

УДК 514.174.6 + 548.121

## **ИНФЛЯЦИОННЫЙ И ДЕФЛЯЦИОННЫЙ ПОДХОДЫ К ОПИСАНИЮ ФРАКТАЛА ИЗ ПЯТИКОНЕЧНЫХ ЗВЕЗД**

*А.А. Поляков*

Предложено два подхода к описанию фрактала из пятиконечных звезд: дефляционный и инфляционный. Предложена краткая запись строения таких фракталов. Показана связь между дефляционным и инфляционным описаниями. Для дефляционного подхода характерно уменьшение элементов структуры с каждым шагом, инфляционный характеризуется бесконечным ростом.

Ключевые слова: фракталы; квазипериодические решетки; мозаика Пенроуза.

В интервью [1] Бенуа Мандельброт, автор термина фрактал, на вопрос о том, будет ли когда-нибудь дано точное определение фрактала, говорил, что определение фрактала не стоит искать. Это будет ограничивать огромное множество объектов, которое описывает это понятие. Общим для всех фракталов является свойство самоподобия: неизменность структуры объекта при изменении масштаба.

Для известных классических множеств, которые сегодня считают фракталами, можно дать такое описание: это множество точек, которое можно всюду считать негладким, не имеющим производных, обладающее самоподобием.

В некоторых книгах, посвященных фракталам [2], при рассмотрении самоподобия рассматривают также квазипериодические решетки (квазипериодические решетки не обладают периодичностью, но характеризуются строгим самоподобием). Классический двумерный паркет Пенроуза – пример квазипериодической решетки [3]. Исследования таких решеток предшествовали по времени экспериментальному открытию Даном Шехтманом квазикристаллов – нового вида кристаллического состояния вещества [4]. Развитие подходов к описанию и построению таких решеток позволило разработать математические методы рентгенографического исследования квазикристаллов. Можно сказать, что паркет Пенроуза играет ту же роль в кристаллографии квазикристаллов, что и примитивная кубическая решетка в классической кристаллографии.

При описании фрактала обычно задают инициатор и генератор. Инициатор – исходный геометрический объект, генератор – объект, который показывает метод построения фрактала. Каждый этап действия генератора называется предфракталом.

Как соотносятся квазипериодические решетки (паркет Пенроуза) и фракталы? Квазипериодические решетки, кроме того, что они самоподобны, являются системами точек Делоне [5], для которых характерно существование минимального и максимального расстояния между ближайшими

точками. Эти условия приводят к тому, что невозможно бесконечное сближение точек, как в классических примерах фрактальных множеств, так и невозможно появление пор и трещин, что наблюдается во фракталах, но в кристаллических решетках считается дефектами. Можно сказать, что квазипериодические решетки – это подкласс фракталов, являющихся системами точек Делоне.

Рассмотрим такие методики построения квазипериодических решеток, как операции дефляции и инфляции на примере мозаики Пенроуза [6]. Паркет Пенроуза строится из двух типов ромбов. У таких ромбов ребра имеют одинаковую длину, острый угол при вершине в одном случае составляет  $\frac{\pi}{5}$ , а в другом случае –  $\frac{\pi}{10}$ . Для задания дефляции определяют способы разбиения исходных ромбов на части. Затем для исходной конфигурации, например, одиночного ромба, проводят последовательно разбиения. Очевидно, что дефляция при построении квазипериодической решетки эквивалентна заданию инициатора и генератора при вычислении фрактала. Результат также получается похожим: образуется структура с уменьшающимися на каждом шаге элементами. Если строить мозаику Пенроуза, как квазипериодическую решетку, из элементов постоянного размера, на каждом шаге надо увеличивать полученную структуру.

Операция инфляции: для построения мозаики задаются правила соединения ромбов, а затем по этим правилам начинают присоединять новые ромбы. Этот процесс в отличие от дефляции не строго детерминирован: возможны тупиковые пути роста, тогда, после попадания в тупик, делают откат до разветвления траектории роста и, затем, продолжают рост.

