_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_{10} - E_x}{\sigma_x}\right)\right] \cdot \left[\Phi\left(\frac{x_{10} - E_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{c - E_y}{\sigma_y}\right)\right]$$

$$= \left[\Phi\left(\frac{2420 - 2570{,}37}{141{,}79}\right) - \Phi\left(\frac{2395 - 2570{,}37}{141{,}79}\right)\right] \cdot \left[\Phi\left(\frac{2395 - 2160}{135{,}9}\right) -\right.$$

$$\left.- \Phi\left(\frac{1752{,}3 - 2160}{135{,}9}\right)\right] = [\Phi(-1{,}1) - \Phi(-1{,}24)] \cdot [\Phi(1{,}73) - \Phi(-3)] = 0{,}03.$$

12 участок:

$$\int_{x_{11}}^{x_{12}} A_{12}dx \cdot \int_{c}^{kx_{11}} B_{12}dy = \left[\Phi\left(\frac{x_{12} - E_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_{11} - E_x}{\sigma_x}\right)\right] \cdot \left[\Phi\left(\frac{x_{11} - E_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{c - E_y}{\sigma_y}\right)\right]$$

$$= \left[\Phi\left(\frac{2445 - 2570{,}37}{141{,}79}\right) - \Phi\left(\frac{2420 - 2570{,}37}{141{,}79}\right)\right] \cdot \left[\Phi\left(\frac{2420 - 2160}{135{,}9}\right) -\right.$$

$$\left.- \Phi\left(\frac{1752{,}3 - 2160}{135{,}9}\right)\right] = [\Phi(-0{,}9) - \Phi(-1{,}06)] \cdot [\Phi(1{,}9) - \Phi(-3)] = 0{,}04.$$

13 участок:

$$\int_{x_{12}}^{x_{13}} A_{13}dx \cdot \int_{c}^{kx_{12}} B_{13}dy = \left[\Phi\left(\frac{x_{13} - E_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_{12} - E_x}{\sigma_x}\right)\right] \cdot \left[\Phi\left(\frac{x_{12} - E_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{c - E_y}{\sigma_y}\right)\right]$$

$$= \left[\Phi\left(\frac{2470 - 2570{,}37}{141{,}79}\right) - \Phi\left(\frac{2445 - 2570{,}37}{141{,}79}\right)\right] \cdot \left[\Phi\left(\frac{2445 - 2160}{135{,}9}\right) -\right.$$

$$-\Phi\left(\frac{1752{,}3-2160}{135{,}9}\right)] = [\Phi(-0{,}71)-\Phi(-0{,}9)]\cdot[\Phi(2{,}1)-\Phi(-3)] = 0{,}1.$$

14 участок:

$$\int_{\mathrm{x}_{13}}^{\mathrm{x}_{14}} A_{14}dx \cdot \int_{c}^{kx_{13}} B_{14}dy = [\Phi\left(\frac{\mathrm{x}_{14}-\mathrm{E_x}}{\sigma_{\mathrm{x}}}\right)-\Phi\left(\frac{\mathrm{x}_{13}-\mathrm{E_x}}{\sigma_{\mathrm{x}}}\right)]\cdot[\Phi\left(\frac{\mathrm{x}_{13}-\mathrm{E_y}}{\sigma_{\mathrm{y}}}\right)-\Phi\left(\frac{\mathrm{c}-\mathrm{E_y}}{\sigma_{\mathrm{y}}}\right)]$$

$$= [\Phi\left(\frac{2495-2570{,}37}{141{,}79}\right)-\Phi\left(\frac{2470-2570{,}37}{141{,}79}\right)]\cdot\ [\Phi\left(\frac{2470-2160}{135{,}9}\right)-$$

$$-\Phi\left(\frac{1752{,}3-2160}{135{,}9}\right)] = [\Phi(-0{,}53)-\Phi(-0{,}71)]\cdot[\Phi(2{,}28)-\Phi(-3)] = 0{,}1.$$

15 участок:

$$\int_{\mathrm{x}_{14}}^{\mathrm{x}_{15}} A_{15}dx \cdot \int_{c}^{kx_{14}} B_{15}dy = [\Phi\left(\frac{\mathrm{x}_{15}-\mathrm{E_x}}{\sigma_{\mathrm{x}}}\right)-\Phi\left(\frac{\mathrm{x}_{14}-\mathrm{E_x}}{\sigma_{\mathrm{x}}}\right)]\cdot[\Phi\left(\frac{\mathrm{x}_{14}-\mathrm{E_y}}{\sigma_{\mathrm{y}}}\right)-\Phi\left(\frac{\mathrm{c}-\mathrm{E_y}}{\sigma_{\mathrm{y}}}\right)]$$

$$= [\Phi\left(\frac{2520-2570{,}37}{141{,}79}\right)-\Phi\left(\frac{2495-2570{,}37}{141{,}79}\right)]\cdot\ [\Phi\left(\frac{2495-2160}{135{,}9}\right)-$$

$$-\Phi\left(\frac{1752{,}3-2160}{135{,}9}\right)] = [\Phi(-0{,}36)-\Phi(-0{,}53)]\cdot[\Phi(2{,}47)-\Phi(-3)] = 0{,}1.$$

