

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Южно-Уральский государственный университет»  
(национальный исследовательский университет)  
Институт естественных и точных наук  
Факультет Математика, механика и компьютерные технологии  
Кафедра вычислительной механики

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ  
Заведующий кафедрой ВМ,  
д. ф.-м. н., профессор  
\_\_\_\_\_/Ю.М. Ковалев  
\_\_\_\_\_ 2020 г.

**Метод расчета подвижных границ в эйлеровых координатах**

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА  
ЮУрГУ – 01.03.03.2020.306-01-016.ВКР

Руководитель  
к. ф.-м. н., доцент кафедры ВМ  
\_\_\_\_\_/Е.С. Шестаковская  
\_\_\_\_\_ 2020 г.

Автор работы студент группы ЕТ-410  
\_\_\_\_\_/Я.Е. Стариков  
\_\_\_\_\_ 2020 г.

Нормоконтролер  
к.ф.-м.н., доцент кафедры ВМ  
\_\_\_\_\_/Н.Л. Клиначева  
\_\_\_\_\_ 2020 г.

Челябинск 2020

УДК 519.63 + 533.1

## АННОТАЦИЯ

Стариков Я.Е. Метод расчета подвижных границ в эйлеровых координатах. – Челябинск: ЮУрГУ, ЕТ-410, 37 с., 6 ил., библиогр. список – 15 наим., 1 прил.

В выпускной квалификационной работе предлагается метод расчета подвижной границы при использовании эйлеровых координат. Алгоритм основан на рассмотрении приграничной ячейки как лагранжево-эйлеровой. Данный метод реализован как модификация к методу крупных частиц. Проведены верификационные расчеты. В работе также проводится исследование диссипативных свойств метода крупных частиц.

## СОДЕРЖАНИЕ

I.	ВВЕДЕНИЕ .....	2
II.	ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ.....	4
III.	МЕТОД КРУПНЫХ ЧАСТИЦ.....	8
IV.	МЕТОД РАСЧЕТА ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЫ.....	11
V.	ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ.....	17
VI.	АНАЛИЗ ЧИСЛЕННОЙ СХЕМЫ МЕТОДА КРУПНЫХ ЧАСТИЦ НА ДИССИПАТИВНЫЕ СВОЙСТВА.....	22
VII.	ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	32
	БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	33
	ПРИЛОЖЕНИЕ 1 .....	35

# I. ВВЕДЕНИЕ

Механика сплошных сред – наука, посвященная изучению движения газообразных, жидких и деформируемых твердых тел. Во многом стремительное развитие данной сравнительно новой дисциплины вызвано резким подъемом стоимости проведения эксперимента в современном мире. Наличие предварительного, пусть и не всегда точного результата, позволяет минимизировать затраты и вероятный ущерб опытной проверки. Широкое распространение электронно-вычислительных машин и стремительный рост их мощности создали возможности для численного решения задач механики сплошных сред. Большие возможности математического моделирования были использованы при решении задач ядерной энергетики, конструировании летательных и космических аппаратов. Очевидно, что проведение эксперимента в таких областях достаточно затруднено или невозможно.

Численное решение задачи в механике сплошных сред подразумевает решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений. Таким образом, процесс моделирования начинается с выбора корректной для рассматриваемого процесса системы уравнений, согласующейся с законами сохранения и ее разностная аппроксимация. Стоит отметить, что для представления непрерывного оператора дифференцирования в линейном виде существует множество способов, каждый из которых имеет свою погрешность. Как и при решении любой другой задачи, предпочтительна максимизация точности полученного результата. Итоговая ошибка вычислений складывается из нескольких слагаемых: погрешности разностной схемы, представления чисел в ЭВМ, соответствия выбранной модели для описания рассматриваемого процесса.

Задание краевых условий при решении задачи заключается в установке начального распределения параметров рассматриваемого тела в зависимости от пространственных координат и свойств границ расчетной области.

В самом простом случае границы рассматриваемого компакта представляют собой непроницаемые стенки или имеют постоянные во времени значения параметров. Однако, учитывая разнообразие созданных и разрабатываемых механизмов, актуальной является задача описания течений с наличием подвижных границ в области.

Подводя итоги вышенаписанного, целью настоящей работы является разработка алгоритма расчета подвижной границы в эйлеровых координатах.

Для достижения данного результата были поставлены следующие задачи:

1. Обзор литературы по данной теме
2. Разработка метода расчета подвижной границы
3. Проведение верификации метода на тестовых задачах
4. Исследование разностной схемы МКЧ на диссипативные свойства

## II. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Течения жидкости и газа с подвижными границами широко распространены в различных технологических процессах и имеют большое значение в промышленности. Можно выделить несколько типов устройств: быстродействующие затворы взрывного типа, предназначенные для перекрытия стальных трубопроводов в атомной, нефтяной и газовой промышленности; ампулы сохранения, используемые при получении новых материалов (компактирование ударными волнами порошков металлов или керамик); взрывозащитные камеры, предназначенные для локализации действия взрыва; боеприпасы осколочного и кумулятивных принципов действия. Работа многих газодинамических устройств часто связана с деформированием рабочего тела, которое в большинстве случаев выполнено из металла и имеет форму, близкую к плоской, цилиндрической или сферической. Изучение динамических процессов в сферических и цилиндрических оболочках, при таком специфическом воздействии как ударно-волновое нагружение, является сложной и актуальной задачей. Наряду с исследованиями процессов, происходящих в оболочках при радиальном сжатии, не менее важным является изучение процессов, происходящих при радиальном растяжении, реализующимся при разлёте оболочек под действием взрывных нагрузок.

В экспериментах оболочка деформируется под действием продуктов взрыва ВВ, расположенного на её наружной поверхности. В идеальном случае, равномерно распределенный импульс нагрузки сжимает к оси симметрии все элементы оболочки с одинаковой начальной скоростью до тех пор, пока вся кинетическая энергия не израсходуется на работу упругого и пластического деформирования. Таким образом, в результате радиальной деформации оболочки получается оболочка с меньшими наружными и внутренними радиусами и большей толщиной.

Экспериментальное исследование подобного рода задач сопряжено со значительными трудностями и затратами, поэтому разработка физико-математических моделей и численного алгоритма, способного достоверно описывать течения жидкости или газа с подвижными непроницаемыми границами, является актуальной задачей.

В подавляющем большинстве случаев для таких задач используются лагранжевы методы, в которых ячейки расчетной сетки перемещаются вместе с жидкостью и, таким образом, нет необходимости выделять специальным образом контактные границы. Исчерпывающая информация о данном классе методов содержится в работах [1–2]. Книга [1] посвящена разностным методам решения задачи Коши и смешанной задачи для уравнений в частных производных. В ней рассматриваются не только вопросы теории, но и большое количество конкретных задач, имеющих важное практическое значение (уравнение теплопроводности, волновое уравнение, уравнения газовой динамики, уравнение переноса и др.). Работа [2] имеет схожий характер и содержит систематическое изложение методов построения, исследования и реализации разностных схем для численного решения нестационарных задач газовой динамики и магнитной гидродинамики.

Однако при достаточно сильных деформациях вещества происходит сильное искажение ячеек сетки, что вызывает снижение точности расчетов и уменьшение временного шага. А в отдельных случаях происходит потеря метрической близости соседних узлов лагранжевой сетки. Для устранения этих недостатков используются алгоритмы, поддерживающие выпуклость ячеек, неравномерные сетки или процедура перестройки сетки на каждом временном шаге, как это сделано в работе [3].

В эйлеровых методах узлы расчетной сетки фиксированы и не изменяются в процессе счета, что позволяет рассматривать течения с сильными деформациями. Для построения сеток учитывающих форму границ расчетной области или ее подвижность используются методы построения адаптивных сеток, в которых вводятся подвижные сетки, жестко связанные с

движением границы. Такой подход используется в работах [4–8]. Однако такие методы приводят к существенному усложнению вычислительного алгоритма и увеличению расчетного времени.

Существует ряд лагранжево-эйлеровых методов, использующих комбинацию лагранжевой и эйлеровой сетки. Например, в [9] применяется подход совместного расчета задач взаимодействия жидкости и твердого тела. Развиваются различные способы расчета такого взаимодействия – с явным выделением границы взаимодействия (контактной границы) и без явного выделения границы взаимодействия (с отслеживанием движения контактной границы по неподвижной сетке).

В настоящей работе предлагается модификация метода [10], отличительной чертой которого является то, что в качестве лагранжевой ячейки, рассматривается только одна ячейка расчетной области, образованная объединением двух ячеек, прилегающих непосредственно к подвижной границе. Таким образом основной расчет ведется на эйлеровой сетке, а перестройка граничных ячеек не требует больших затрат машинного времени. В отличие от работы [15], предлагается рассчитывать внутреннюю энергию объединенного интервала вместо полной, что не приводит к осцилляциям решения на границе и выполнению закона сохранения энтропии с высокой точностью. Также метод обобщен на случай цилиндрической и сферической симметрии в одномерном случае.

В качестве используемого метода решения уравнений механики сплошной среды был выбран метод крупных частиц, описанный в статье [11]. Данный метод реализует решение задач на эйлеровой сетке. Основная особенность МКЧ – разбиение исходной системы уравнений по физическим процессам.

Исследование разностной схемы численного метода является актуальной задачей, позволяющей выявить возникающие погрешности. В статье [11] производится анализ метода крупных частиц на свойства диссипации и устойчивости. Используется первое дифференциальное



приближение, при этом производится разложение разностных уравнений в ряды Тейлора до слагаемых второго порядка малости.