Ранее [7, 8, 9] было показано, что в двумерном паркете Пенроуза можно выделить слои, в которых наблюдаются кластеры из пятиконечных звезд, было высказано предположение, что эти слои можно считать фракталами из звезд (любая точка такого слоя принадлежит одному или нескольким множествам из 10 точек, расположенных в вершинах правильных пятиконечных звезд постоянного минимального размера).

Было замечено, что расстояние между центрами звезд в кластерах в  $\tau^N$  раз больше расстояния от центра звезды до внутренних вершин ( $\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$  – «золотое сечение»). Отмечались целые значения показателя  $N$ , равные 2 и 3. Расстояние между центрами кластеров также описывается целой степенью золотого сечения. В каждом слое наблюдались две ориентации звезд, связанные операцией инверсии, которые были обозначены буквами «w» и «b» (white and black).

**Общее описание фрактала.** Мы будем рассматривать фрактал, инициатором которого является точка, а генератором – правильная пятиконечная звезда, причем на каждом шаге линейный размер генератора определяется выражением:

$$a_k = a\tau^{-Nk},$$

здесь  $N_k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $a$  – размер звезды-инициатора. Заметим, что каждый раз задается ориентация звезды-генератора, а центры этих звезд располагаются по всем вершинам пятиконечных звезд предыдущего шага, затем точки предыдущего шага удаляются.

Рассмотрим подробнее процесс построения фрактала.

1. Изображаем исходную звезду с размером  $a_0 = a\tau^{-N_0}$  и одной из двух ориентаций («w» или «b»). Обозначаем ее символами  $N_0 c_0$ , где  $c_0 = w$  или  $b$ .

2. Обобщенные звезды первого шага ориентации  $c_1$  и размера  $a_1 = a\tau^{-N_1}$ , где  $N_1 \geq N_0$ , располагается так, что их центры совпадают с вершинами звезд предыдущего шага. Точки предыдущего шага удаляются.

3. Обобщенные звезды  $i$ -го этапа с размерами  $a_i = a\tau^{-N_i}$  и ориентацией  $c_i$  располагаем так, что их центры совпадают с вершинами предфрактала предыдущего этапа. При этом совпадающие точки учитываются один раз, предыдущий предфрактал удаляется.

Гибкость и разнообразие форм полученного фрактала определяется набором значений размерного числа  $N_i$  и значений ориентаций  $c_i$ .

Такое описание фрактала назовем «**дефляционное абсолютное**» и запишем в виде:

$${}^d a N_0 c_0 N_1 c_1 N_2 c_2 \dots$$

Можно показать, что окончательный вид фрактала не зависит от порядка обобщенных звезд (так мы будем называть звезду-генератор на каждом этапе построения). Поэтому в дальнейшем обобщенные звезды располагаются так, что числа  $N_k$  порождают неубывающую последовательность.

Из всего разнообразия фракталов можно выделить фракталы с повторяющимися свойствами, у них свойство самоподобия ярко выражено. У таких фракталов, например, может быть постоянная ориентация обобщенных звезд и каждая следующая в  $\tau$  раз меньше, его можно записать следующим образом:

$${}^d a 0 w_1 w_2 w_3 w \dots$$

Для того чтобы описывать такие фракталы, можно предложить **относительное дефляционное** описание фрактала, у которого размерное число равно разности соответствующих чисел абсолютной записи:

$${}^d N_i = {}^d a N_i - {}^d a N_{i-1}$$

Относительную ориентацию обобщенных звезд можно определить по правилу *исключающего или* (XOR в программировании):

${}^d c_i$	${}^d a c_i = ' w '$	${}^d a c_i = ' b '$
${}^d a c_{i-1} = ' w '$	$w$	$b$
${}^d a c_{i-1} = ' b '$	$b$	$w$

При совпадении ориентаций в абсолютной записи на  $i$ -м шаге и предыдущем, в дефляционной записи пишем «белую» ориентацию, иначе – «черную». Договоримся также, что  ${}^d N_0 = {}^{da} N_0$ .

Обратный переход (от относительной дефляционной к дефляционной записи) описывается соотношениями:

$${}^d a N_i = \sum_{k=0}^i {}^d N_k$$

	${}^d c_i = ' w'$	${}^d c_i = ' b'$
${}^d a c_i$	${}^d a c_{i-1}$	$\overline{{}^d a c_{i-1}}$

Здесь черта обозначает отрицание:  $\bar{w} = b$  и  $\bar{b} = w$ .

