

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет»
(национальный исследовательский университет)
Институт естественных и точных наук
Факультет Математика, механика и компьютерные технологии
Кафедра вычислительной механики

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой ВМ,
д. ф.-м. н., профессор
_____/Ю.М. Ковалев
_____ 2020 г.

Взаимодействие ударных волн с контактными границами

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
ЮУрГУ – 01.03.03.2020.306-01-003.ВКР

Руководитель
Старший преподаватель кафедры ВМ
_____/Е.Е. Пигасов
_____ 2020 г.

Автор работы студент группы ЕТ-410
_____/Д.А. Гордиевских
_____ 2020 г.

Нормоконтролер
к.ф.-м.н., доцент кафедры ВМ
_____/Н.Л. Клиначева
_____ 2020 г.

Челябинск 2020

Аннотация

УДК 533.6.011.72

Гордиевских Д.А. Взаимодействие ударных волн с контактными границами. – Челябинск: ЮУрГУ, ЕТ-410, 36 с., 17 ил., библиогр. список – 7 наим., 1 прил.

В дипломной работе рассматриваются взаимодействия ударных волн с контактными границами, в качестве численного метода был выбран и реализован дивергентный метод В.Ф. Куропатенко. Проведена верификация численного метода на модельных задачах типа распространения слабой ударной волны в газе и о распаде разрыва. Получено решение задачи с двумя ударными волнами. Проведено сравнение численного решения задач с их точным решением.

Оглавление

Аннотация	1
Введение.....	3
1. Обзор литературы	4
2. Постановка задачи	7
3. Численный метод	8
4. Верификация метода.....	11
4.1 Распространение слабой ударной волны	11
4.2 Задача о распаде разрыва	14
5. Задача с двумя ударными волнами	17
5.1 Результаты.....	18
5.2 Относительная ошибка вычислений.....	21
Заключение	23
Список литературы	24
Приложение	25

Введение

С развитием электронно-вычислительных машин (ЭВМ) и численного моделирования появляются новые возможности для работы со все более сложными математическими моделями. Мощности современных ЭВМ позволяют применять различные методы визуализации, анализ которых позволяет лучше понимать и определять природу исследуемых явлений. С точки зрения математики, большинство физических явлений можно описать уравнениями частных производных, поэтому численные методы решения этих уравнений является одной из важнейших частей вычислительной физики. Для рассмотрения физических явлений наиболее простыми и наглядными являются конечно-разностные методы. В представленной работе в качестве такого метода используется дивергентный метод, разработанный Валентином Федоровичем Куропатенко.

Цель работы – провести исследование взаимодействия ударной волны с контактной границей между веществами с различными сжимаемостями.

Задачи:

1. Реализация дивергентного метода Куропатенко для однокомпонентной модели механики сплошной среды.
2. Верификация метода на модельных задачах – распространение слабой ударной волны в газе, задача о распаде разрыва.
3. Реализация возможности использования различных значений параметров уравнения состояния в разных ячейках сетки.
4. Проведение серии расчетов.

1. Обзор литературы

В работе [1] представлено описание сплошной среды при помощи лагранжевых координат. В случае одномерных движений, в большинстве случаев используются координаты Лагранжа, поскольку они связаны с конкретной частицей вещества, а не с конкретной точкой в исследуемой области, как например, в случае координат Эйлера. Если газодинамические величины выражаются в виде функции в лагранжевых координатах, то эти величины, по истечении некоторого времени, будут характеризовать изменения термодинамических параметров, а именно: давления, скорости и плотности отдельной частицы исследуемого вещества. Положительные свойства лагранжевых координат заключаются в том, что с их помощью удобно рассматривать внутренние процессы, происходящие в веществе, которые не выходят за рамки частицы. А также в ряде случаев координаты Лагранжа позволяют находить точные решения уравнений газодинамики более легким и коротким путем.

Движение газа имеет различный характер в зависимости от того, каким является движение, сверхзвуковым или дозвуковым. То есть если скорость потока газа выше скорости звука, то такое течение будет называться сверхзвуковым, соответственно если скорость потока газа ниже скорости звука, то такое течение будет называться дозвуковым. Одним из существенных отличий сверхзвукового потока является возможность существования в нем ударных волн описанных в работе [2].

Существует такое течение, при котором распределение термодинамических величин в газе происходит непрерывно. Однако, существуют и такие течения, при которых возникает разрыв в распределении этих величин. В движении газа данный разрыв существует вдоль некоторых поверхностей, при прохождении через который, происходит скачок параметров. Такие поверхности называют поверхностями разрыва. На поверхности разрыва должен быть непрерывен

поток вещества, то есть количество газа, проходящее через такой разрыв, должно оставаться неизменным. Аналогично количеству вещества, поток энергии и импульса также должен быть непрерывен. В случае, когда поток массы, проходящий через поверхность разрыва, не равен нулю, а законы сохранения массы количества движения и энергии остаются неизменными, то поверхность такого разрыва будет называться ударной волной.

Для более точного описания поведения ударных волн в различных областях было разработано различное множество численных методов рассматривающих данный процесс. Наиболее популярными методами расчета ударных волн: метод Неймана – Рихтмайера, метод Лакса и метод Годунова. В этих методах сильный разрыв заменяется слоем конечной ширины, который можно сравнить с размером ячейки сетки. Такое свойство разностных схем имеет название дистракции.

Рассмотрим Метод Неймана – Рихтмайера, описанный в работе [3]. Главная идея метода заключается во введении в дифференциальные уравнения движения и энергии искусственной вязкости, работа которой при изменении объема определяет диссипацию энергии. Коэффициент вязкости выбирается пропорционально квадрату шага сетки. В разностной схеме Неймана – Рихтмайера термодинамические величины определяются в серединах сеточного интервала, а скорости и координаты в узлах сетки. Отрицательной особенностью метода является сильная зависимость профиля ударной волны от коэффициента вязкости.

Под диссипацией энергии подразумевается переход части энергии упорядоченных процессов в энергию неупорядоченных процессов. При замкнутой системе, в которой происходит диссипация энергии, энтропия будет возрастать.

Рассмотрим метод Лакса. Диссипация энергии в ударном слое определяется специальной формой аппроксимации дифференциальных законов сохранения с помощью разностных уравнений. В результате погрешностей аппроксимации образуют, так называемую

аппроксимационную вязкость, которая обеспечивает диссипацию энергии в ударном слое.

Рассмотрим метод Годунова. Идея метода заключается в том, что все сеточные функции внутри ударного слоя считаются кусочно-постоянными, в таком случае на границах ячейки находятся произвольные разрывы, которые распадаются с образованием различных конфигураций устойчивых сильных, слабых, или контактных разрывов. Полученные значения параметров давления и скорости на контактном разрыве используются в качестве вспомогательных величин на границе сеточного интервала.

Также существуют разностные схемы в эйлеровых координатах, описанных в работе [4]. Такие разностные схемы чаще применяются для решения различных задач аэродинамики. Данные схемы можно разделить на два этапа. На первом этапе сетка рассматривается как лагранжева, а также применяется метод в координатах лагранжа. На втором этапе производится пересчет величин на эйлерову сетку. Применение двухэтапного решения позволяет на первом этапе рассчитать потоки массы, количества движения и энергии, после чего появляется возможность применить интерполяции с выполнением законов сохранения. Достоинства и недостатки таких методов описаны в работе [4]. Достоинством является то, что данные вычислительные методы при сравнительно небольшом размере сетки обеспечивают устойчивое вычисление широкого класса сложных задач аэрогазодинамики и вычислительной физики. Недостатками данных методов является плохое улавливание молекулярных эффектов внутри структуры разрывов. Для обеспечения устойчивости в разностных схемах сквозного счета на базе уравнений Эйлера желательно применение аппроксимационной вязкости, которая будет обеспечивать устойчивость решения в целом.