В некоторых случаях используется оценка прироста энтропии при численном расчете [12]. При таком подходе применяется неравенство энтропии Лакса, из которого следует разностное уравнение для потока и плотности искомой функции. Суммарный прирост энтропии получается путем суммирования изменения энтропии во всех ячейках расчетной области.

### III. МЕТОД КРУПНЫХ ЧАСТИЦ

Основная идея метода крупных частиц состоит в расщеплении по физическим процессам системы уравнений Эйлера, записанной в форме законов сохранения. Расчет значений на каждом временном шаге происходит в три этапа:

1. Эйлеров этап, на котором предполагается временная остановка вещества (отсутствие потока массы через границы ячеек). На данном шаге определяются промежуточные значения скорости и энергии потока.
2. Лагранжев этап, на котором вычисляются потоки массы через границы эйлеровых ячеек с использованием предварительных значений, полученных на первом шаге.
3. Заключительный этап, на котором вычисляются окончательные значения параметров в ячейке.

Кратко опишем метод крупных частиц и изменения, связанные с использованием цилиндрических и сферических координат. Рассмотрим движение идеальной жидкости в одномерном случае. В качестве исходных уравнений возьмем дифференциальные уравнения Эйлера в дивергентном виде (уравнения неразрывности, импульса и энергии).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \text{div}(\rho v v) = -\text{grad}(p) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \text{div}(\rho E v) = -\text{div}(p v) \quad (3.3)$$

где  $\rho$  – плотность,  $E = \varepsilon + 0.5v^2$  – полная удельная энергия,  $\varepsilon$  – внутренняя энергия,  $p$  – давление.

С учетом допущений, принятых на эйлеровом этапе, члены уравнений вида  $\text{div}(\varphi \rho v)$ , где  $\varphi = (1, v, E)$  принимаются равными нулю, тогда из

уравнения неразрывности следует  $\rho = const$ , из-за чего в оставшихся уравнениях плотность может быть вынесена из-под знака дифференциала.

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -grad(p) \quad (3.4)$$

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = -div(pv) \quad (3.5)$$

Запишем уравнения (3.4) – (3.5) в общем случае для декартовой, цилиндрической и сферической систем координат:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (3.6)$$

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial r^\alpha pv}{\partial r} = 0 \quad (3.7)$$

где  $\alpha$  - тип симметрии, равный  $\alpha = (0, 1, 2)$  для декартовой, цилиндрической и сферической систем координат соответственно.

Рассмотрим теперь конечно-разностные аппроксимации первого порядка уравнений (3.6) – (3.7) в момент времени  $t^n$ .

$$\tilde{v}_i = v_i - \frac{p_{i+1/2}^n - p_{i-1/2}^n}{\Delta r} \frac{\Delta t}{\rho_i^n} \quad (3.8)$$

$$\tilde{E}_i^n = E_i^n - \frac{1}{(r_i)^\alpha} \frac{(r_{i+1/2})^\alpha p_{i+1/2}^n v_{i+1/2}^n - (r_{i-1/2})^\alpha p_{i-1/2}^n v_{i-1/2}^n}{\Delta r} \frac{\Delta t}{\rho_i^n} \quad (3.9)$$

где  $r_i$  - координата центра  $i$ -й ячейки в момент времени  $t^n$ . Величины  $\varphi = (v, p, r)$  с дробными индексами считаются относящимися к грани ячейки и определяются следующим образом:

$$\varphi_{i+1/2}^n = \frac{\varphi_i^n + \varphi_{i+1}^n}{2} \quad (3.10)$$

Формулы для расчетов потоков масс на лагранжевом этапе получаются с помощью уравнения неразрывности (3.1). Аппроксимируем его следующей разностной схемой:

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{(r_i^n)^\alpha} \frac{(r_{i+1/2}^n)^\alpha \rho_{i+1/2}^n \tilde{v}_{i+1/2}^n - (r_{i-1/2}^n)^\alpha \rho_{i-1/2}^n \tilde{v}_{i-1/2}^n}{\Delta r} = 0 \quad (3.11)$$

Запишем (3.11) в виде

$$\rho_i^{n+1} (r_i^n)^\alpha \Delta r = \rho_i^n (r_i^n)^\alpha \Delta r - \Delta M_{i+1/2}^n + \Delta M_{i-1/2}^n \quad (3.12)$$

где

$$\Delta M_{i+1/2}^n = (r_{i+1/2}^n)^\alpha \langle \rho_{i+1/2}^n \rangle \langle \tilde{v}_{i+1/2}^n \rangle \Delta t \quad (3.13)$$

Подчеркнем, что  $(r_i^n)^\alpha = (i - 0.5)\Delta r$  справедливо лишь в случае неподвижной сетки, поэтому величину  $r_i$  будем искать как координату центра  $i$ -й ячейки. Значения, указанные в угловых скобках, считаются заданными на границе ячейки. В данной работе для расчета потока масс используются формулы первого порядка с учетом направления потока:

$$\Delta M_{i+1/2}^n = \begin{cases} \rho_i^n \frac{\tilde{v}_i^n + \tilde{v}_{i+1}^n}{2} (r_{i+1/2}^n)^\alpha \Delta t, \text{ если } \tilde{v}_i^n + \tilde{v}_{i+1}^n > 0 \\ \rho_{i+1}^n \frac{\tilde{v}_i^n + \tilde{v}_{i+1}^n}{2} (r_{i+1/2}^n)^\alpha \Delta t, \text{ если } \tilde{v}_i^n + \tilde{v}_{i+1}^n < 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Окончательные значения параметров  $\rho, X = (v, E)$  в ячейке вычисляются на заключительном этапе по формулам, получаемым из (3.12):

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \frac{\sum \Delta M_k^n}{(r_i^n)^\alpha \Delta r} \quad (3.15)$$

$$X_i^{n+1} = \frac{\rho_i^{n+1}}{\rho_i^n} X_i^n + \frac{\sum \tilde{X}_i^n \Delta M_k^n}{\rho_i^{n+1} (r_i^n)^\alpha \Delta r} \quad (3.16)$$

Для замыкания системы (3.1) – (3.3) воспользуемся уравнением состояния идеального газа в виде:

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon \quad (3.17)$$

где  $\gamma$  - показатель адиабаты.

#### IV. МЕТОД РАСЧЕТА ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЫ

Алгоритм расчета подвижной границы основан на представлении граничной ячейки как лагранжево-эйлеровой [13]. Очевидно, что перемещение границы влечет за собой сжатие ячейки, что сначала приведет к уменьшению шага по времени, а при сжатии до бесконечно малой величины - к потере устойчивости метода. Для решения этой проблемы целесообразно две прилегающие к подвижной границе ячейки объединить в одну (рис.1). Таким образом, объединенная ячейка будет больше остальных ячеек эйлеровой сетки, что не повлияет на устойчивость метода. Когда размеры объединенной ячейки, при перемещении границы, уменьшатся до размеров минимальной ячейки основной эйлеровой сетки, производится ее объединение со следующей и т.д. Процедуру объединения ячеек целесообразно проводить перед эйлеровым этапом. Рассмотрим соотношения для получения новых параметров объединенной ячейки в общем случае, когда величины ячеек не равны.

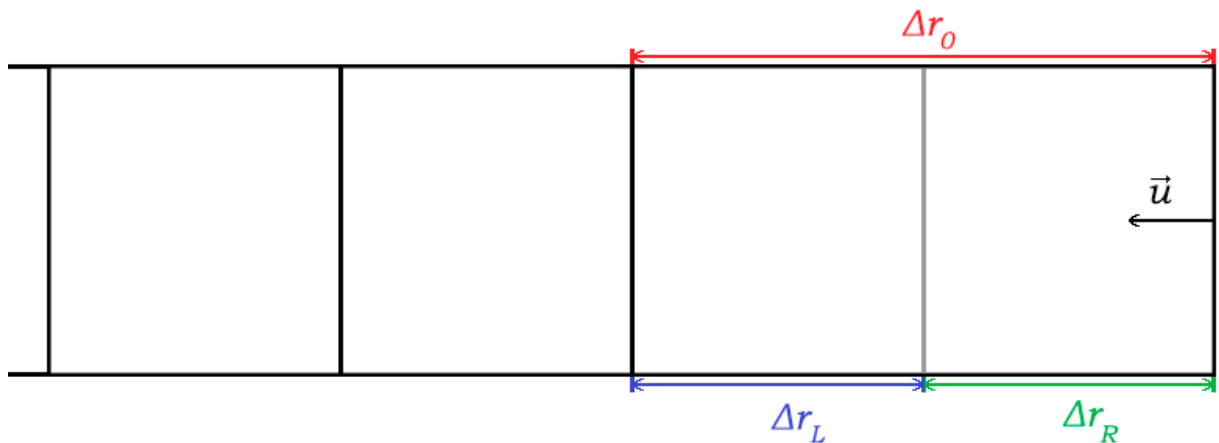


Рис.1. Схема объединения ячеек.