По предложенным алгоритмам можно всегда получить из абсолютной записи относительную и наоборот. Показанный выше пример можно записать следующим образом:

$${}^{da} 0w1w2w3w \dots = {}^d 0w1w1w1w \dots = {}^d 0w (1w).$$

В данном случае скобки обозначают бесконечное повторение последовательности, как в записи бесконечной десятичной дроби.

Самоподобные фракталы из пятиконечных звезд в общем случае можно описать следующим образом:

$${}^d N_0 c_0 N_1 c_1 N_2 c_2 \dots N_k c_k (N_{k+1} c_{k+1} \dots N_m c_m).$$

Рассмотрим построение снизу – склеивание звезд во все возрастающие кластеры. В этом случае у звезд фиксированные размеры и мы образуем решетку бесконечного размера. Как уже отмечалось, ограничение размера конструкции, а следовательно, уменьшение строительных элементов на каждом этапе приведет к почти точной аналогии с дефляционным описанием (обычным для фракталов).

В этом случае **абсолютное инфляционное** описание фрактала можно сделать следующим:

$${}^i a N_0 c_0 N_1 c_1 N_2 c_2 \dots$$

где  $N_i = 0, 1, 2 \dots$  – показатель в описании размера обобщенной звезды  $a_k = a\tau^{N_k}$ . Как и в предыдущем случае, будем рассматривать неубывающую последовательность целых чисел.

Построение фрактала с помощью операции инфляции можно представить следующим образом:

1. Выбирается исходная звезда размером  $a_0 = a\tau^{N_0}$ , с ориентацией «w» или «b».

2. По вершинам обобщенной звезды  $Z_1$  размера  $a_1 = a\tau^{N_1}$  ориентации  $c_1$  располагаем звезды исходного размера и ориентации. Сама обобщенная звезда  $Z_1$  не отображается.

3. Кластеры звезд, полученные на предыдущем этапе размножают и располагают по вершинам обобщенной звезды  $Z_2$  (с размером  $a_2 = a\tau^{N_2}$  ориентации  $c_2$ ). Совпадающие точки учитывают один раз. Обобщенная звезда  $Z_2$  не отображается.

Последний пункт повторяем, варьируя размер и ориентацию обобщенной звезды.

**Относительная инфляционное** описание: также, как в предыдущем случае, для выделения свойств самоподобия полезно записать операцию инфляции с помощью относительной записи.

$${}^i N_i = {}^{ia} N_i - {}^{ia} N_{i-1}$$

Относительную ориентацию обобщенных звезд можно определить по правилу *исключающего или* (XOR в программировании):

${}^i c_i$	${}^{ia} c_i = ' w'$	${}^{ia} c_i = ' b'$
${}^{ia} c_{i-1} = ' w'$	$w$	$b$
${}^{ia} c_{i-1} = ' b'$	$b$	$w$

Обратный переход (от относительной инфляционной к абсолютной инфляционной записи) описывается соотношениями:

$${}^{ia} N_i = \sum_{k=0}^i {}^i N_k$$

	${}^i c_i = ' w'$	${}^i c_i = ' b'$
${}^{ia} c_i$	${}^{ia} c_{i-1}$	$\overline{{}^{ia} c_{i-1}}$

Здесь также черта обозначает отрицание. Приведенные уравнения не определяют начальное значение, поэтому условимся, что  ${}^i N_0 = {}^{ia} N_0$ .

Возникает вопрос: как можно связать **дефляционное и инфляционное** описание?

