УДК 512.552.7+512.542.74

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАНГОВ ГРУПП ЦЕНТРАЛЬНЫХ ЕДИНИЦ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГРУПП

Р.Ж. Алеев, О.В. Митина

Изучается распределение рангов групп центральных единиц знакопеременной группы через анализ разбиений. Как результат доказана теорема о малых рангах таких групп. Также проведён анализ близкого расположения квадратов в разбиениях, что позволило указать условия на разбиения, которые дают нетривиальный вклад в ранг.

Ключевые слова: знакопеременная группа, разбиения, групповое кольцо, центральная единица, ранг абелевой группы.

Термин «*центральная единица*» всегда означает «*центральную единицу (обратимый элемент центра) целочисленного группового кольца конечной группы*».

Фробениус указал построение неприводимых комплексных характеров знакопеременных групп через разбиения степеней этих групп. Так как значения характеров – это элементы квадратичных полей (или целые числа), мы можем найти ранги групп центральных единиц знакопеременных групп.

Лемма. [1] Свободный ранг группы центральных единиц знакопеременной группы степени n равен количеству разбиений $[a_1, \ldots, a_k]$ числа n, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) a_i нечётно, $1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{k}$;

2) $a_i \neq a_j$ для всех $i \neq j$;

3) $n \equiv k \ (mod\ 4)$;

4) $\Pi_{i=1}^{k} a_i$ не является квадратом.

Легко понять, что условие 4 – наиболее трудное.

А.В. Каргаполов [2, 3] вычислил ранги групп центральных единиц знакопеременных групп до степени 800.

Далее приведены результаты вычислений для $1 \leq n \leq 200$, где n – степень знакопеременной группы, r_n – ранг группы центральных единиц знакопеременной группы степени n, q_n – количество разбиений числа n, удовлетворяющих условиям 1–3 леммы 1, но не удовлетворяющих 4.

$n \equiv 1\ (mod\ 8)$

n	r_n	q_n	n	r_n	q_n	n	r_n	q_n	n	r_n	q_n
1	0	1	9	0	1	17	1	0	25	1	1
33	5	1	41	18	1	49	45	3	57	96	6
65	187	6	73	324	10	81	525	17	89	823	14
97	1225	24	105	1787	34	113	2586	34	121	3706	49
129	5335	61	137	7739	64	145	11288	85	153	16572	113
161	24443	125	169	36026	167	177	52947	220	185	77420	243
193	112259	331									

$n \equiv 5\ (mod\ 8)$

n	r_n	q_n	n	r_n	q_n	n	r_n	q_n	n	r_n	q_n
5	1	0	13	1	0	21	1	0	29	3	0
37	11	0	45	31	0	53	71	0	61	141	1
69	255	1	77	427	1	85	673	4	63	1022	4
101	1507	4	109	2176	10	117	3129	8	125	4489	9
133	6464	18	141	9390	22	149	13744	21	157	20208	32
165	29782	43	173	43849	40	181	64236	75	189	93514	95
197	135007	110									

$n \equiv 2\ (mod\ 8)$

n	r_n	q_n	n	r_n	q_n	n	r_n	q_n	n	r_n	q_n
2	0	0	10	1	1	18	4	0	26	5	1
34	7	1	42	13	0	50	24	2	58	55	3
66	125	1	74	249	4	82	465	9	90	824	9
98	1373	11	106	2176	25	114	3350	24	122	4984	36
130	7242	58	138	10377	55	146	14648	74	154	20510	107
162	28644	111	170	39906	149	178	55644	197	186	77765	216
194	108818	271									

$n \equiv 6\ (mod\ 8)$

n	r_n	q_n	n	r_n	q_n	n	r_n	q_n	n	r_n	q_n
6	1	0	14	3	0	22	5	0	30	6	1
38	10	0	46	18	0	54	39	0	62	86	0
70	178	2	78	347	3	86	631	2	94	1074	6
102	1745	10	110	2724	12	118	4111	18	126	6046	24
134	8709	33	142	12364	44	150	17381	55	158	24291	64
166	33852	86	174	47186	101	182	65852	120	1900	92043	172
198	128899	196									