Рассчитаем координаты интервалов по следующим формулам [16]:

$$\Delta r_L = \frac{s_\alpha}{\alpha} \left( (r_{i-1})^\alpha - (r_i)^\alpha \right), \quad \Delta r_R = \frac{s_\alpha}{\alpha} \left( (r_i)^\alpha - (r_{i+1})^\alpha \right), \quad \Delta r_O = \Delta r_R + \Delta r_L,$$

где

$$s_\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha = 1 \\ 2\pi, & \alpha = 2 \\ 4\pi, & \alpha = 3 \end{cases},$$

индекс  $L$  соответствует левой ячейке,  $R$  – правой,  $O$  – объединенной. Тогда массы, импульсы и энергии этих интервалов равны:

$$\Delta M_L = \rho_L \Delta r_L, \Delta K_L = v_L \Delta M_L, \Delta Q_L = E_L \Delta M_L,$$

$$\Delta M_R = \rho_R \Delta r_R, \Delta K_R = v_R \Delta M_R, \Delta Q_R = E_R \Delta M_R.$$

Обозначим массовые концентрации интервалов  $\Delta M_R$  и  $\Delta M_L$  в объединенном интервале через  $\xi_L$  и  $\xi_R$ , где

$$\xi_L = \Delta M_L / (\Delta M_L + \Delta M_R), \quad \xi_R = \Delta M_R / (\Delta M_L + \Delta M_R).$$

Массовые концентрации  $\xi_L$  и  $\xi_R$  удовлетворяют условию

$$\xi_L + \xi_R = 1. \quad (4.1)$$

Значения плотности, скорости и удельной полной энергии объединенной ячейки находятся из законов сохранения массы, количества движения и энергии

$$\rho_O = (\Delta M_L + \Delta M_R) / \Delta r_O, \quad (4.2)$$

$$v_O = (\Delta K_L + \Delta K_R) / (\Delta M_L + \Delta M_R), \quad (4.3)$$

$$E_O = (\Delta Q_L + \Delta Q_R) / (\Delta M_L + \Delta M_R). \quad (4.4)$$

Рассмотрим изменение кинетической энергии при переходе от величин, определенных для интервалов  $\Delta M_R$  и  $\Delta M_L$ , к величинам, определенным для объединенного интервала  $\Delta M_R + \Delta M_L$ . Сумма кинетических энергий интервалов  $\Delta M_R$  и  $\Delta M_L$  равна

$$\bar{Q} = 0,5(v_R^2 \Delta M_R + v_L^2 \Delta M_L). \quad (4.5)$$

Кинетическая энергия объединенного интервала определяется его скоростью  $v_O$  по формуле

$$Q_o = 0,5v_o^2(\Delta M_R + \Delta M_L). \quad (4.6)$$

Избыточная кинетическая энергия

$$\Delta Q = \bar{Q} - Q_o \quad (4.7)$$

переходит во внутреннюю энергию. Эта избыточная кинетическая энергия всегда положительна. Покажем это. Подставим (4.5) и (4.6) в (4.7). В результате получим

$$\Delta Q = 0,5(v_R^2\Delta M_R + v_L^2\Delta M_L - v_o^2(\Delta M_R + \Delta M_L)).$$

Преобразуем выражение  $\Delta Q$  следующим образом. Вынесем за скобки  $\Delta M_R$  и  $\Delta M_L$  и вместо  $v_o$  подставим его выражение через скорости интервалов  $\Delta M_R$  и  $\Delta M_L$

$$v_o = v_R\xi_R + v_L\xi_L. \quad (4.8)$$

С помощью (4.8) запишем  $\Delta Q$  в виде

$$\Delta Q = 0,5(\Delta M_R + \Delta M_L)(v_R^2\xi_R + v_L^2\xi_L - v_o(v_R\xi_R + v_L\xi_L)). \quad (4.9)$$

Выражение в скобке преобразуем, добавив равную нулю величину

$$A = -v_o(v_R\xi_R + v_L\xi_L) + v_o^2(\xi_R + \xi_L).$$

Эта величина равна нулю в силу (4.1) и (4.8). Окончательно величина избыточной кинетической энергии примет вид

$$\Delta Q_{i+0,5} = 0,5(\Delta M_R + \Delta M_o)\left(\xi_R(v_{i+1,5}^{n+1} - v_{i+0,5}^e)^2 + \xi_o(v_{i+0,5}^{n+1} - v_{i+0,5}^e)^2\right).$$

Внутренняя энергия объединенного интервала  $\Delta M_R + \Delta M_L$  состоит из суммы внутренних энергий интервалов  $\Delta M_R$  и  $\Delta M_L$  и избыточной кинетической энергии

$$e_o(\Delta M_R + \Delta M_L) = e_R\Delta M_R + e_L\Delta M_L + \Delta Q. \quad (4.10)$$

После подстановки  $\Delta Q$  в (4.9) и деления на  $\Delta M_R + \Delta M_L$  выражение для внутренней энергии объединенного интервала примет вид

$$e_o = \xi_R(e_R + 0,5(v_R - v_o)^2) + \xi_L(e_L + 0,5(v_L - v_o)^2).$$

Давление находится по  $\rho_0, e_0$  и уравнению состояния. Вообще говоря, примененный метод является методом переноса (пересчета) величин с одной пространственной сетки (старой) на другую сетку (новую, не обязательно эйлерову). Пусть в ячейке «новой» сетки размером  $r$  находится  $N$  интервалов "старой" сетки, в которых решение уже найдено, т. е. известны величины  $\Delta r_k$ ,  $\rho_k$ ,  $v_k$ ,  $P_k$ ,  $e_k$ . Сформулируем формулы в общем виде. Важно, чтобы значения  $\Delta r_k$  удовлетворяли условию

$$\Delta r = \sum_{k=1}^N \Delta r_k.$$

Массы интервалов «старой» сетки и масса интервала «новой» ячейки определяются с помощью уравнений

$$\Delta M_k = \rho_k \Delta r_k, \quad \Delta M = \sum_{k=1}^N \Delta M_k.$$

Тогда объемные и массовые концентрации

$$\alpha_k = \frac{\Delta r_k}{\Delta r}, \quad \xi_k = \frac{\Delta M_k}{\Delta M}. \quad (4.11)$$

Из (3.10) следует, что  $\alpha_k$  и  $\rho_k$  удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k = 1, \quad \sum_{k=1}^N \xi_k = 1.$$

Из законов сохранения массы, количества движения и энергии следуют уравнения для определения средних величин в новой ячейке

$$\rho = \sum_{k=1}^N \alpha_k \rho_k,$$

$$v = \sum_{k=1}^N \xi_k v_k,$$

$$e = \sum_{k=1}^N \xi_k \left( e_k + 0,5(v_k - v)^2 \right).$$

Давление определяется по уравнению состояния. Когда размеры объединенной ячейки уменьшатся до размеров минимальной ячейки основной эйлеровой сетки, производится ее объединение со следующей, и т.д.



Рассмотрим изменение параметров в ячейке при ее сжатии (рис. 2).

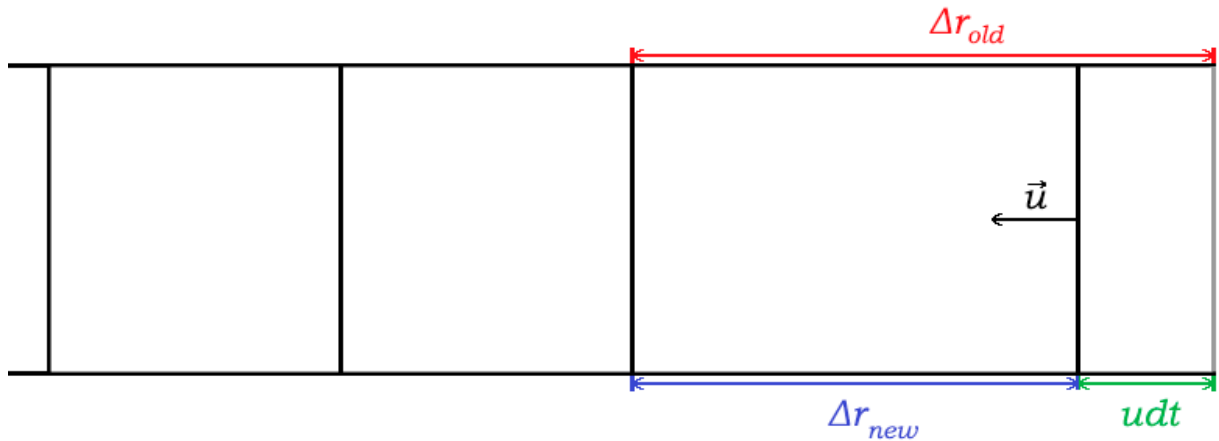


Рис. 2. Схема сжатия ячейки.

Пересчет параметров объединенной (лагранжевой) ячейки при перемещении подвижной стенки производится на каждом временном шаге до начала эйлерового этапа по формулам для изоэнтропического течения:

$$r_{new} = r_{old} - u_b dt$$

$$\rho_{Onew} = \rho_{Oold} \frac{(\Delta r_{Oold})^\alpha}{(\Delta r_{Onew})^\alpha}$$

$$u_{Onew} = \frac{\rho_{Oold} u_{Oold} (\Delta r_{Oold})^\alpha}{\rho_{Onew} (\Delta r_{Onew})^\alpha} = u_{Oold}$$

$$p_{Onew} = p_{Oold} \left( \frac{\rho_{Onew}}{\rho_{Oold}} \right)^\gamma = p_{Oold} \left( \frac{(\Delta r_{Oold})^\alpha}{(\Delta r_{Onew})^\alpha} \right)^\gamma$$

$$e_{Onew} = e(\rho_{Onew}, p_{Onew})$$

$$E_{Onew} = e_{Onew} + \frac{u_{Onew}^2}{2},$$

где индексами *old* и *new* обозначены параметры объединенной ячейки соответственно до и после сжатия. Таким образом, данный алгоритм

перестройки сетки затрагивает лишь прилежащие к подвижной стенке ячейки, не требуя перестроения всей расчетной области, что оказывает положительное влияние на производительность расчетов.