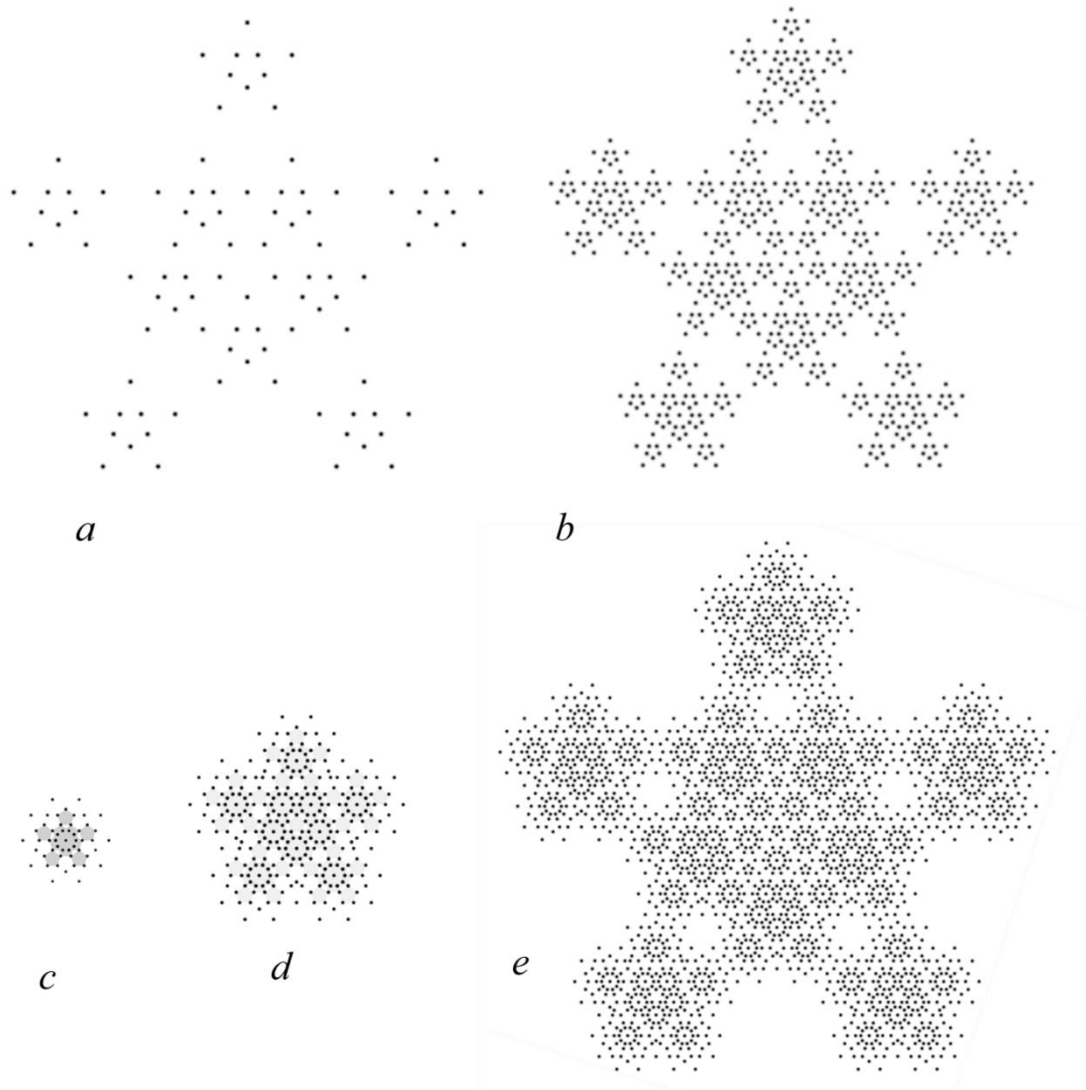
Можно предположить, что такая связь возможна либо при ограниченном числе шагов, либо при строгом самоподобии фрактала.

Пусть число шагов ограничено величиной  $k$  (мы рассматриваем предфрактал порядка  $k$ ), тогда можно показать, что:

$${}^i N_j = {}^d N_{k-j+1}$$

Здесь индексы изменяются в пределах  ${}^i c_i = {}^d c_{k-j+1}$ .

Неопределенными остаются нулевые звезды (исходный размер). Для того, чтобы точки в дефляционном и инфляционном варианте совпадали, нужно масштабировать тот или другой вариант, это отражается в размерах нулевых звезд.