$n \equiv 3\ (mod\ 8)$

n	r_n	q_n	n	r_n	q_n	n	r_n	q_n	n	r_n	q_n
3	0	0	11	1	0	19	5	0	27	12	0
35	20	1	43	33	0	51	48	1	59	70	2
67	113	0	75	188	2	83	331	3	91	595	2
99	1049	3	107	1796	8	115	2990	9	123	4815	12
131	7505	33	139	11426	33	147	16968	38	155	24653	67
163	35237	73	171	49602	99	179	68986	146	187	95106	166
195	130175	201									

$n \equiv 7\ (mod\ 8)$

n	r_n	q_n	n	r_n	q_n	n	r_n	q_n	n	r_n	q_n
7	0	0	15	3	0	23	7	1	31	14	2
39	26	1	47	37	3	55	56	3	63	89	1
71	140	5	79	245	6	87	441	6	95	785	9
103	1367	16	111	2320	16	119	3793	26	127	6018	36
135	9283	41	143	13929	69	151	20462	91	159	29496	108
167	41810	150	175	58516	179	183	81025	214	191	111240	292
199	151855	359									

$n \equiv 4\ (mod\ 8)$

n	r_n	q_n	n	r_n	q_n	n	r_n	q_n	n	r_n	q_n
4	0	0	12	0	0	20	2	0	28	9	0
36	23	0	44	47	0	52	84	0	60	134	2
68	208	0	76	307	1	84	446	5	92	666	1
100	1006	2	108	1553	5	116	2447	4	124	3884	3
132	6139	13	140	9631	20	148	14922	14	156	22710	34
164	34011	41	172	50089	44	180	72543	90	188	103570	105
196	145864	128									

$n \equiv 8\ (mod\ 8)$

n	r_n	q_n	n	r_n	q_n	n	r_n	q_n	n	r_n	q_n
8	0	0	16	1	0	24	4	1	32	13	2
40	32	2	48	59	5	56	101	7	64	164	6
72	243	11	80	360	13	88	536	12	96	797	21
104	1225	25	112	1925	27	120	3049	37	128	4846	48
136	7667	51	144	11951	79	152	18366	104	160	27765	25
168	41226	178	176	60243	218	184	86672	261	192	122869	358
200	171988	453									

Теорема 1. *Пусть r_n – ранг группы центральных единиц знакопеременной группы степени n. Тогда:*

1) для $n \leq 38$

n	r_n	n	r_n	n	r_n	n	r_n
1	0	2	0	3	0	4	0
5	1	6	1	7	0	8	0
9	0	10	1	11	1	12	0
13	1	14	3	15	3	16	1
17	1	18	4	19	5	20	2
21	1	22	5	23	7	24	4
25	1	26	5	27	12	28	9
29	3	30	6	31	14	32	13
33	6	34	7	35	20	36	23
37	11	38	10				

2) для $n \geq 39$ имеем $r_n \geq 11$.

Определение. Пусть a – свободное от квадратов нечётное натуральное число, b – натуральное число такое, что $a + 2b \equiv 3\ (mod\ 4)$. Тогда *(a; b)-серией* назовём множество:

$$\{x \mid x \text{ нечётное натуральное число и } x > b\}.$$

Теорема 2. *Пусть a – свободное от квадратов нечётное натуральное число, b – натуральное число такое, что* $a + 2b \equiv 3\ (mod\ 4)$. *Пусть также* $x,\ x - 2k,\ x - 2k_1,\ x - 2k_2$ *– элементы (a; b)-серии. Тогда справедливы следующие два уравнения:*

1) если для некоторого натурального y и некоторого целого s выполняются условия:

$$x(2b - x) = ay^2 \quad \text{и} \quad (x - 2k)(2b - x + 2k) = a(y + 2s)^2,$$

то

$$b^2 = \left(1 + \frac{as^2}{k^2}\right)(k^2 + a(y + s)^2) = (k^2 + as^2)\left(1 + \frac{a(y + s)^2}{k^2}\right)$$

(уравнение произведения).