## V. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ

Для оценки точности разработанного метода было использовано аналитическое решение задачи о сходящейся ударной волне в сосуде с непроницаемой стенкой, описывающее случаи плоской, цилиндрической и сферической симметрии [14]. Рассмотрим сосуд с непроницаемой стенкой размером  $r_0 = 1$ , в котором находится газ с начальными параметрами  $\rho_0 = 1$ ,  $u_0 = 0$ ,  $P_0 = 0$ ,  $E_0 = 0$ ,  $\gamma = 5/3$ . В начальный момент времени на границе задана скорость  $u_b = -1$  (рис. 3).

$$\rho_0 = 1, u_0 = 0, \varepsilon_0 = 0, P_0 = 0, \gamma = 5/3$$



Рис. 3. Начальное распределение параметров тестовой задачи.

Профили давления, скорости, плотности и энтропийной функции на несколько моментов времени приведены на рис.4-6.

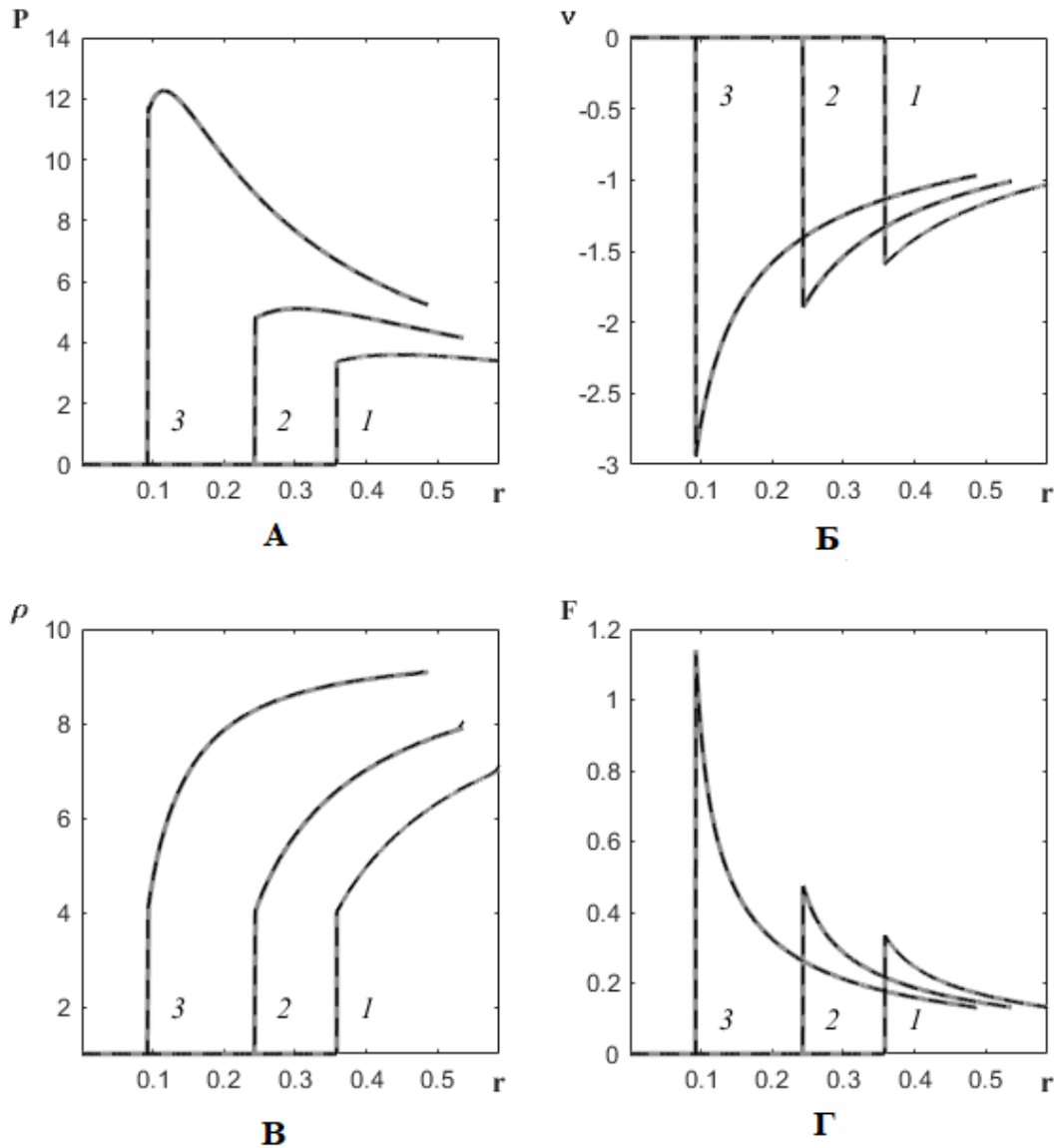


Рис.4. Профили давления (а), скорости (б), плотности (в) и энтропийной функции (г) на три момента времени: 1 –  $t = 0,4$ ; 2 –  $t = 0,45$ ; 3 –  $t = 0,5$  для сферического случая. Сплошная линия - аналитическое решение, пунктирная - численное решение.

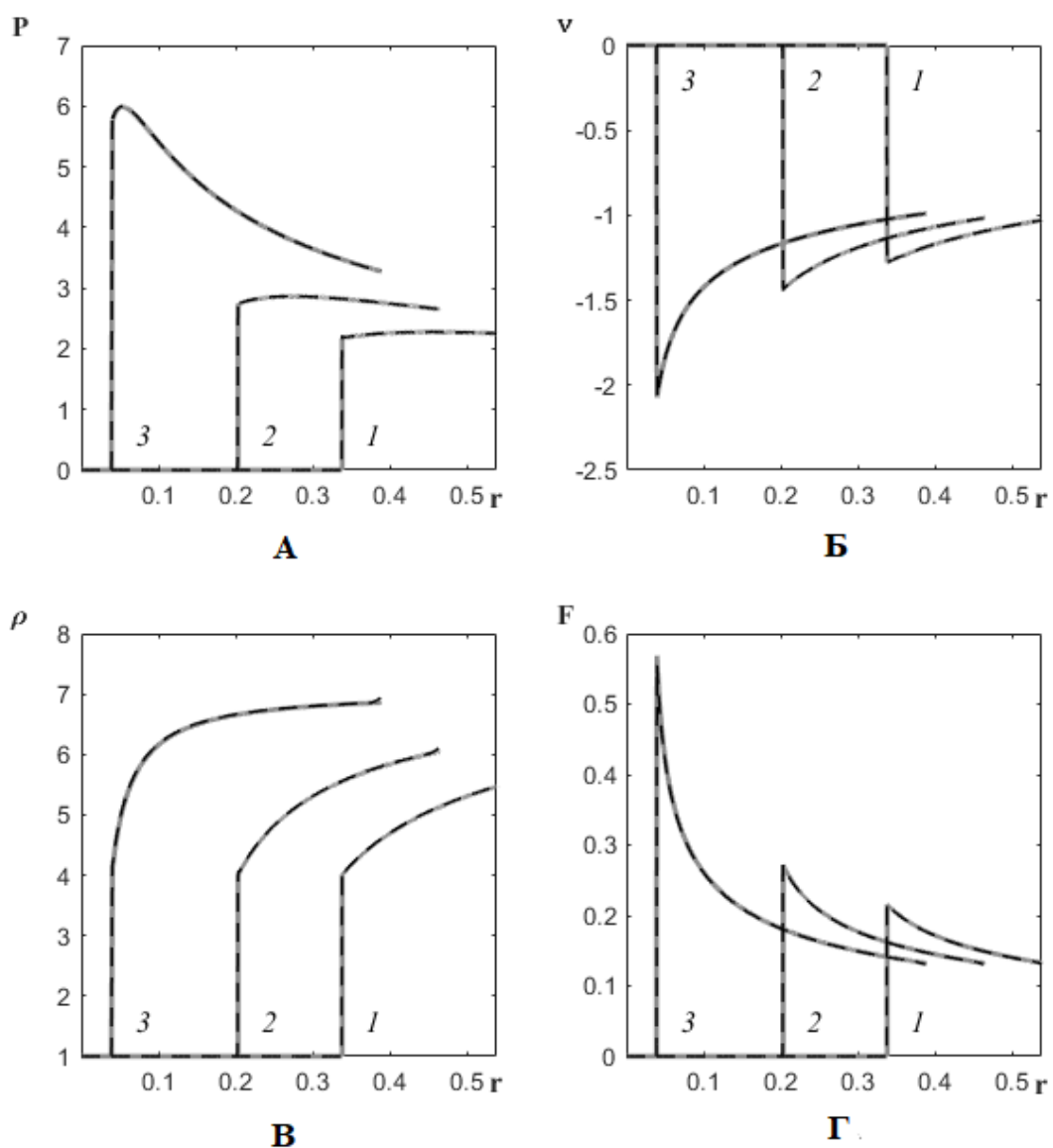


Рис.5. Профили давления (а), скорости (б), плотности (в) и энтропийной функции (г) на три момента времени: 1 –  $t = 0,45$ ; 2 –  $t = 0,525$ ; 3 –  $t = 0,6$  для цилиндрического случая. Сплошная линия - аналитическое решение, пунктирная - численное решение.