Построение предфрактала  ${}^d0w3w2w0b$  методом дефляции:  
 $a - {}^d0w3w$ ,  $b - {}^d0w3w2w$ ,  $e - {}^d0w3w2w0b$ .  
 Построение предфрактала  ${}^i0b0b2w3w$  методом инфляции:  
 $c - {}^i0b0b$ ,  $d - {}^i0b0b2w$ ,  $e - {}^i0b0b2w3w$

Пример эквивалентных записей:

$${}^d0112131 \leftrightarrow {}^i0131211$$

$${}^dwwbwbb \leftrightarrow {}^ibbbwbw$$

Это соответствие взаимное, а зная относительные записи можно восстановить абсолютные записи фрактала.

Как можно связать записи собственно фракталов, то есть связать бесконечные ряды итераций? При дефляционной записи мы знаем исходный каркас, который все более измельчается. В инфляционной записи мы знаем детали, но неопределенным остается этот исходный каркас. Поэтому, для строго самоподобного фрактала можно записать связь:

$${}^d0w(N_1c_1N_2c_2 \dots N_kc_k) = {}^i0w(N_kc_kN_{k-1}c_{k-1} \dots N_1c_1).$$



Заметим, что совпадение будет наблюдаться только в том случае, когда число шагов каждого предфрактала будет кратно  $k$ .

На рисунке показаны два варианта построения предфрактала  ${}^d0w3w2w0b$  (в инфляционной записи:  ${}^i0b0b2w3w$ ):  $a$ ) строится каркас  ${}^d0w3w$ ;  $b$ ) затем по полученным точкам размещаются центры звезд в  $\tau^2$  меньшие, чем обобщенные звезды 1 шага ( ${}^d0w3w2w$ );  $e$ ) затем по полученным точкам располагаются центры звезд того же размера, что и в предыдущем шаге, но противоположной ориентации ( ${}^d0w3w2w0b$ ). Построение того же предфрактала методом инфляции:  $c$ ) вначале получаем кластер звезд  ${}^i0b0b$ ;  $d$ ) затем такие кластеры располагаем по вершинам в  $\tau^2$  раз большей обобщенной звезды ( ${}^i0b0b2w$ );  $e$ ) затем полученный кластер располагаем по вершинам звезды в  $\tau^3$  больше звезды предыдущего этапа ( ${}^i0b0b2w3w$ ). На рисунках показаны только вершины звезд, темным цветом выделены ядра наименьших звезд.

#### Библиографический список

1. Шлык, В.А. Великий кочевник Бенуа Мандельброт / В.А. Шлык // Вестник Южно-Уральского Университета. Серия «Математика, физика, химия». – 2005. – № 6. – С. 54–71.
2. Шредер, М. Фракталы, хаос, степенные законы / М. Шредер. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 528 с.
3. Penrose, R. Pentaplexity: A Class of Nonperiodic Tilings of the Plane / R. Penrose // Eureka. – 1978. – 39. – Pp. 16–22.
4. Shechtman, D. Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational / D. Symmetry, I. Shechtman, D. Blech, Gratias, and J.W. Cahn // Phys. Rev. Lett. – 1984. – Vol. 53. – N 20. – Pp. 1951 – 1953.
5. Галиулин, Р.В. Кристаллографическая геометрия / Р.В. Галиулин. – М.: Наука, 1984. – 136 с.
6. Henley, C.L. Sphere packing and local environments in Penrose tiling / C.L. Henley // Phys. Rev. B. – 1986. – 34(2). – Pp. 797–816.
7. Polyakov, A.A. Presentation of Penrose tiling as set of overlapping pentagonal stars / A.A. Polyakov // Journal of Physics: Conference Series. – 2008. – Vol. 98. – 012025.
8. Поляков, А.А. Описание паркета Пенроуза посредством взаимоперекрывающихся пятиугольных звезд / А.А. Поляков // Строение и свойства металлических и шлаковых расплавов: труды XII Российской конф., Екатеринбург: Уральский центр академического обслуживания. – 2008. – Т. 1. – С. 242–245.
9. Polyakov, A.A. Fractal structures of regular pentagonal stars in Penrose tiling / A.A. Polyakov // Russian Metallurgy (Metally). – 2012. – I. 8. – Pp. 719–722.

[К содержанию](#)