2. Постановка задачи

Пусть в области некоторой длины, находится определенное количество, несмешивающихся между собой, веществ, с различными сжимаемостями. Из одного вещества в сторону контактной границы в некоторый момент времени движется ударная волна.

3. Численный метод

В качестве численного метода был выбран дивергентный метод Валентина Федоровича Куропатенко, описанный в работе [5]. В данном методе, поверхность сильного разрыва заменяется слоем конечной ширины, содержащим несколько ячеек сетки. Параметры вещества изменяются от состояния перед сильным разрывом, до состояния за разрывом. В случае идеальной среды эти состояния связаны с законами сохранения массы, количества движения и энергии. В дифференциальном виде, одномерное течение идеальной среды, в пространственных координатах, без учета теплопроводности, будут описываться следующим образом:

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial(\rho U)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{dU}{dt} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial P U}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Где P – давление, U – скорость газа, ε – полная энергия, ρ – плотность, t – время, x – координата.

Данная система замыкается уравнением состояния

$$P = P(\rho, E). \quad (4)$$

Где E – внутренняя энергия.

В разностных методах сквозного счета ударных волн, сильный разрыв заменяется ударным слоем, ширина которого составляет несколько ячеек сетки. Законы сохранения связывают состояния вещества на границе ударного слоя. Внутри этого слоя в момент времени t^n в каждой ячейке сетки создается сеточная ударная волна, которая на следующем шаге по времени t^{n+1} исчезает.

Рассматривая дивергентную разностную схему, все термодинамические величины и скорости определяют в серединах сеточных интервалов, узлы этих интервалов имеют координаты t^n, m_i . Вспомогательные величины P_i^*, U_i^* определяются при помощи двух различных алгоритмов в зависимости от того, какой процесс происходит на вспомогательном промежутке $m_{i-0.5} \leq m \leq m_{i+0.5}$, разряжение или сжатие:

1. Решение на волне разряжения определяется следующим образом. Если внутри вспомогательной ячейки разность скоростей больше, либо равно нулю $U_{i+0.5}^n - U_{i-0.5}^n \geq 0$, то решение будет являться непрерывным на сеточном интервале, и вспомогательные величины для давления и скорости будут определяться следующими разностными уравнениями

$$U_i^* = U_i^n - \frac{\tau}{2h} (P_{i+0.5}^n - P_{i-0.5}^n), P_i^* = P_i^n - \frac{\tau a^2}{2h} (U_{i+0.5}^n - U_{i-0.5}^n). \quad (5)$$

Где U – скорость, P – давление, τ – шаг по времени, h – масса сеточного интервала, которая связана с координатами границ интервала и сохраняется при переходе от одного момента времени к другому, так как не имеет зависимости от времени, a – скорость звука. Величины с индексом $n, n + 1$ и нижним индексом $i + 0.5$ являются средними на промежутке $m_i \leq m \leq m_{i+1}$ в момент времени t^n и t^{n+1} . Величины, имеющие индекс $*$ и нижний индекс i и $i + 1$ являются средними на промежутке $t^n \leq t \leq t^{n+1}$ при значениях m_i и m_{i+1} . Значения U_i^n и P_i^n определяются при помощи интерполяции по $U_{i+0.5}^n, U_{i-0.5}^n$, а также $P_{i+0.5}^n, P_{i-0.5}^n$.

2. Решение на волне сжатия определяется следующим образом. Если внутри вспомогательной ячейки разность скоростей меньше нуля $U_{i+0.5}^n - U_{i-0.5}^n < 0$, то вспомогательные величины будут находиться из следующих разностных уравнений:

2.1 Рассмотрим случай, когда давление из середины сеточного интервала справа, больше чем давление из середины левого интервала $P_{i+0.5}^n > P_{i-0.5}^n$. Вспомогательные величины будут определяться следующим образом:

$$U_i^* = U_{i-0.5}^n, P_i^* = P_{i+0.5}^n + \frac{\gamma-1}{4} \frac{\Delta U^2}{V_{i+0.5}^n} + \sqrt{\left(\frac{\gamma-1}{4} \frac{\Delta U^2}{V_{i+0.5}^n}\right)^2 + \frac{\gamma P_{i+0.5}^n}{V_{i+0.5}^n} \Delta U^2}.$$

Где V – удельный объем, γ – показатель адиабаты.

2.2 Рассмотрим случай, когда давление из середины сеточного интервала справа, меньше чем давление из середины левого интервала $P_{i+0.5}^n < P_{i-0.5}^n$. Вспомогательные величины будут определяться следующим образом:

$$U_i^* = U_{i+0.5}^n, P_i^* = P_{i-0.5}^n + \frac{\gamma-1}{4} \frac{\Delta U^2}{V_{i-0.5}^n} + \sqrt{\left(\frac{\gamma-1}{4} \frac{\Delta U^2}{V_{i-0.5}^n}\right)^2 + \frac{\gamma P_{i-0.5}^n}{V_{i-0.5}^n} \Delta U^2}.$$

3. Все остальные термодинамические величины находятся из разностных уравнений законов сохранения массы, количества движения и энергии соответственно.

$$\frac{V_{i+0.5}^{n+1} - V_{i+0.5}^n}{\tau} - \frac{U_{i+1}^* - U_i^*}{h} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{U_{i+0.5}^{n+1} - U_{i+0.5}^n}{\tau} + \frac{P_{i+1}^* - P_i^*}{h} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\varepsilon_{i+0.5}^{n+1} - \varepsilon_{i+0.5}^n}{\tau} - \frac{(PU)_{i+1}^* - (PU)_i^*}{h} = 0, \quad (8)$$

где P – давление, V – удельный объем, U – скорость, ε – удельная полная энергия, является суммой удельной внутренней и кинетической энергии и определяется как

$$E_{i+0.5}^{n+1} = \varepsilon_{i+0.5}^{n+1} - 0.5(U_{i+0.5}^{n+1})^2, \quad (9)$$

Масса сеточного интервала – h находится по формуле

$$h = \frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{V_{i+0.5}^n}. \quad (10)$$

4. Система уравнений законов сохранения (5) – (7) замыкается уравнением состояния, используемым в задаче.

В задачах используются уравнение состояния для идеального газа

$$P = (\gamma - 1)\rho E, \quad (11)$$

4. Верификация метода

Верификация метода проводилась путем решения задач о распаде разрыва и распространении слабой ударной волны в идеальном газе.

4.1 Распространение слабой ударной волны

Рассмотрим задачу о распространении слабой ударной волны в идеальном газе [6]. Пусть в области длиной $L = 1.0$ находится идеальный газ с параметрами $\gamma = \frac{5}{3}$, $P_0 = 1.0$, $\rho_0 = 1.0$, $E_0 = 1.5$, $U_0 = 0.0$, и уравнением состояния (10). За фронтом ударной волны задаются параметры $\rho_1 = 1.428$, $E_1 = 1.925$, $P_1 = 1.8$, $U_1 = 0.5$.

На рис. 2 – 5 представлены профили давления, скорости, энергии и плотности. Сетка с числом ячеек $n = 500$, и числом Куранта $K = 0.5$.