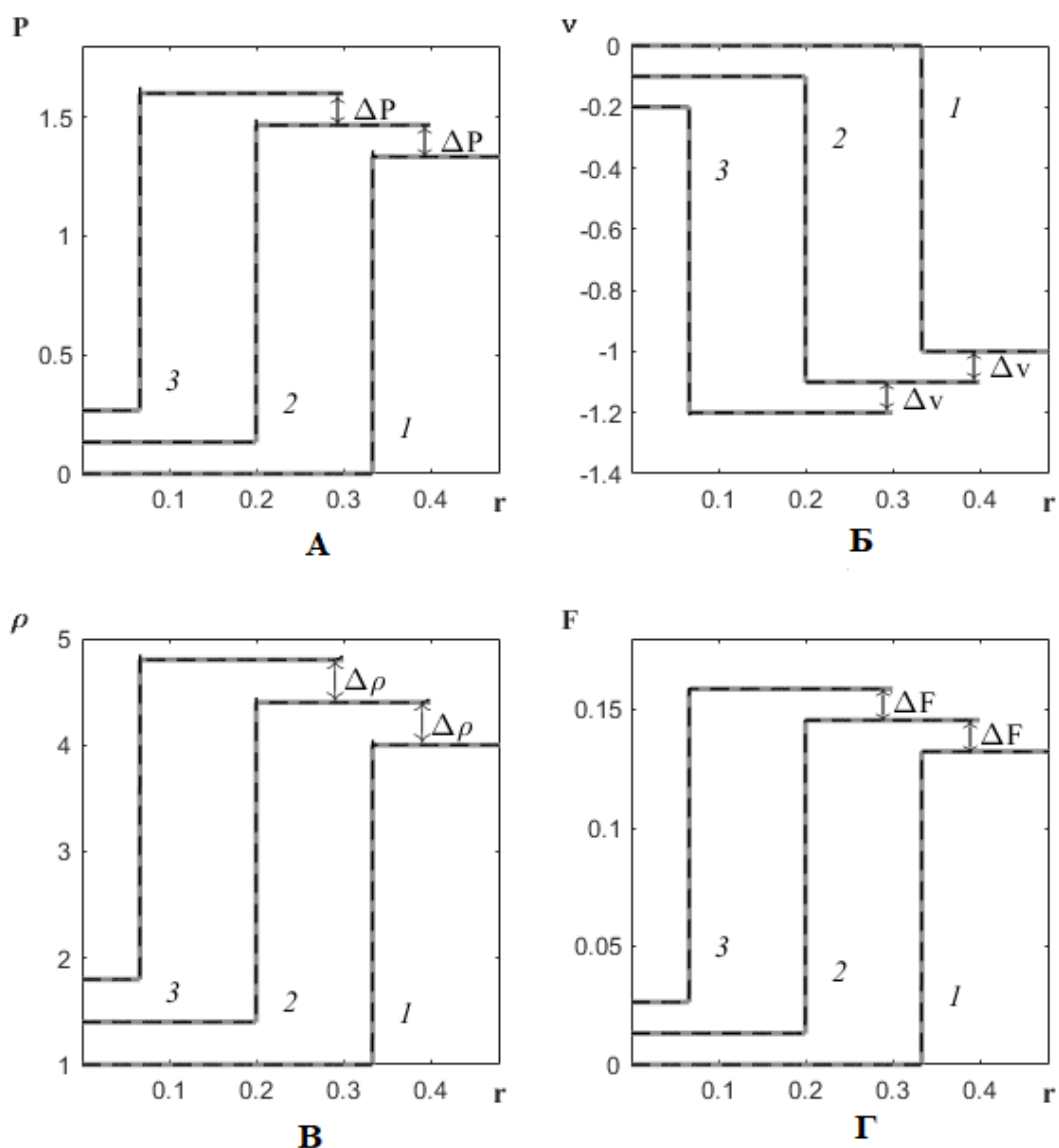


Рис.6. Профили давления (а), скорости (б), плотности (в) и энтропийной функции (г) на три момента времени: 1 -  $t = 0,5$ ; 2 -  $t = 0,6$ ; 3 -  $t = 0,7$  для плоского случая. Сплошная линия - аналитическое решение, пунктирная - численное решение.

Профили давления, скорости и плотности практически совпадают, что указывает на достаточно высокую точность метода. На графике плотности наблюдается небольшой энтропийный след. Однако сравнение энтропийных функций показывает, что отклонение расчетного значения распределения от

точного максимально за фронтом (или на фронте) ударной волны и составляет не более 0,01%. Таким образом, разработанный алгоритм расчета подвижной границы показал отличные результаты при решении тестовой задачи.

## VI. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННОЙ СХЕМЫ МЕТОДА КРУПНЫХ ЧАСТИЦ НА ДИССИПАТИВНЫЕ СВОЙСТВА

Исследование разностной схемы проведено с помощью первого дифференциального приближения ввиду сложности выкладок для более высоких порядков. Отметим, что рассмотрение лишь слагаемых нулевого и первого порядка позволяет полностью охарактеризовать свойства метода. Основная цель данного исследования – проверка диссипативности разностной схемы. Выкладки приведены в декартовой системе координат с учетом направления течения слева направо и без использования искусственной вязкости.

Рассмотрим уравнение прироста энтропии

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + P \frac{\partial V}{\partial t}, \quad (6.1)$$

где  $T$  – температура,  $S$  – энтропия,  $\varepsilon$  – внутренняя энергия,  $P$  – давление,  $V$  – удельный объем.

В соответствии с работой [15] левая часть этого уравнения может быть выражена через погрешности аппроксимации исходной системы уравнений (3.1) – (3.3):

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = \omega_8 = P\omega_1 + \omega_3 - U\omega_2, \quad (6.2)$$

где  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  – погрешности аппроксимации уравнения неразрывности, уравнения движения и уравнения энергии соответственно.

Процесс нахождения данных ошибок сводится к разложению разностного уравнения в ряды Тейлора с последующим выделением дифференциальных операторов. Исследуем вначале уравнение неразрывности (3.1). С учетом особенностей метода крупных частиц, получим следующие соотношения:



$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \frac{1}{h}(M_{i-1/2} - M_{i+1/2}). \quad (6.3)$$

Выражение для потока массы с учетом движения слева направо примет вид

$$M_{i+1/2} = \rho_i^n (\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n) \frac{\tau}{2}. \quad (6.4)$$

Подставив (6.4) в (6.3) и проведя простые преобразования, получим уравнение неразрывности в привычном виде

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \frac{\tau}{2h} (\rho_{i-1}^n (\tilde{u}_{i-1}^n + \tilde{u}_i^n) - \rho_i^n (\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n)). \quad (6.5)$$

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\tau} + \frac{\rho_i^n (\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n) - \rho_{i-1}^n (\tilde{u}_{i-1}^n + \tilde{u}_i^n)}{2h} = 0. \quad (6.6)$$

Разложим первое слагаемое в ряд Тейлора в точке  $(i, n)$ . Для простоты условимся, что члены без индекса определены в точке  $(i, n)$ . Слагаемые выше первого порядка по пространству или времени не рассматриваем по упомянутым причинам.

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\tau} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \tau. \quad (6.7)$$

Проведем аналогичную операцию со вторым слагаемым

$$\begin{aligned} \frac{\rho_i^n (\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n) - \rho_{i-1}^n (\tilde{u}_{i-1}^n + \tilde{u}_i^n)}{2h} &= \frac{1}{2h} (\rho_i^n (2\tilde{u}_i^n + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} h^2) - (\rho_i^n - \frac{\partial \rho}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} h^2) \\ & (2\tilde{u}_i^n - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} h^2)) = \frac{1}{2h} (2\rho_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} h + 2\tilde{u}_i^n \frac{\partial \rho}{\partial x} h - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} h^2 - \tilde{u}_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} h^2) = \\ &= \rho_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{u}_i^n \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} h - \frac{1}{2} \tilde{u}_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} h. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Рассмотрим более подробно промежуточную скорость  $\tilde{u}$ . Выражение для этой величины представлено ниже

$$\tilde{u}_i^n = u_i^n - \frac{\tau}{2\rho_i^n h} (P_{i+1}^n - P_{i-1}^n). \quad (6.9)$$

Проведем разложение (6.9) в ряд Тейлора

$$\tilde{u}_i^n = u_i^n - \frac{\tau}{\rho_i^n} \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (6.10)$$

Также найдем первую и вторую производные промежуточной скорости

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\tau}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} + \frac{\tau}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\tau}{\rho^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\tau}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{2\tau}{\rho^3} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (6.12)$$

Подставив (6.11-6.12) в (6.8), получим

$$\begin{aligned} \rho_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{u}_i^n \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} h - \frac{1}{2} \tilde{u}_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} h = \rho_i^n \frac{\partial u}{\partial x} - \tau \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\tau}{\rho_i^n} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} + u_i^n \frac{\partial \rho}{\partial x} - \\ - \frac{\tau}{\rho_i^n} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} h - \frac{1}{2} u_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} h = \rho_i^n \frac{\partial u}{\partial x} + u_i^n \frac{\partial \rho}{\partial x} - \tau \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} h - \\ - \frac{1}{2} u_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} h. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Комбинируя (6.13) и (6.7), получим итоговый вид уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \tau + \rho_i^n \frac{\partial u}{\partial x} + u_i^n \frac{\partial \rho}{\partial x} - \tau \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} h - \frac{1}{2} u_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} h = 0. \quad (6.14)$$