16 участок:

$$\int_{\mathrm{x}_{15}}^{\mathrm{x}_{16}} A_{16}dx \cdot \int_{c}^{kx_{15}} B_{16}dy = [\Phi\left(\frac{\mathrm{x}_{16}-\mathrm{E_x}}{\sigma_{\mathrm{x}}}\right)-\Phi\left(\frac{\mathrm{x}_{15}-\mathrm{E_x}}{\sigma_{\mathrm{x}}}\right)]\cdot[\Phi\left(\frac{\mathrm{x}_{15}-\mathrm{E_y}}{\sigma_{\mathrm{y}}}\right)-\Phi\left(\frac{\mathrm{c}-\mathrm{E_y}}{\sigma_{\mathrm{y}}}\right)]$$

$$= [\Phi\left(\frac{2545-2570{,}37}{141{,}79}\right)-\Phi\left(\frac{2520-2570{,}37}{141{,}79}\right)]\cdot\ [\Phi\left(\frac{2520-2160}{135{,}9}\right)-$$

$$-\Phi\left(\frac{1752{,}3-2160}{135{,}9}\right)] = [\Phi(-0{,}2)-\Phi(-0{,}36)]\cdot[\Phi(2{,}65)-\Phi(-3)] = 0{,}1.$$

17 участок:

$$\int_{x_{16}}^{x_{17}} A_{17}dx \cdot \int_{c}^{kx_{16}} B_{17}dy = [\Phi\left(\frac{x_{17} - E_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_{16} - E_x}{\sigma_x}\right)] \cdot [\Phi\left(\frac{x_{16} - E_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{c - E_y}{\sigma_y}\right)]$$

$$= [\Phi\left(\frac{2567{,}7 - 2570{,}37}{141{,}79}\right) - \Phi\left(\frac{2545 - 2570{,}37}{141{,}79}\right)] \cdot\ [\Phi\left(\frac{2545 - 2160}{135{,}9}\right) -$$

$$- \Phi\left(\frac{1752{,}3 - 2160}{135{,}9}\right)] = [\Phi(-0{,}02) - \Phi(-0{,}2)] \cdot [\Phi(2{,}83) - \Phi(-3)] = 0{,}1.$$

$$V(P) = 0{,}001 + 0{,}001 + 0{,}002 + 0{,}003 + 0{,}005 + 0{,}007 + 0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}023 +$$

$$+0{,}03 + 0{,}03 + 0{,}04 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}67 \cdot 100\% = 67\%.$$

Вероятность безотказной работы по методу, предложенному А.П.Кудзисом составляет 67%.

4 АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА ИССЛЕДОВАНИЯ

В разделе 3 данной квалификационной научной работы была вычислена надежность железобетонной колонны класса B25 квадратного сечения 40х40 $см^2$ тремя различными вероятностными методами расчета. Надежность железобетонной колонны, согласно:

- методу Н.С. Стрелецкого составила 76%;
- методу А.Р. Ржаницына составила 97,33%;
- методу А.П. Кудзиса составила 67%.

Если оценить надежность в целом, учитывая все три метода ее расчета, то значением надежности будет являться среднеарифметическое значение полученных результатов. Таким образом, в целом, надежность конструкции составляет 80,11%.

Как показало исследование, методы определения надежности дают несхожие результаты и отличие их друг от друга достигает:

- между методами Н.С. Стрелецкого и А. Р. Ржаницына - 21,33%;
- между методами А. Р. Ржаницына и А.П.Кудзиса – 30,33%;
- между методами Н.С. Стрелецкого и А.П.Кудзиса – 9%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В квалификационной научной работе проведен анализ методов расчета надежности строительной конструкции на примере расчета железобетонной колонны.

2. В квалификационной научной работе выполнен расчет надежности по трем различным методам: метод Н.С.Стрелецкого, метод А.Р. Ржаницына, метод А.П.Кудзиса. В результате были получены значения надежности для железобетонной колонны.

3. Как показало исследование, расчеты на надежность строительных конструкций связаны с вероятностью безотказной работы конструкции.

4. Исходя из результатов расчетов в данной квалификационной научной работе, наиболее надежен - метод А.П.Кудзиса, так как он дает наименьшее значение.

5. Сопоставление величин надежности трех методов, полученных в результате расчетов, показало неудовлетворительную сходимость, следовательно, можно сделать вывод, что предложенные методы расчета требуют дальнейшего исследования и уточнения методик расчета.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Болотин, В. В. Строительная механика. Современное состояние и перспективы развития / В. В. Болотин, И. И. Гольденблат, А. Ф. Смирнов. - М. : Стройиздат , 1972. – 191 с.

2. Райзер, В. Д. Теория надежности в строительном проектировании. - М. : Издательство Ассоциации строительных вузов , 1998. - 302 с.