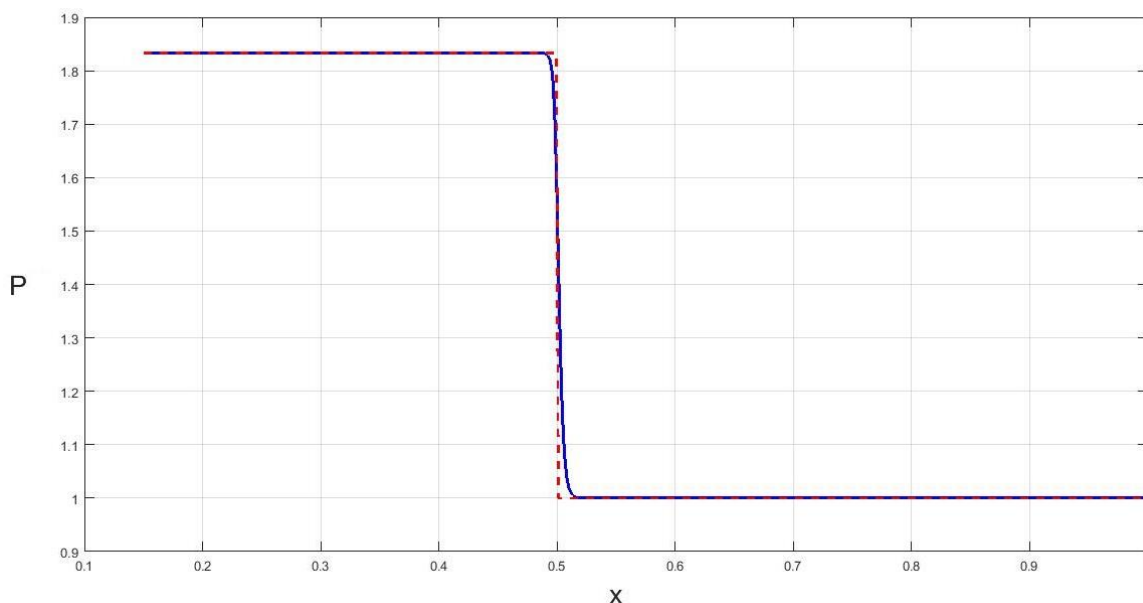


Рис. 1 Профиль давления в момент времени $t=0.3$. Красная линия – точное решение, синяя линия – решение методом Куропатенко.

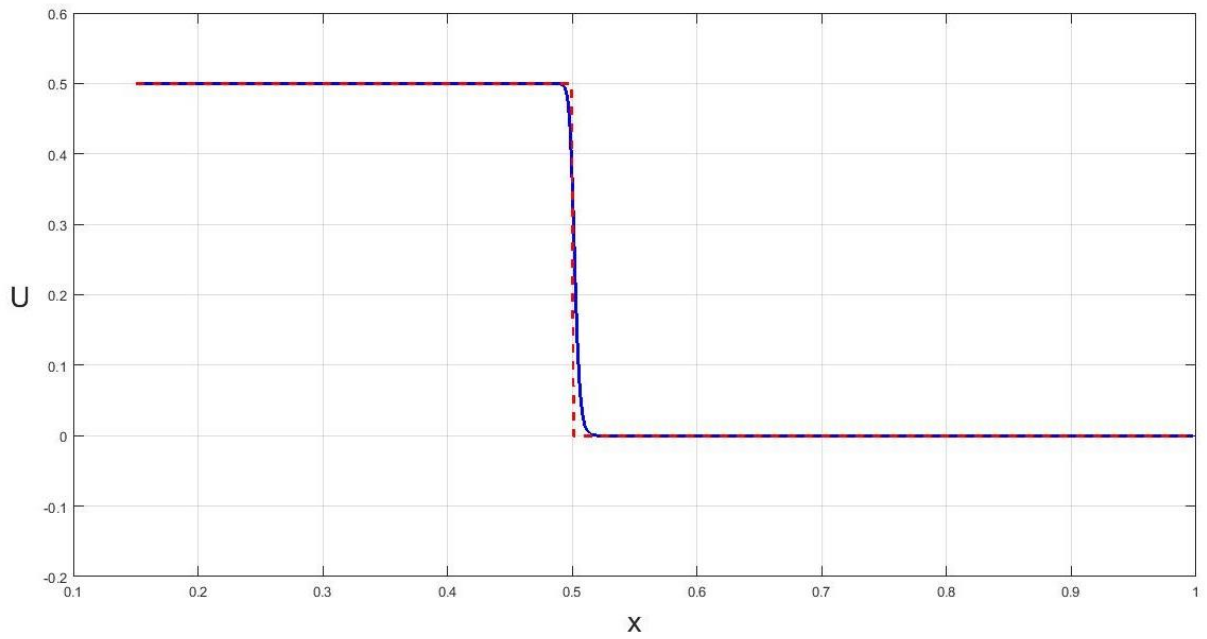


Рис. 2 Профиль скорости в момент времени $t=0.3$. Красная линия – точное решение, синяя линия – решение методом Куропатенко.

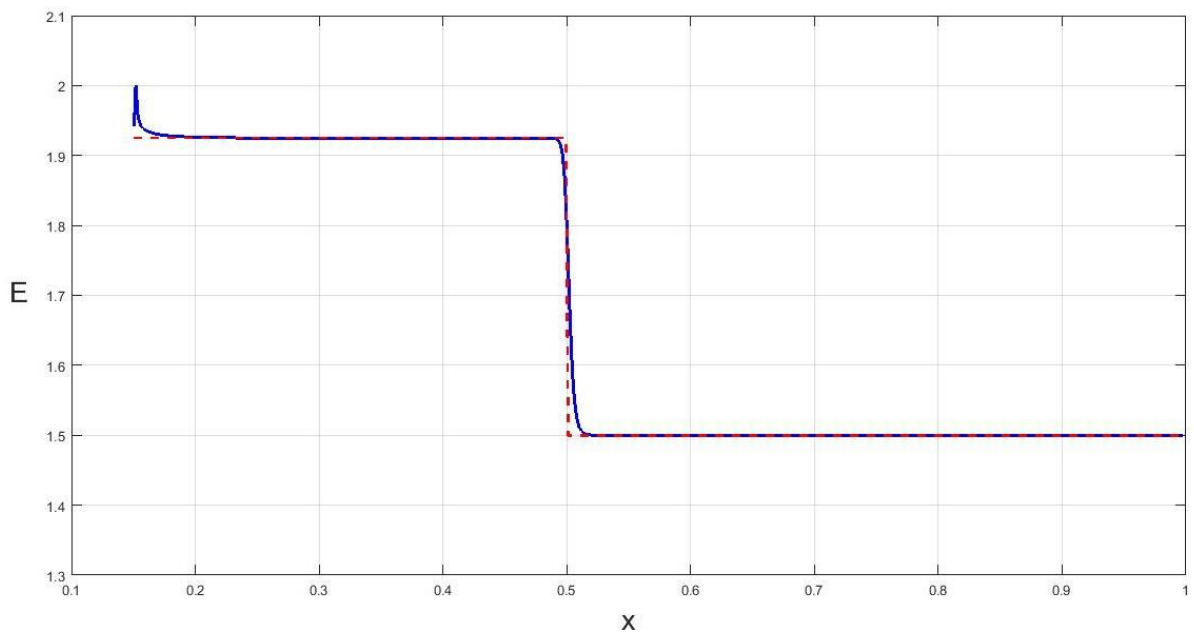


Рис. 3 Профиль энергии в момент времени $t=0.3$. Красная линия – точное решение, синяя линия – решение методом Куропатенко.