Выделяя дифференциальное уравнение и выделяя лишние слагаемые в погрешность, (6.14) примет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \omega_1 = 0. \quad (6.15)$$

Таким образом, выражение для  $\omega_1$  имеет вид

$$\omega_1 \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \tau - \tau \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} h - \frac{1}{2} u_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} h. \quad (6.16)$$

Теперь проведем рассмотрение уравнения движения

$$u_i^{n+1} = \frac{\rho_i^n}{\rho_i^{n+1}} \tilde{u}_i^n + \frac{\tilde{u}_{i-1}^n M_{i-1/2} - \tilde{u}_i^n M_{i+1/2}}{\rho_i^{n+1} h}. \quad (6.17)$$

С учетом направления потоков это уравнение примет вид

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} = \frac{\rho_i^n}{\rho_i^{n+1}} u_i^n - \frac{\tau}{2\rho_i^{n+1} h} (P_{i+1}^n - P_{i-1}^n) + \frac{\rho_{i-1}^n \tilde{u}_{i-1}^n (\tilde{u}_{i-1}^n + \tilde{u}_i^n) - \rho_i^n \tilde{u}_i^n (\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n)}{\rho_i^{n+1}} \frac{\tau}{2h}, \\ \frac{\rho_i^{n+1} u_i^{n+1} - \rho_i^n u_i^n}{\tau} + \frac{\rho_i^n \tilde{u}_i^n (\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n) - \rho_{i-1}^n \tilde{u}_{i-1}^n (\tilde{u}_{i-1}^n + \tilde{u}_i^n)}{2h} + \frac{P_{i+1}^n - P_{i-1}^n}{2h} = 0. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Разложим слагаемые этого уравнения в ряды Тейлора. Первое слагаемое примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\rho_i^{n+1} u_i^{n+1} - \rho_i^n u_i^n}{\tau} &= \frac{1}{\tau} \left( (\rho_i^n + \frac{\partial \rho}{\partial t} \tau + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \tau^2) (u_i^n + \frac{\partial u}{\partial t} \tau + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tau^2) - \rho_i^n u_i^n \right) = \rho_i^n \frac{\partial u}{\partial t} + \\ &+ u_i^n \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} u_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \tau + \frac{1}{2} \rho_i^n \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tau + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \rho}{\partial t} \tau. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Второй член уравнения примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\rho_i^n \tilde{u}_i^n (\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n)}{2h} &= \frac{1}{2h} \rho_i^n \tilde{u}_i^n (2\tilde{u}_i^n + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} h^2) = \frac{1}{2h} (2\rho_i^n \tilde{u}_i^n \tilde{u}_i^n + \rho_i^n \tilde{u}_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} h + \\ &+ \frac{1}{2} \rho_i^n \tilde{u}_i^n \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} h^2), \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2h} \rho_{i-1}^n \tilde{u}_{i-1}^n (\tilde{u}_{i-1}^n + \tilde{u}_i^n) &= -\frac{1}{2h} (\rho_i^n - \frac{\partial \rho}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} h^2) (\tilde{u}_i^n - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} h^2) (2\tilde{u}_i^n - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} h + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} h^2) = -\frac{1}{2h} (\rho_i^n \tilde{u}_i^n - \rho_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} h - \tilde{u}_i^n \frac{\partial \rho}{\partial x} h + \frac{1}{2} \rho_i^n \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} h^2 + \frac{1}{2} \tilde{u}_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} h^2 + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} h^2) \\ &(2\tilde{u}_i^n - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} h^2) = -\frac{1}{2h} (2\rho_i^n \tilde{u}_i^n \tilde{u}_i^n - \rho_i^n \tilde{u}_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} h + \frac{1}{2} \rho_i^n \tilde{u}_i^n \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} h^2 - 2\tilde{u}_i^n \rho_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} h + \\ &+ \rho_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} h^2 + \rho_i^n \tilde{u}_i^n \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} h^2 - 2\tilde{u}_i^n \tilde{u}_i^n \frac{\partial \rho}{\partial x} h + \tilde{u}_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} h^2 + 2\tilde{u}_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} h^2 + \tilde{u}_i^n \tilde{u}_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} h^2). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Проводя замену  $\tilde{u}$  в (6.20) и (6.21) с помощью (6.10)–(6.12), получим

$$\begin{aligned} \frac{\rho_i^n \tilde{u}_i^n (\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n) - \rho_{i-1}^n \tilde{u}_{i-1}^n (\tilde{u}_{i-1}^n + \tilde{u}_i^n)}{2h} &= 2\rho_i^n u_i^n \frac{\partial u}{\partial x} - 2u_i^n \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tau + 2 \frac{u_i^n}{\rho_i^n} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \tau - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} \tau - \\ &-\frac{1}{2} \rho_i^n \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} h - \frac{1}{2} \rho_i^n u_i^n \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h + u_i^n u_i^n \frac{\partial \rho}{\partial x} - 2 \frac{u_i^n}{\rho_i^n} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \tau - \frac{3}{2} u_i^n \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} h - \frac{1}{2} u_i^n u_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} h = \\ &= 2\rho_i^n u_i^n \frac{\partial u}{\partial x} + u_i^n u_i^n \frac{\partial \rho}{\partial x} - 2u_i^n \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tau - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} \tau - \frac{1}{2} \rho_i^n \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} h - \frac{1}{2} \rho_i^n u_i^n \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h - \\ &-\frac{3}{2} u_i^n \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} h - \frac{1}{2} u_i^n u_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} h. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Аналогично поступим и с третьим слагаемым, в результате чего оно примет вид

$$\frac{P_{i+1}^n - P_{i-1}^n}{2h} = \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (6.23)$$

Комбинируя (6.18), (6.22) и (6.23), получим финальный вид уравнения движения

$$\begin{aligned} & \rho_i^n \frac{\partial u}{\partial t} + u_i^n \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} u_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \tau + \frac{1}{2} \rho_i^n \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tau + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \rho}{\partial t} \tau + 2 \rho_i^n u_i^n \frac{\partial u}{\partial x} + u_i^n u_i^n \frac{\partial \rho}{\partial x} - 2 u_i^n \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tau - \\ & - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} \tau - \frac{1}{2} \rho_i^n \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} h - \frac{1}{2} \rho_i^n u_i^n \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h - \frac{3}{2} u_i^n \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} h - \frac{1}{2} u_i^n u_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} h + \frac{\partial P}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Выделяя дифференциальное уравнение, найдем  $\omega_2$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} + \omega_2 = 0, \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} \omega_2 \approx & \frac{1}{2} u_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \tau + \frac{1}{2} \rho_i^n \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tau + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \rho}{\partial t} \tau - 2 u_i^n \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tau - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} \tau - \frac{1}{2} \rho_i^n \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} h - \\ & - \frac{1}{2} \rho_i^n u_i^n \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h - \frac{3}{2} u_i^n \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} h - \frac{1}{2} u_i^n u_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} h. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Перейдем к нахождению  $\omega_3$ , используя уравнение энергии. По аналогии с предыдущими выкладками, оно примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_i^{n+1} E_i^{n+1} - \rho_i^n E_i^n}{\tau} + \frac{\rho_i (\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n) \tilde{E}_i^n - \rho_{i-1} (\tilde{u}_{i-1}^n + \tilde{u}_i^n) \tilde{E}_{i-1}^n}{2h} + \\ & + \frac{(P_i^n + P_{i+1}^n)(\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n) - (P_{i-1}^n + P_i^n)(\tilde{u}_{i-1}^n + \tilde{u}_i^n)}{4h} = 0. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Проведем разложение первого слагаемого, после чего оно примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_i^{n+1} E_i^{n+1} - \rho_i^n E_i^n}{\tau} = \frac{1}{\tau} \left( \left( \rho_i^n + \frac{\partial \rho}{\partial t} \tau + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \tau^2 \right) \left( E_i^n + \frac{\partial E}{\partial t} \tau + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \tau^2 \right) - \rho_i^n E_i^n \right) = \\ & = \rho_i^n \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho_i^n \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \tau + E_i^n \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} E_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \tau + \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial E}{\partial t} \tau. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Поступим таким же образом со вторым слагаемым уравнения энергии

$$\frac{1}{2h} (\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n) \rho_i^n \tilde{E}_i^n = \frac{1}{2h} \left( 2 \tilde{u}_i^n + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} h^2 \right) \rho_i^n \tilde{E}_i^n, \quad (6.29)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2h} (\tilde{u}_{i-1}^n + \tilde{u}_i^n) \rho_{i-1}^n \tilde{E}_{i-1}^n = - \frac{1}{2h} \left( 2 \tilde{u}_i^n \tilde{E}_i^n \rho_i^n - 2 \tilde{u}_i^n \tilde{E}_i^n \frac{\partial \rho}{\partial x} h - 2 \tilde{u}_i^n \rho_i^n \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} h - \rho_i^n \tilde{E}_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} h + \right. \\ & + \tilde{E}_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} h^2 + 2 \tilde{u}_i^n \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} h^2 + \rho_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} h^2 + \frac{1}{2} \rho_i^n \tilde{E}_i^n \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} h^2 + \tilde{u}_i^n E_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} h^2 + \\ & \left. + \rho_i^n \tilde{u}_i^n \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} h^2 \right), \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2h}(\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n)\rho_i^n \tilde{E}_i^n - \frac{1}{2h}(\tilde{u}_{i-1}^n + \tilde{u}_i^n)\rho_{i-1}^n \tilde{E}_{i-1}^n = \frac{1}{2h}(2\tilde{u}_i^n \tilde{E}_i^n \frac{\partial \rho}{\partial x} h + 2\tilde{u}_i^n \rho_i^n \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} h + \\
& + 2\rho_i^n \tilde{E}_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} h - \tilde{E}_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} h^2 - 2\tilde{u}_i^n \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} h^2 - \rho_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} h^2 - \tilde{u}_i^n \tilde{E}_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} h^2 - \\
& - \rho_i^n \tilde{u}_i^n \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} h^2) = \tilde{u}_i^n \tilde{E}_i^n \frac{\partial \rho}{\partial x} + \tilde{u}_i^n \rho_i^n \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} + \rho_i^n \tilde{E}_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{1}{2} \tilde{E}_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} h - \\
& - \tilde{u}_i^n \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} h - \frac{1}{2} \rho_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} h - \frac{1}{2} \tilde{u}_i^n \tilde{E}_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} h - \frac{1}{2} \rho_i^n \tilde{u}_i^n \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} h.
\end{aligned} \tag{6.31}$$