В частности, для $k = 1$

$$b^2 = (1 + as^2)(1 + a(y + s)^2);$$

2) если для некоторых натуральных y, y_1 и y_2 выполняются условия:

$$x(2b - x) = ay^2, \quad (x - 2k_1)(2b - x + 2k_1) = a{y_1}^2 \text{ и}$$
$$(x - 2k_2)(2b - x + 2k_2) = a{y_2}^2,$$

то

$$a(k_1{y_2}^2 x - k_2{y_1}^2 + (k_2 - k_1)y^2) = 4k_1k_2(k_2 - k_1)$$

(уравнение суммы).

В частности, a делит $k_1k_2(k_2 - k_1)$ для $k_2 > k_1 > 0$.

Итак, если в *(a; b)*-серии есть два квадрата, то из условия 4 леммы получаются существенные ограничения на значения a и b.

Далее будем использовать обозначения из теоремы 2.

Следствие. Если $k = 1$, то $a \equiv 3 \ (mod\ 4)$.

Построим бесконечное число разбиений $[x, 2b - x, 3]$, для которых можно найти такие y, что:

$$x(2b - x) = 3y^2 \quad \text{и} \quad (x-2)(2b - x + 2) = 3(y + 2)^2.$$

Эти условия означают, что в произведениях элементов *(3; b)*- серии существуют два последовательных квадрата.

Пусть последовательности $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ определены так, что:

$$v_n + \sqrt{3}w_n = \left(7 + 4\sqrt{3}\right)^2.$$

Тогда:

$$\{v_n\}_{n=1}^{\infty} = \{7, 97, 1351, 18817, 262087, \dots\}$$
$$\{w_n\}_{n=1}^{\infty} = \{4, 56, 780, 10864, 151316, \dots\}.$$

Далее:

$$b = 2v_n \epsilon \{14, 194, 2702, 37634, 524174, \dots\}$$
$$y = w_n \epsilon \{3, 55, 779, 10863, 151315, \dots\}$$
$$x = 2v_n + 3w_n + 1 \epsilon \{27, 363, 5043, 70227, 978123, \dots\}$$
$$2b - x = 2v_n - (3w_n + 1) \epsilon \{1, 25, 361, \ 5041, \ 70225, \dots\}$$
$$3x(2b - x) \epsilon \{81 = 9^2, 27225 = 165^2, \quad 5461569 = 2337^2,$$
$$1062042921 = 32589^2, \quad 206066063025 = 453945^2, \dots\}$$
$$3(x-2)(2b - x + 2) \epsilon \{225 = 15^2, \quad 29241 = 171^2, 5489649 = 2343^2,$$
$$1062434025 = 32595^2, \quad 206071510401 = 453951^2, \dots\}$$
$$x(2b - x) \epsilon \{27 = 3 \cdot 3^2, \quad 9075 = 3 \cdot 55^2, \quad 1820523 = 3 \cdot 779^2,$$
$$354014307 = 3 \cdot 10863^2, \quad 68688687675 = 3 \cdot 151317^2, \dots\}$$
$$(x-2)(2b - x + 2) \epsilon \{75 = 3 \cdot 5^2, 9747 = 3 \cdot 57^2, 1829883 = 3 \cdot 781^2,$$
$$354144675 = 3 \cdot 10865^2, \ 68690503467 = 3 \cdot 151317^2, \dots\}.$$

Таким образом, имеем следующие разбиения вида

$$([3, x, 2b - x], [3, x - 2, 2b - x + 2]):$$
$$([3,27,1], [3,25,3]), ([3,363,25], [3,361,27]), ([3,5043,361], [3,5041,363]),$$
$$([3,70227,5041], [3,70225,5043]), \dots$$

Библиографический список

1. Ferraz, R.A. Simple components and central units in group rings // J. Algebra. – 2004. – Vol. 279, no. 1. – Pp. 191–203.

2. Каргаполов, А.В. Параллельный алгоритм для нахождения рангов групп центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп / А.В. Каргаполов // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. Сб. научных трудов. – Екатеринбург: УрО РАН, 2009. – № 10. – С. 8–12.

3. Каргаполов, А.В. Центральные единицы целочисленных групповых колец знакопеременных групп: дис. ... канд. физ.-мат. Наук / А.В. Каргаполов. – Челябинск, 2012. – 87 с.