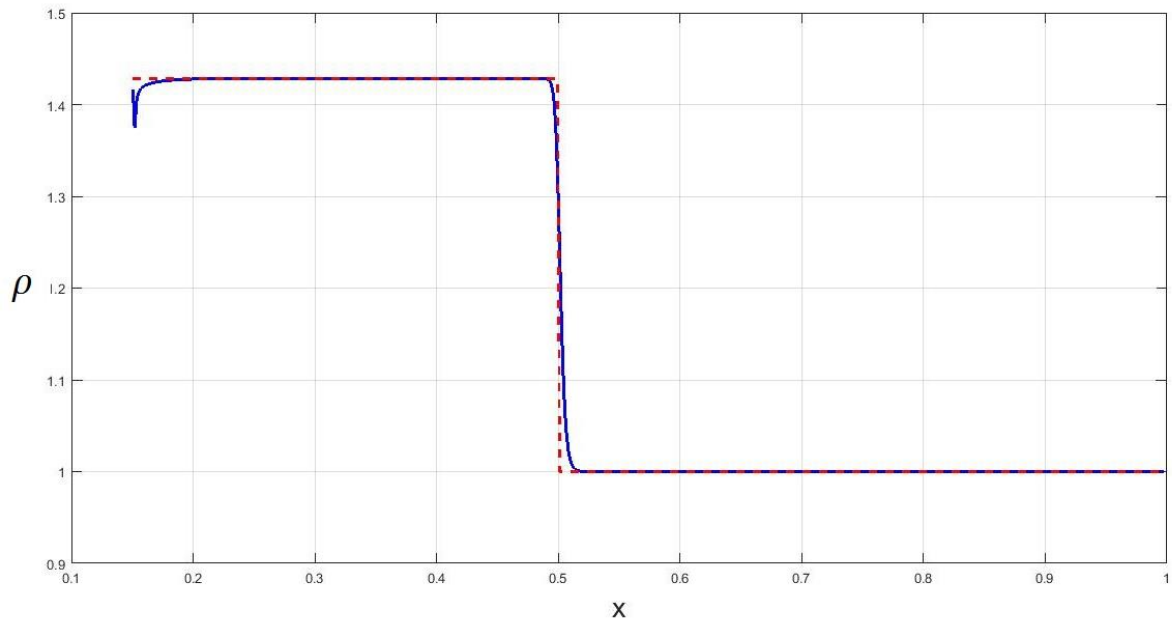


Рис. 4 Профиль плотности в момент времени $t=0.3$. Красная линия – точное решение, синяя линия – решение методом Куропатенко.

Сравнение результатов численного и аналитического решения показывает, что данный численный метод достаточно точно описывает фронт слабой ударной волны в газе.

4.2 Задача о распаде разрыва

Далее рассмотрим задачу о распаде разрыва. В области длиной $L = 1.0$, находится идеальный газ, разделенный на две области диафрагмой. Параметры газа в области справа от диафрагмы $P_1 = 1000.0$, $\rho_1 = 3.0$, $U_1 = 0.0$. Параметры газа слева от диафрагмы $P_2 = 0.1$, $\rho_2 = 2.0$, $U_2 = 0.0$. В начальный момент времени происходит разрыв диафрагмы и вправо начинает распространяться волна разрежения, влево – ударная волна.

На рис. 6 – 9 представлены профили давления, скорости, энергии и плотности. Сетка с числом ячеек $n = 400$, и числом Куранта $K = 0.5$.

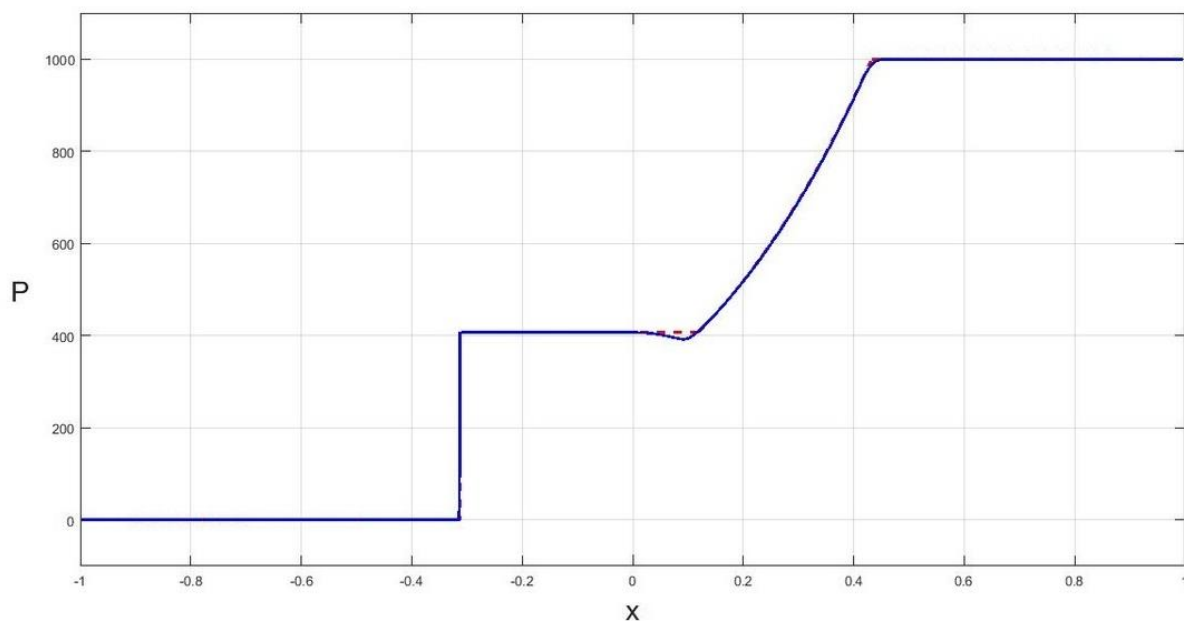


Рис. 5 Профиль давления в момент времени $t=0.02$. Красная линия – точное решение, синяя линия – решение методом Куропатенко.

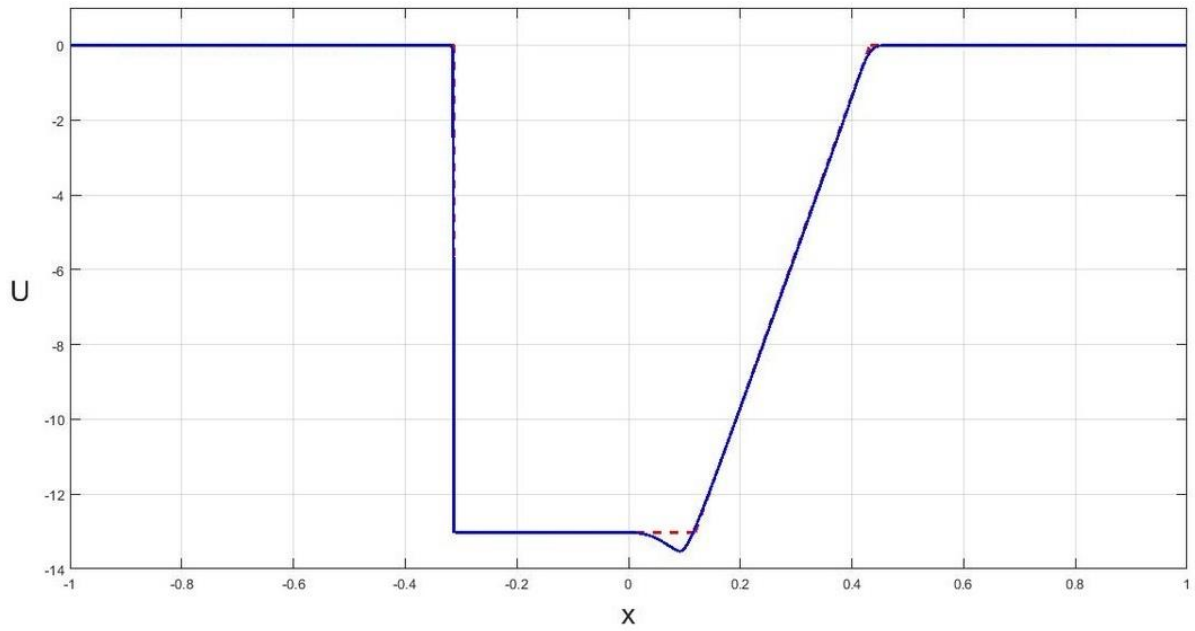


Рис. 6 Профиль скорости в момент времени $t=0.02$. Красная линия – точное решение, синяя линия – решение методом Куропатенко.