3. Райзер, В. Д. Методы теории надежности в задачах нормирования расчетных параметров строительных конструкций. - М. : Стройиздат , 1986. - 192 с.

4. Райзер, В. Д. Теория надежности сооружений / В. Д. Райзер. - М. : Издательство Ассоциации строительных вузов , 2010. - 383 с.

5. Болотин, В. В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. - М. : Стройиздат , 1982. - 351 с.

6. Стрелецкий, Н.С. Основы статистического учета коэффициента запаса прочности сооружений. - Москва : Стройиздат, 1947. - 95 с.

7. Шляхов С.М. Вероятностные методы строительной механики и теория надежности строительных конструкций: учебное пособие для студентов специальности 271101 "Строительство уникальных зданий и сооружений". - Саратов: Саратовский гос. технический ун-т им. Гагарина Ю. А., 2015. – 163 с.

8. Лужин, О. В. Вероятностные методы расчета сооружений: Учеб. Пособие. - М. : МИСИ , 1983. – 122 с.

9. Гнеденко, Б. В. Элементарное введение в теорию вероятностей / Б. В. Гнеденко, А. Я. Хинчин. - М. : УРСС , 2003. – 205 с.

10. ГОСТ 27751-2014. Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения. – Введ.2015-07-01. - М.: Стандартинформ, 2015. – 26 с.

11. Ржаницын, А. Р. Теория расчета строительных конструкций на наденость / А. Р. Ржаницын. - М. : Стройиздат , 1978. – 239 с.

12. Краснощёков, Ю.В. Научные основы исследования взаимодействия элементов железобетонных конструкций: монография / Ю.В. Краснощёков. – Омск : СибАДИ, 1997. – 276 с.

13. Краснощёков, Ю.В. Вероятностные основы расчета строительных конструкций : учеб. пособие для студентов, обучающихся по спец. 290300 и 291400 направления 653500 "Строительство". - Омск : Изд-во СибАДИ, 2005 (ПЦ Изд-ва). – 202 с.

14. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика /В.Е. Гмурман. − М. : Высшая школа, 1999. − 479 с.

15. Ржаницын, А.Р. Теория расчёта строительных конструкций на надёжность / А.Р. Ржаницын. – М. : Стройиздат, 1978. – 239 с.

16. Шпете, Г. Надёжность несущих строительных конструкций / Г. Шпете ; пер. с нем. О.О. Андреева. – М. : Стройиздат, 1994. – 288 с.

17. Отставнов, В.А. Учёт ответственности зданий и сооружений в нормах проектирования строительных конструкций / В.А. Отставнов, А.Ф. Смирнов, В.Д. Райзер // Строительная механика и расчёт сооружений. – 1981. – № 1. –с. 11 – 14.

18. Рекомендации по нормированию коэффициентов надёжности по назначению конструкций зданий и сооружений): отчёт о НИР / ЦНИИСК ; рук. В.Д. Райзер ; исп. Ю.Д. Сухов, Е.М. Знаменский. – М., 1987. - 46 с.

19. Таль, К.Э. Система параметров надёжности железобетона / К.Э. Таль// Новое в проектировании железобетонных конструкций: материалы семинара.– М., 1974. – с. 17 – 25.

20. Снарскис, Б.Й. Оптимальные расчётные и контрольные значения случайных параметров как средство оптимизации надёжности / Б.Й. Снарскис // Проблемы надёжности в строительном проектировании. – Свердловск, 1972. – с. 202 – 206.

21. Авдонин В.В., Тюрин М.В. Вероятностные методы строительной механики и теория надежности строительных конструкций: методические указания к практическим занятиям. - Саранск: Изд-во Мордовского ун-та, 2018. – 25 с.

22. Чирков В.П. Прикладные методы теории надежности в расчетах строительных конструкций: учебное пособие для студентов вузов железнодорожного транспорта. - Москва: Маршрут, 2006. – 618 с.

23. Капур, К. Надёжность и проектирование систем / К. Капур, Л. Ламберсон. – М.: Мир, 1980. – 608 с.

24. Учебно-методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу Информатика: численные методы решения прикладных задач. – Томск, 2011. – 27 с.

25. Зенков, А. В.Численные методы: учеб. пособие / А. В. Зенков. — Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2016. — 124 с.

26. Кудзис, А. П. Оценка надежности железобетонных конструкций. - Вильнюс: Мокслас, 1985. – 156 с.

27. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. –М.,2004. – 573 с.

28. СП 63.13330.2012. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003. – Введ. 2013-01-01. – М., 2012.

29. СП 20.13330.2016. Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СниП 2.01.07 – 85*. – М., 2016. – 156 с.

30. СТО ЮурГУ 04-2008 Стандарт организации. Курсовое и дипломное проектирование. Общие требования к содержанию и оформлению / Т.И. Парубочая, Н.В. Сырейщикова, В.И. Гузеев. – Челябинск: Изд-во ЮурГУ, 2008. – 56 с.