Выражение (6.31) содержит промежуточную энергию  $\tilde{E}$ . Рассмотрим уравнение для этой величины и проведем разложение в ряды Тейлора

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_i^n &= E_i^n - (P_{i+1/2}^n \tilde{u}_{i+1/2}^n - P_{i-1/2}^n \tilde{u}_{i-1/2}^n) \frac{\tau}{\rho_i^n h} = E_i^n - \left( \frac{1}{4} (P_i^n + P_{i+1}^n) (\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n) - \right. \\
& - \left. \frac{1}{4} (P_{i-1}^n + P_i^n) (\tilde{u}_{i-1}^n + \tilde{u}_i^n) \right) \frac{\tau}{\rho_i^n h} = E_i^n - \frac{\tau}{4h\rho_i^n} \left( (2P_i^n + \frac{\partial P}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} h^2) \right. \\
& (2\tilde{u}_i^n + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} h^2) - (2P_i^n - \frac{\partial P}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} h^2) (2\tilde{u}_i^n - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} h^2) = \\
& = E_i^n - \frac{\tau}{4h\rho_i^n} \left( (4P_i^n \tilde{u}_i^n + 2P_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} h + 2\tilde{u}_i^n \frac{\partial P}{\partial x} h + P_i^n \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} h^2 + \tilde{u}_i^n \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} h^2 + \right. \\
& + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} h^2) - (4P_i^n \tilde{u}_i^n - 2P_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} h - 2\tilde{u}_i^n \frac{\partial P}{\partial x} h + P_i^n \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} h^2 + \tilde{u}_i^n \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} h^2 + \\
& + \left. \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} h^2) \right) = E_i^n - \frac{\tau}{4h\rho_i^n} (4P_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} h + 4\tilde{u}_i^n \frac{\partial P}{\partial x} h) = \\
& = E_i^n - \frac{\tau}{\rho_i^n} (P_i^n \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\tau}{\rho_i^n} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} P_i^n + \frac{\tau}{(\rho_i^n)^2} P_i^n \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} + u_i^n \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\tau}{\rho_i^n} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x}) = \\
& = E_i^n - \frac{P_i^n}{\rho_i^n} \frac{\partial u}{\partial x} \tau - \frac{u_i^n}{\rho_i^n} \frac{\partial P}{\partial x} \tau.
\end{aligned} \tag{6.32}$$

Найдем первую и вторую производные выражения (6.32)

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \tau - \frac{P}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tau + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \tau - \frac{u}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tau + \frac{u}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \tau, \tag{6.33}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{3}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} \tau - \frac{3}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tau + \frac{4}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} \tau - \frac{P}{\rho} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \tau - \frac{u}{\rho} \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \tau + \\
&+ \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tau + \frac{u}{\rho^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tau + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tau + \frac{u}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tau + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \tau + \\
&+ \frac{u}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \tau - \frac{P}{\rho^4} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \tau - \frac{u}{\rho^4} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \tau. \tag{6.34}
\end{aligned}$$

Проводя замены  $\tilde{u}$  и  $\tilde{E}$  в (6.31) с использованием (6.10)–(6.12) и (6.32)–(6.34), получим

$$\begin{aligned}
&\tilde{u}_i^n \tilde{E}_i^n \frac{\partial \rho}{\partial x} + \tilde{u}_i^n \rho_i^n \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} + \rho_i^n \tilde{E}_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{1}{2} \tilde{E}_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} h - \tilde{u}_i^n \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} h - \frac{1}{2} \rho_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} h - \\
&\frac{1}{2} \tilde{u}_i^n \tilde{E}_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} h - \frac{1}{2} \rho_i^n \tilde{u}_i^n \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} h = (u_i^n - \frac{\tau}{\rho_i^n} \frac{\partial P}{\partial x}) (E_i^n - \frac{P_i^n}{\rho_i^n} \frac{\partial u}{\partial x} \tau - \frac{u_i^n}{\rho_i^n} \frac{\partial P}{\partial x} \tau) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \\
&+ (u_i^n - \frac{\tau}{\rho_i^n} \frac{\partial P}{\partial x}) \rho_i^n (\frac{\partial E}{\partial x} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \tau - \frac{P}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tau + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \tau - \frac{u}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tau + \frac{u}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \tau) + \\
&+ \rho (E_i^n - \frac{P_i^n}{\rho_i^n} \frac{\partial u}{\partial x} \tau - \frac{u_i^n}{\rho_i^n} \frac{\partial P}{\partial x} \tau) (\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\tau}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x}) - \frac{1}{2} (E_i^n - \frac{P_i^n}{\rho_i^n} \frac{\partial u}{\partial x} \tau - \frac{u_i^n}{\rho_i^n} \frac{\partial P}{\partial x} \tau) \\
&(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\tau}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x}) \frac{\partial \rho}{\partial x} h - (u_i^n - \frac{\tau}{\rho_i^n} \frac{\partial P}{\partial x}) \frac{\partial \rho}{\partial x} (E_i^n - \frac{P_i^n}{\rho_i^n} \frac{\partial u}{\partial x} \tau - \frac{u_i^n}{\rho_i^n} \frac{\partial P}{\partial x} \tau) h - \\
&- \frac{1}{2} \rho_i^n (\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\tau}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x}) (\frac{\partial E}{\partial x} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \tau - \frac{P}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tau + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \tau - \frac{u}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tau + \\
&+ \frac{u}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \tau) h - \frac{1}{2} (u_i^n - \frac{\tau}{\rho_i^n} \frac{\partial P}{\partial x}) (E_i^n - \frac{P_i^n}{\rho_i^n} \frac{\partial u}{\partial x} \tau - \frac{u_i^n}{\rho_i^n} \frac{\partial P}{\partial x} \tau) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} h - \frac{1}{2} \rho_i^n (u_i^n - \frac{\tau}{\rho_i^n} \frac{\partial P}{\partial x}) \\
&(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{3}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} \tau - \frac{3}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tau + \frac{4}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} \tau - \frac{P}{\rho} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \tau - \frac{u}{\rho} \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \tau + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tau + \\
&+ \frac{u}{\rho^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tau + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tau + \frac{u}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tau + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \tau + \frac{u}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \tau - \\
&- \frac{P}{\rho^4} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \tau - \frac{u}{\rho^4} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \tau) h = u E \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{u P}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \tau - \frac{u^2}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \tau - \frac{E}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \tau - \\
&- u \rho \frac{\partial E}{\partial x} - 2u \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \tau - u P \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tau + \frac{u P}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \tau - u^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tau + \frac{u^2}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \tau - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial E}{\partial x} \tau + \\
&+ \rho E \frac{\partial u}{\partial x} - E \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tau + \frac{E}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} - P \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \tau - u \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \tau - \\
&- \frac{1}{2} E \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} h - u E \frac{\partial \rho}{\partial x} h - \frac{1}{2} \rho \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial E}{\partial x} h - \frac{1}{2} u E \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} h - \frac{1}{2} \rho u \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} h.
\end{aligned}$$

Таким образом, второе слагаемое примет вид

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2h}(\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n)\rho_i^n \tilde{E}_i^n - \frac{1}{2h}(\tilde{u}_{i-1}^n + \tilde{u}_i^n)\rho_{i-1}^n \tilde{E}_{i-1}^n = uE \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho E \frac{\partial u}{\partial x} + u\rho \frac{\partial E}{\partial x} - \\
& - 3u \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \tau - uP \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tau - u^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tau - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial E}{\partial x} \tau - E \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tau - P \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \tau - \\
& - u \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \tau - \frac{1}{2} E \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} h - uE \frac{\partial \rho}{\partial x} h - \frac{1}{2} \rho \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial E}{\partial x} h - \frac{1}{2} uE \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} h - \frac{1}{2} \rho u \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} h.
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Наконец, перейдем к третьему слагаемому и проведем аналогичные действия