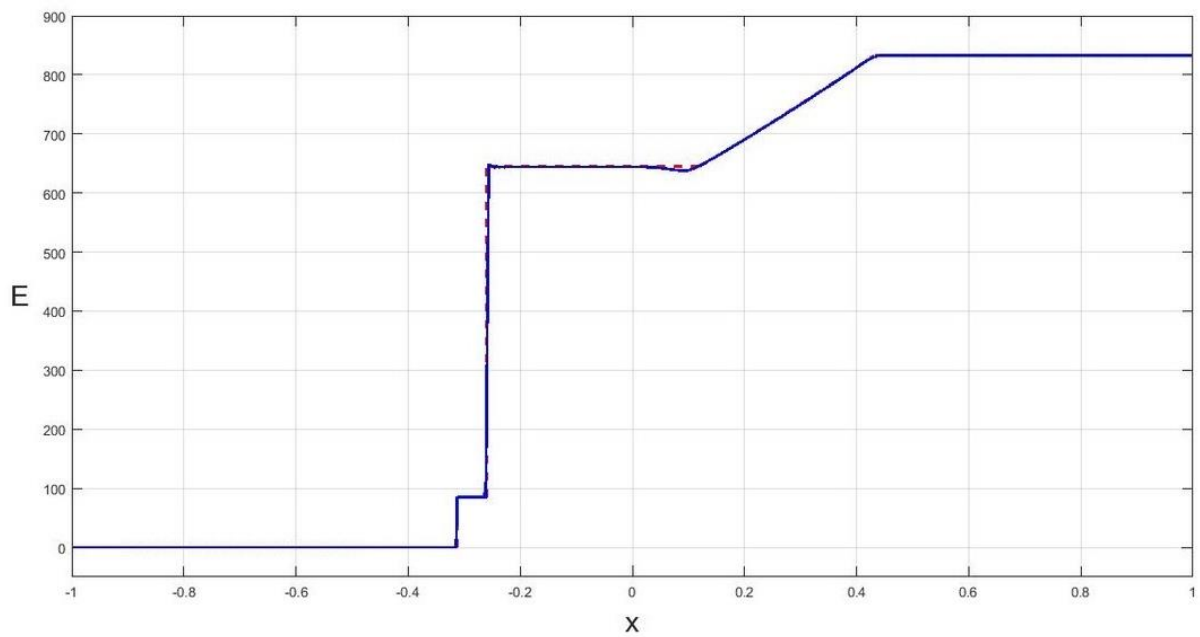


Рис. 7 Профиль энергии в момент времени $t=0.02$. Красная линия – точное решение, синяя линия – решение методом Куропатенко.

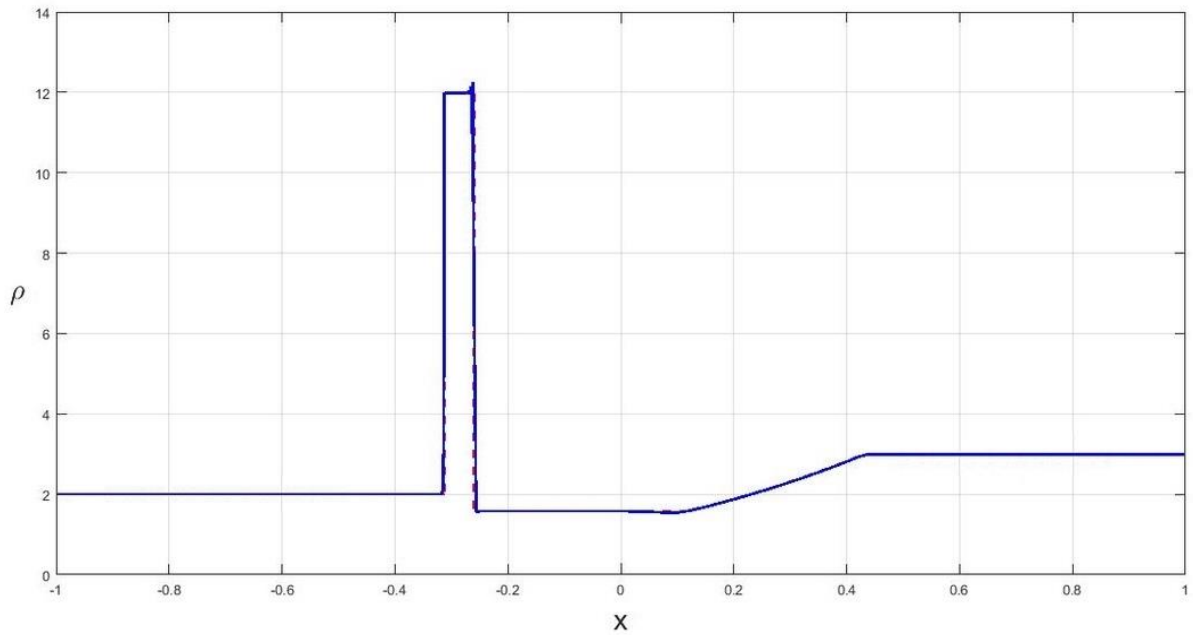


Рис. 8 Профиль плотности в момент времени $t=0.02$. Красная линия – точное решение, синяя линия – решение методом Куропатенко.

Анализ результатов численного решения задачи о распаде разрыва, показывает достаточно хорошую сходимость с аналитическим решением.

На основе полученных результатов можно сделать вывод о том, что дивергентный метод Куропатенко является применимым и достаточно точным методом для решения задач о распространении ударных волн.

5. Задача с двумя ударными волнами

Рассмотрим задачу с двумя ударными волнами, которая также рассматривалась в работе [7]. В области, длиной $L = 1.0$, находятся два идеальных газа, по одному из которых движется ударная волна. Ударная волна движется в области $0.0 \leq x \leq 0.1$, параметры вещества в данной области, в начальный момент времени имеют следующие значения: $\gamma_1 = 1.35$, $\rho_1 = 2.76$, $E_1 = 4.60$, $P_1 = 4.45$, $U_1 = 1.48$. Параметры области невозмущенного газа: $0.1 \leq x \leq 0.5$: $\gamma_0 = 1.35$, $\rho_0 = 1.0$, $E_0 = 2.86$, $P_0 = 1.0$, $U_0 = 0.0$. В области $0.5 \leq x \leq 1.0$ находится второй газ с параметрами: $\gamma_{01} = 5.0$, $\rho_{01} = 1.9$, $E_{01} = 0.132$, $P_{01} = 1.0$, $U_{01} = 0.0$. В качестве уравнения состояния, для каждого из газов, используется уравнение для идеального газа (10). На рис. (9) изображено начальное распределение параметров в области.

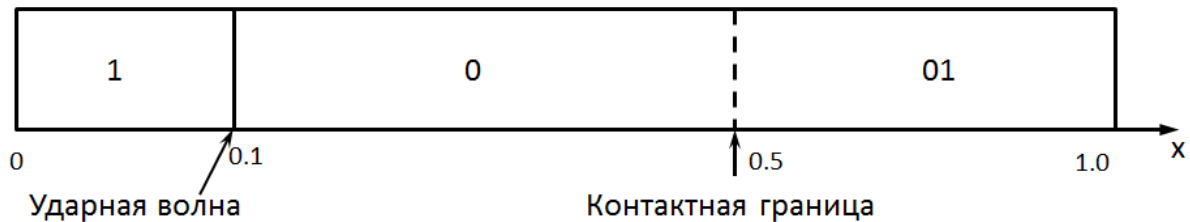


Рис 9. Начальное распределение параметров веществ в области. 1 – область повышенного давления, 0 – область покоящегося вещества с $\gamma_{01} = 1.35$, 01 – область покоящегося вещества с $\gamma_{01} = 5.0$.

5.1 Результаты

Результатом вычислений являются профили давления, скорости, энергии и плотности, в момент времени $t = 0.25$, представленные на рис. (10) – (13).

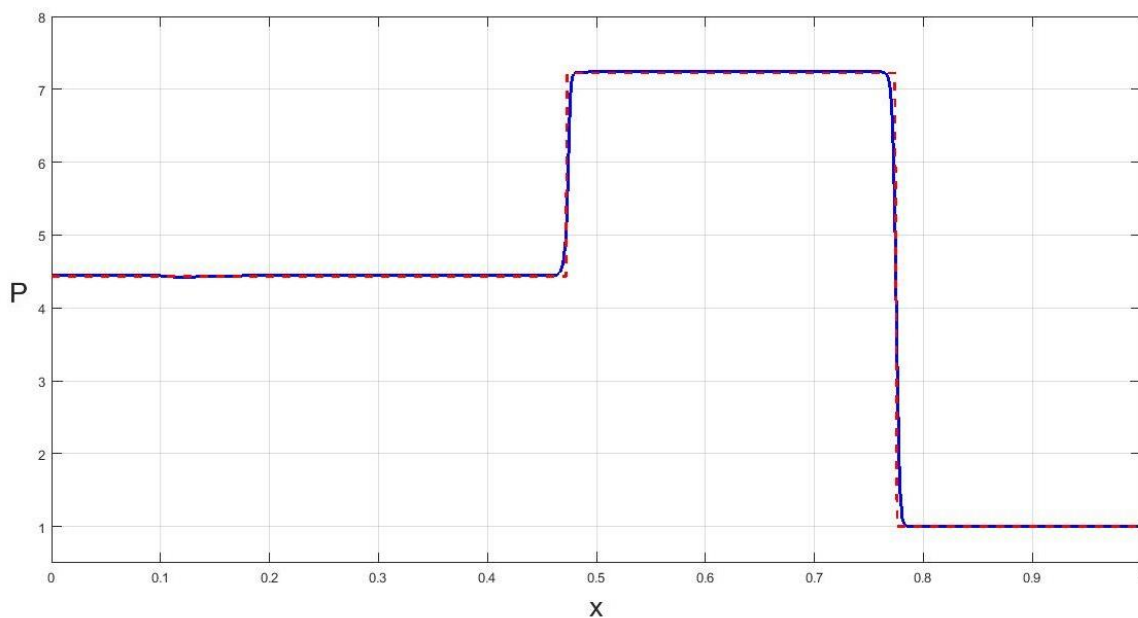


Рис. 10 Профиль давления в момент времени $t=0.25$. Красная пунктирная линия – точное решение, синяя сплошная линия – расчет методом Куропатенко.

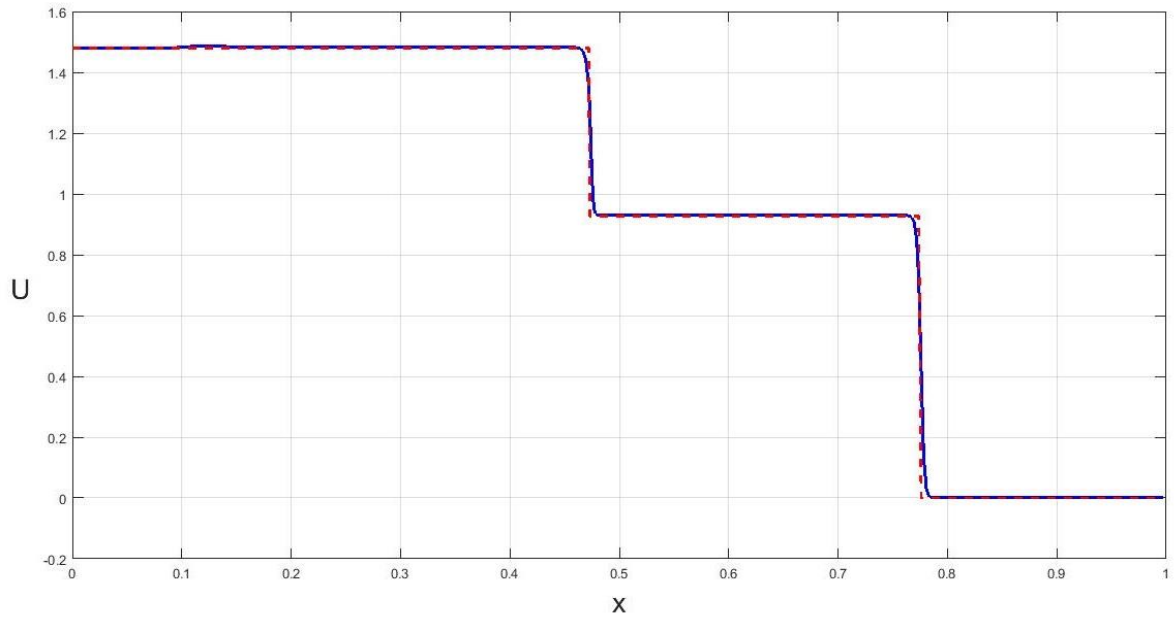


Рис. 11 Профиль скорости в момент времени $t=0.25$. Красная пунктирная линия – точное решение, синяя сплошная линия – расчет методом Куропатенко.

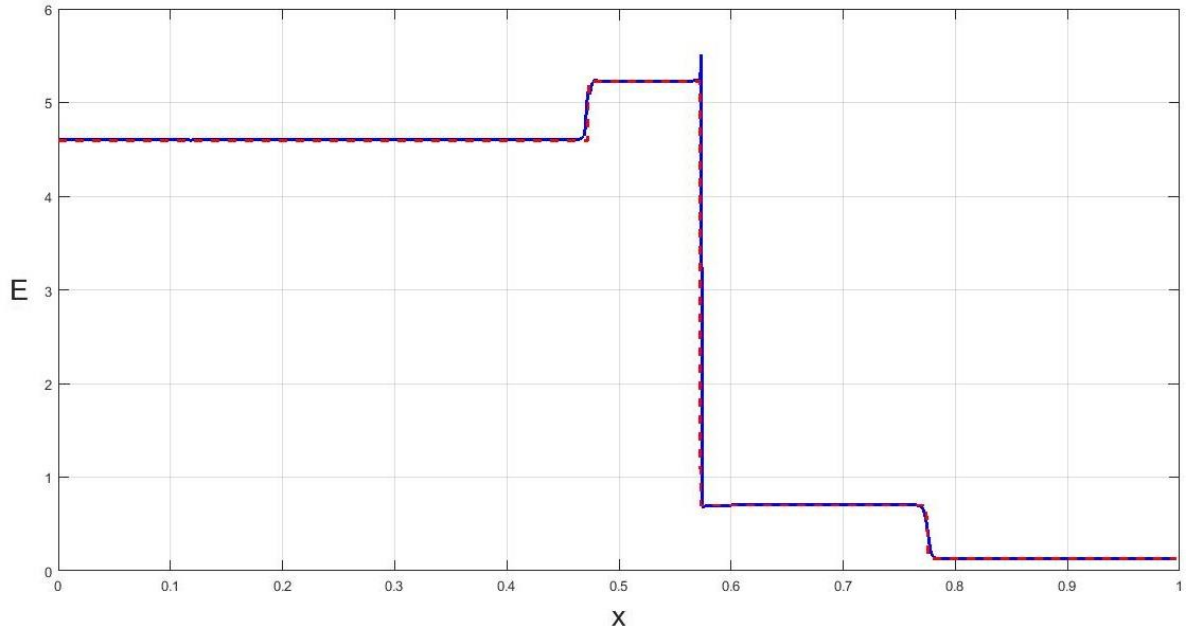


Рис. 12 Профиль энергии в момент времени $t=0.25$. Красная пунктирная линия – точное решение, синяя сплошная линия – расчет методом Куропатенко.