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4h}(P_i^n + P_{i+1}^n)(\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n) = \frac{1}{4h}(2P_i^n + \frac{\partial P}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} h^2)(2\tilde{u}_i^n + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} h^2) = \\
& = \frac{1}{4h}(4P_i^n \tilde{u}_i^n + 2P_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} h + P_i^n \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} h^2 + 2\tilde{u}_i^n \frac{\partial P}{\partial x} h + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} h^2 + \tilde{u}_i^n \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} h^2) = \\
& = -\frac{1}{4h}(P_{i-1}^n + P_i^n)(\tilde{u}_{i-1}^n + \tilde{u}_i^n) = -\frac{1}{4h}(2P_i^n - \frac{\partial P}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} h^2)(2\tilde{u}_i^n - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} h^2) = \\
& = \frac{1}{4h}(4P_i^n \tilde{u}_i^n - 2P_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} h + P_i^n \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} h^2 - 2\tilde{u}_i^n \frac{\partial P}{\partial x} h + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} h^2 + \tilde{u}_i^n \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} h^2) = \\
& = \frac{1}{4h}((P_i^n + P_{i+1}^n)(\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n) - (P_{i-1}^n + P_i^n)(\tilde{u}_{i-1}^n + \tilde{u}_i^n)) = \frac{1}{4h}(4P_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} h + 4\tilde{u}_i^n \frac{\partial P}{\partial x} h) = \\
& = P_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{u}_i^n \frac{\partial P}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{6.36}$$

После проведения замены промежуточных скорости и энергии, выражение

(6.36) примет вид

$$\begin{aligned}
& P_i^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{u}_i^n \frac{\partial P}{\partial x} = P \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\tau}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \left( u_i^n - \frac{\tau}{\rho_i^n} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{\partial P}{\partial x} = \\
& = P \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{P}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tau + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} \tau - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} \tau.
\end{aligned} \tag{6.37}$$

Комбинируя (6.28), (6.35) и (6.37), получим итоговый вид уравнения энергии (6.38)

$$\begin{aligned}
& \rho_i^n \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho_i^n \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \tau + E_i^n \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} E_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \tau + \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial E}{\partial t} \tau + uE \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho E \frac{\partial u}{\partial x} + u\rho \frac{\partial E}{\partial x} - \\
& - 3u \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \tau - uP \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tau - u^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tau - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial E}{\partial x} \tau - E \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tau - P \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \tau - u \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \tau - \\
& - \frac{1}{2} E \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} h - uE \frac{\partial \rho}{\partial x} h - \frac{1}{2} \rho \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial E}{\partial x} h - \frac{1}{2} uE \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} h - \frac{1}{2} \rho u \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} h + P \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial P}{\partial x} - \\
& - \frac{P}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tau + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} \tau - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} \tau = 0.
\end{aligned} \tag{6.38}$$

Выделим дифференциальное уравнение и найдем  $\omega_3$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u E}{\partial x} + \frac{\partial P u}{\partial x} + \omega_3 = 0, \tag{6.39}$$

$$\begin{aligned}
\omega_3 = & \frac{1}{2} \rho_i^n \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \tau + \frac{1}{2} E_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \tau + \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial E}{\partial t} \tau - 3u_i^n \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \tau - u_i^n P_i^n \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tau - u^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tau - \\
& - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial E}{\partial x} \tau - E_i^n \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tau - P_i^n \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \tau - u_i^n \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \tau - \frac{1}{2} E_i^n \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} h - u_i^n E_i^n \frac{\partial \rho}{\partial x} h - \\
& - \frac{1}{2} \rho_i^n \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial E}{\partial x} h - \frac{1}{2} u_i^n E_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} h - \frac{1}{2} \rho_i^n u_i^n \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} h - \frac{P}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tau + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} \tau - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} \tau.
\end{aligned} \tag{6.40}$$

Теперь, когда все погрешности аппроксимации найдены, запишем уравнение производства энтропии (6.41)

$$\begin{aligned}
T \frac{\partial S}{\partial t} = & P\omega_1 + \omega_3 - u\omega_2 = \frac{1}{2} P_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \tau - P_i^n \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tau - \frac{1}{2} P_i^n \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} h - \frac{1}{2} u_i^n P_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} h + \\
& + \frac{1}{2} \rho_i^n \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \tau + \frac{1}{2} E_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \tau + \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial E}{\partial t} \tau - 3u_i^n \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \tau - u_i^n P_i^n \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tau + u_i^n u_i^n \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tau - \\
& - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial E}{\partial x} \tau - E_i^n \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tau - P_i^n \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \tau - \frac{1}{2} E_i^n \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} h - u_i^n E \frac{\partial \rho}{\partial x} h - \frac{1}{2} \rho \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial E}{\partial x} h - \\
& - \frac{1}{2} u_i^n E_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} h - \frac{1}{2} \rho_i^n u_i^n \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} h - \frac{P}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tau + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} \tau - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} \tau - \\
& - \frac{1}{2} u_i^n u_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \tau - \frac{1}{2} u_i^n \rho_i^n \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tau - u_i^n \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \rho}{\partial t} \tau + \frac{1}{2} \rho_i^n u_i^n \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{1}{2} \rho_i^n u_i^n u_i^n \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h + \\
& + \frac{3}{2} u_i^n u_i^n \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} h + \frac{1}{2} u_i^n u_i^n u_i^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} h.
\end{aligned} \tag{6.41}$$



Уравнение (6.41) содержит слагаемые первого порядка малости по времени и пространству. Сравним полученное выражение с приростом энтропии на слабой ударной волне, приведенным в работе [15]

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\tau^2}{12} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_s \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^3 + O(\tau^3, h^3). \quad (6.42)$$

Так как в (6.42) наибольший порядок слагаемых – второй, то можно сказать, что приращение энтропии в методе крупных частиц превышает характерное приращение на слабой ударной волне. Таким образом, разностная схема метода крупных частиц является сильно диссипативной.

## VII. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги данной работы, отметим, что все поставленные цели были достигнуты. В ходе выполнения выпускной квалификационной работы проведено исследование проблемы моделирования течений газа и жидкости при наличии подвижных границ в эйлеровых координатах. Учитывая стационарный характер представления сетки, была предложена идея рассмотрения ячеек, прилегающих к подвижной стенке, как лагранжево-эйлеровых. Таким образом, одной из основных черт метода стала деформация приграничных ячеек. При этом сделано допущение об адиабатическом характере изменения объема. Кроме этого, одной из возникших проблем стала потеря стабильности расчета при сжатии ячейки до малых величин. Для решения этого используется последовательное объединение ячеек в ходе расчета. Параметры при данном действии рассчитываются на основании законов сохранения, в частности, выделяется избыточная кинетическая энергия, переходящая в потенциальную. Разработанный алгоритм был реализован как модификация метода крупных частиц и протестирован на тестовой задаче в трех системах координат: декартовой, цилиндрической и сферической. Полученные результаты имеют высокую точность в сравнении с аналитическим решением.

Кроме этого, проведено исследование разностной схемы метода крупных частиц на диссипативные свойства. В качестве объекта изучения взят оригинальный алгоритм без использования искусственной вязкости. Результаты показали превышение изменения энтропии над ее изменением в характерном физическом процессе – слабой ударной волне. Таким образом, рассмотренный метод является сильно диссипативным.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.
2. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980.
3. Кроули У. FLAG — свободно-лагранжев метод для численного моделирования гидродинамических течений в двух измерениях // Числ. методы в механ. жидкостей. М.: Мир, 1973. С. 135-145.
4. Пасконов В. М. Разностные схемы на самоорганизующемся множестве расчетных точек в двумерных односвязных областях произвольной формы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1971. Т. 11. № 3. с. 776-782.
5. Thompson J. F., Thames F. S., Mastin C. W. Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies // i. Comput. Phys. 1974. V. 15. P. 229-319.
6. Hindman R. G., Kutler P., Anderson D. Two-dimensional unsteady Euler equation solver for arbitrary Shaped flow region // AIAA Journal. 1981. V. 19. № 4. P. 424— 431.
7. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
8. В. М. Ковеня, Н. Н. Яненко. Разностная схема на подвижных сетках для решения уравнений вязкого газа, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 19:1 (1979), 174–188; U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys., 19:1 (1979), 178–192.
9. Д. В. Зубанов, А. Н. Быков, Б. Л. Воронин, А. М. Ерофеев. Использование сочетания подвижных и неподвижных сеток при решении двумерных задач газовой динамики и теплопроводности в методике РАМЗЕС-КП // Труды XV международной конференции: супервычисления и математическое моделирование. Саров, 2014, с.220-230.

10. В.М. Грязев, Н.В. Могильников. Модификация метода крупных частиц применительно к расчету течений с подвижными границами твердых тел // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. Вып. 5. Ч.1. С.258-264.
11. Белоцерковский С.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982. 390 с.
12. Frédéric Golay. Numerical entropy production and error indicator for compressible flows. C. R. Mecanique 337 (2009) 233–237.
13. Стариков Я.Е., Шестаковская Е.С. Об одном методе расчета подвижных границ в эйлеровых координатах. В книге: Научная сессия НИЯУ МИФИ-2019 по направлению "Инновационные ядерные технологии". 2019. С. 104-106
14. Куропатенко В.Ф., Магазов Ф.Г., Шестаковская Е.С. Аналитическое решение задачи о сходящейся ударной волне в газе в одномерном случае // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика», 2017, том 9, № 4, С. 52–58.
15. Куропатенко В.Ф., “Локальная консервативность разностных схем для уравнений газовой динамики”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 25:8 (1985), 1176–1188.