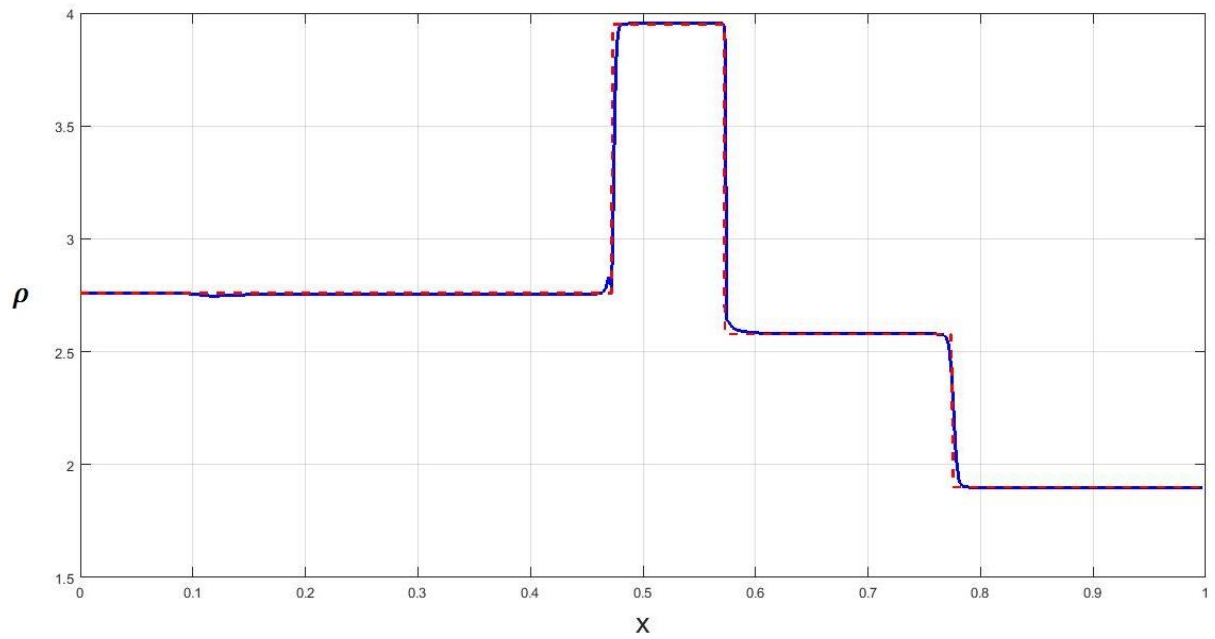


Рис.13 Профиль плотности в момент времени $t=0.25$. Красная пунктирная линия – точное решение, синяя сплошная линия – расчет методом Куропатенко.

5.2 Относительная ошибка вычислений.

Для определения точности производимых вычислений был проведен подсчет относительной ошибки вычислений. Результаты представлены на рисунках (13) – (16).

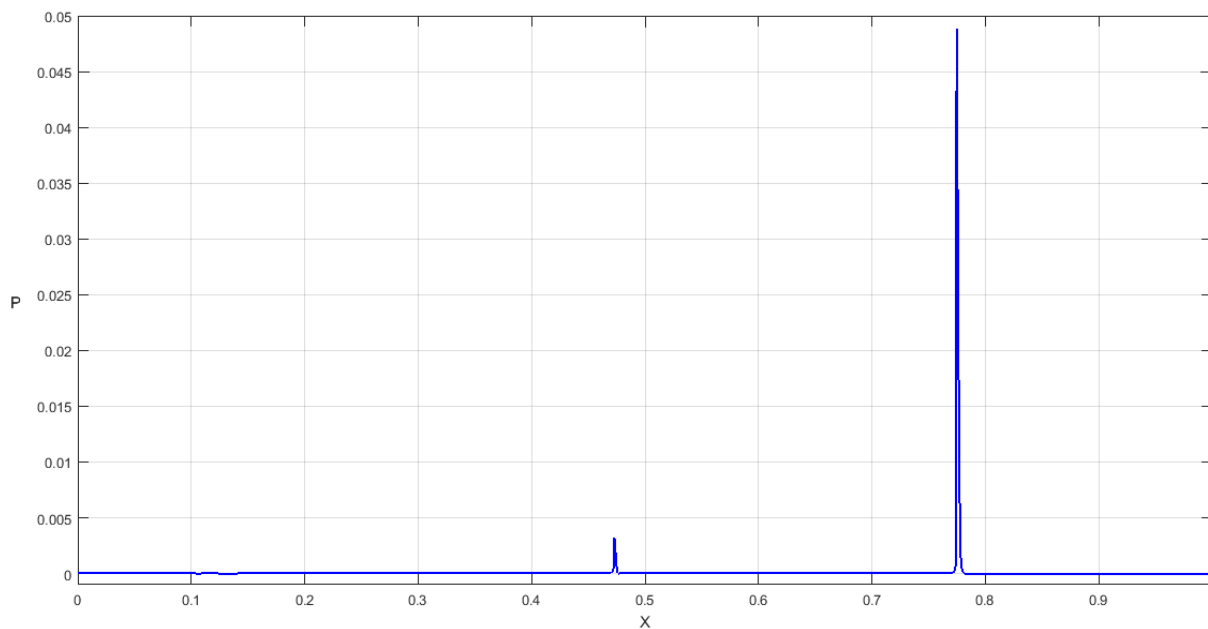


Рис. 14 Относительная ошибка вычислений давления.

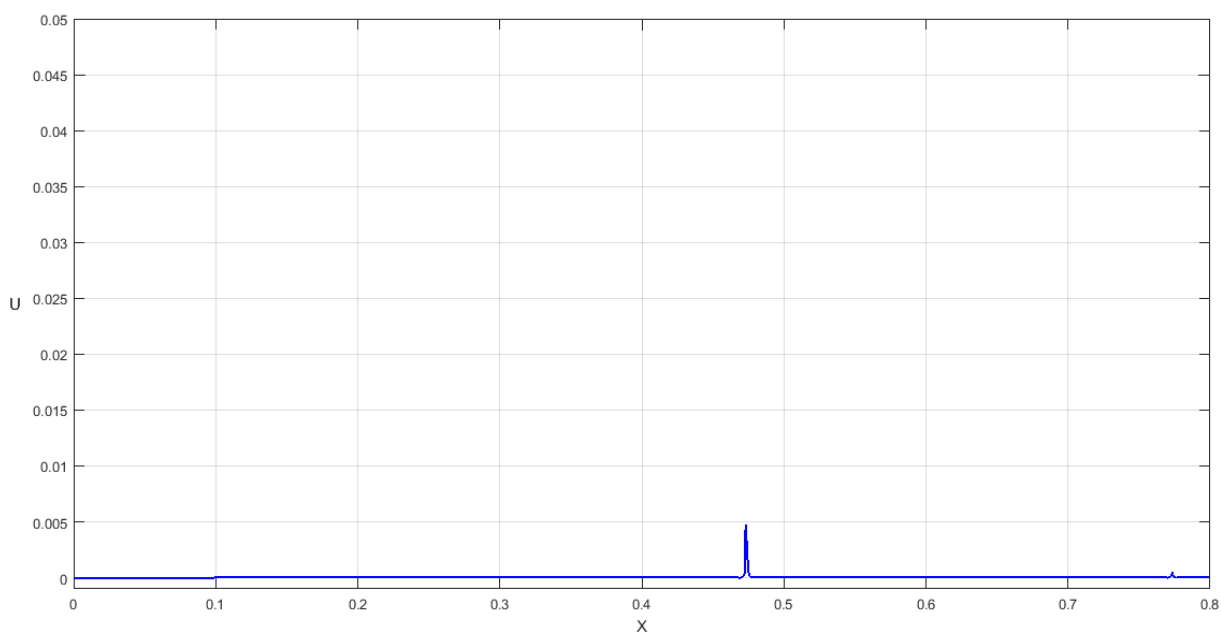


Рис. 15 Относительная ошибка вычислений скорости.

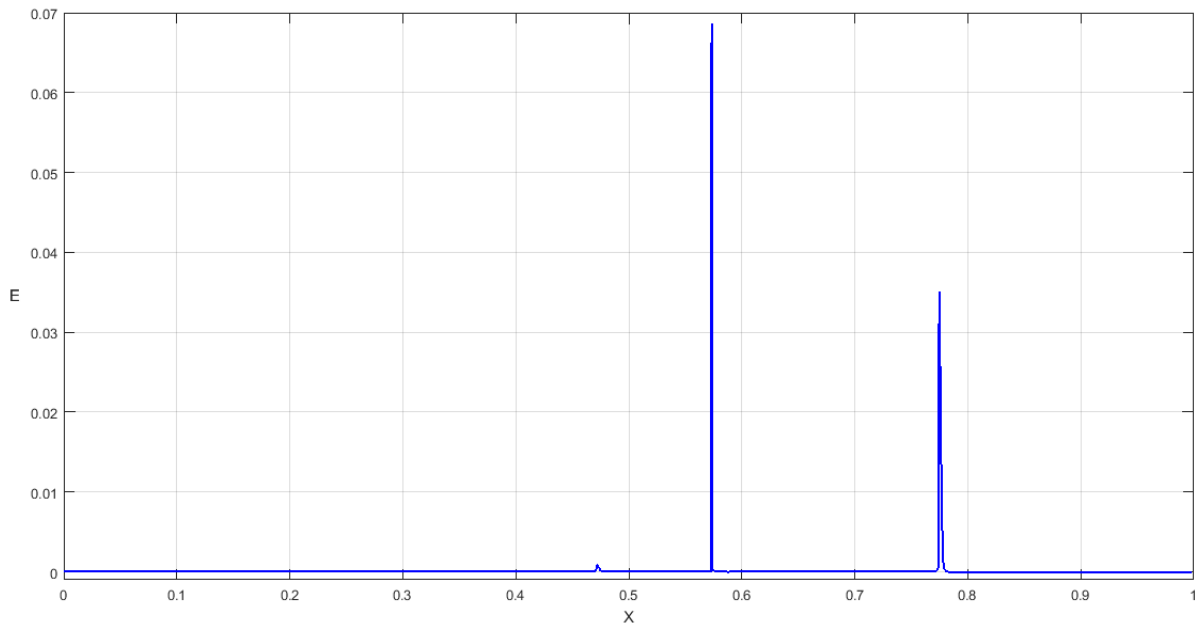


Рис. 16 Относительная ошибка вычислений энергии.

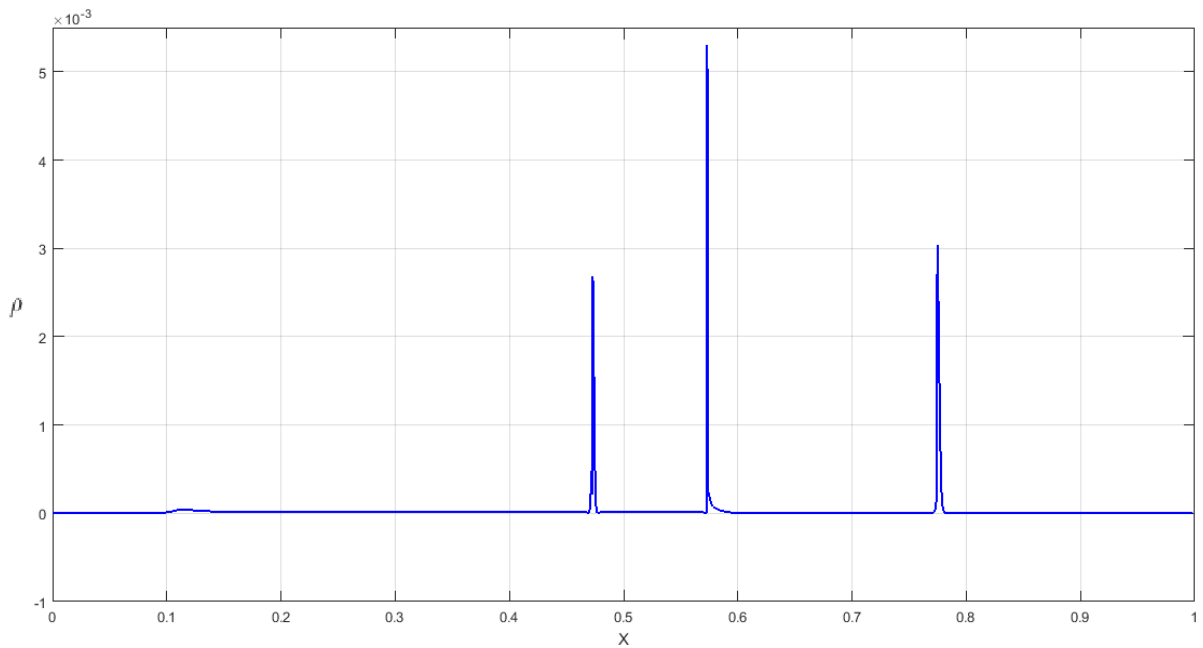


Рис. 17 Относительная ошибка вычислений плотности.

Исходя из полученных расчетов, можно пронаблюдать хорошую сходимость численного решения с аналитическим решением. Расчет относительной погрешности показывает, что реализованный алгоритм достаточно точно описывает картину течения ударной волны в области контакта веществ с различной сжимаемостью.

Заключение

1. При помощи дивергентного метода Куропатенко был реализован алгоритм расчета течения ударных волн, а также их взаимодействие с контактными границами, по разные стороны от которых находятся вещества с различной сжимаемостью.
2. Проведена верификация алгоритма на модельных задачах.
3. Результат проведенной работы показывает, что данный алгоритм позволяет достаточно точно описать различные конфигурации задачи о взаимодействии ударных волн с контактными границами.

Список литературы

1. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. / Зельдович Я. Б. Райзер Ю. П.//– М.: Изд. «Наука», 1966. – 688 с.
2. Гидродинамика. Теоретическая физика: т. VI./Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.// 3-е изд., перераб.-М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1986. - 736 с.
3. В. Ф. Куропатенко, Методы расчета ударных волн, // Дальневост. матем. журн., – 2001, – том 2, – номер 2, – 45–59с.
4. Метод крупных частиц в газовой динамике./Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 392 с.
5. Куропатенко В.Ф. Об одном методе сквозного счета ударных волн. // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – том 7. – №1. – 62-73с.
6. Основы численных методов механики сплошной среды [Текст] : монография / В. Ф. Куропатенко, Е. С. Шестаковская; Министерство образования и науки Российской Федерации, Южно-Уральский государственный университет, Кафедра "Вычислительная механика". - Челябинск : Изд. центр ЮУрГУ, 2017. – 253 с.
7. Тесты для гидрокодов, моделирующих ударноволновые течения в многокомпонентных средах. / Янилкин Ю. В., Бондаренко Ю. А., Гончаров Е. А., Гужова А. Р., Колобянин В.Ю., Софронов В.Н., Стаценко В.П. // Том 1: Газодинамика. Учебное пособие: в 2 т. – Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2017. 169 с.