

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Южно-Уральский государственный университет»  
(национальный исследовательский университет)  
Институт естественных и точных наук  
Факультет Математика, механика и компьютерные технологии  
Кафедра вычислительной механики

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ  
Заведующий кафедрой ВМ,  
д. ф.-м. н., профессор  
\_\_\_\_\_/Ю.М. Ковалев  
\_\_\_\_\_ 2020 г.

**Влияние нагретого пристеночного слоя на параметры ударной волны**

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА  
ЮУрГУ – 01.03.03.2020.306-01-013.ВКР

Руководитель  
к. ф.-м. н., доцент кафедры ВМ  
\_\_\_\_\_/Н.Л. Клиначева  
\_\_\_\_\_ 2020 г.

Автор работы студент группы ЕТ-410  
\_\_\_\_\_/О.Д. Посохина  
\_\_\_\_\_ 2020 г.

Нормоконтролер  
к.ф.-м.н., доцент кафедры ВМ  
\_\_\_\_\_/Н.Л. Клиначева  
\_\_\_\_\_ 2020 г.

Челябинск 2020

УДК: 53.096+519.688

## АННОТАЦИЯ

Посохина О.Д. Взаимодействие ударной волны с нагретым пристеночным слоем. – Челябинск: ЮУрГУ, ЕТ-410, 38 с., 11 ил., библиогр. список – 9 наименований, приложение – 1,

Дипломная работа была выполнена с целью исследования взаимодействия ударной волны с тепловыми неоднородностями в виде областей повышенной и пониженной плотности. При помощи пакета С++ была разработана программа, реализующая поставленную задачу.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

АННОТАЦИЯ .....	1
ВВЕДЕНИЕ .....	3
1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ .....	5
2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ .....	9
3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД .....	12
3.1. ОПИСАНИЕ МЕТОДА КРУПНЫХ ЧАСТИЦ .....	12
3.2. МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА .....	18
3.3. ВЕРИФИКАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА .....	20
4. РЕЗУЛЬТАТЫ.....	21
5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	28
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	29
ЛИСТИНГ ПРОГРАММЫ .....	30

## ВВЕДЕНИЕ

В практике нередко встречаются физические явления, связанные с распространением газа и других сред. Такие феномены называются ударные волны, и они широко распространены в природе и технике. В связи с этим возникла необходимость исследования ударно-волновых процессов.

Одно из направлений исследований таких процессов является изучение взаимодействия ударных волн с различными преградами, неоднородными областями, защитными сооружениями и т.д.

Примерами таких явлений встречаются в исследовании задач о движении искусственных тел в атмосфере Земли и других планет. Взрывные процессы, которые тоже являются примерами возникновения ударных волн, используются в горном деле, в военных целях, в геологии.

Наличие неоднородной среды перед ударной волной может привести к изменениям, к искривлению и формированию новых ударных волн в ходе течения.

**Цель работы:** изучение процесса взаимодействия плоской ударной волны с тепловыми неоднородностями, определение структуры и характеристик возникающего газодинамического течения.

### **Задачи дипломной работы:**

1. Изучение научной литературы по теме квалификационной работы.
2. Выбор математической модели задачи о взаимодействия плоской ударной волной с тепловыми неоднородностями в двумерной постановке.
3. Численно моделирование взаимодействия плоской ударной волны с тепловыми неоднородностями.
  - 3.1. Численное моделирование распространения ударной волны в воздухе в одномерной постановке. Верификация численного алгоритма.

3.2. Численное моделирование взаимодействия плоской ударной волны с тепловыми неоднородностями в одномерной и двумерной постановках.

## 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

В работе [1] авторы экспериментально изучали явление взаимодействия взрывной ударной волны с нагретым слоем. Полученные результаты говорят о том, что наличие нагреваемого слоя значительно влияет на параметры взрывной ударной волны (ВУВ).

Проведённый эксперимент показал, что при росте температуры пристеночного слоя давление ВУВ начинает снижаться.

После полученных результатов авторы провели второй эксперимент. Из-за воздействия ВУВ граница верхнего пламени начала двигаться с массовой скоростью газа в сторону нижнего пламени.

Результаты этого эксперимента показали, что величина упомянутой выше скорости значительно выше массовой скорости воздуха в УВ без нагретого слоя.

Стоит отметить, что авторы также измерили параметры ВУВ от угла её падения. Результаты были таковы: в независимости величины угла падения, амплитуда ВУВ будет меньше при наличии нагретого слоя, чем в его отсутствие.

Таким образом авторы экспериментальным путём доказали, что нагретый слой вблизи ударной волны значительно влияет на её параметры.

В работе [2] автор провёл численное исследование преломления ударной волны (УВ) вблизи областей пониженной и повышенной плотности. Было рассмотрено несколько различных задач: четверть области, «газовый клин».

Результаты на четверти области показали, что от параметров задачи зависит режим автомодельного течения – регулярный и нерегулярный. При нерегулярном течении образуется структура из скачков, разрывов и вихря, а при регулярном – все скачки и разрывы образуются в одной точке. Внутренняя структура струи при нерегулярном режиме центрированный характер.

Решения задачи на «газовом клине» привела к тому, что при условиях плотностей и угла раствора клина также образуются уже упомянутые выше

режимы. Приведённые результаты автором по этой задаче были такими же, как и в предыдущем случае.

Таким образом по полученным результатам автор делает вывод, что при нерегулярном режиме возникает слоистая структура с образованием волновой струи.

В работе [3] авторами рассматривается метод активного влияния на структуру возмущённого течения УВ, при воздействии нагретого струйного слоя. Исследования были проведены в установке экспериментальным путём.

Исследовалась ударная волна в сверхзвуковом потоке при воздействии на неё нагретого слоя. В ходе эксперимента установилось, что интенсивность прошедшей УВ незначительно снизилась, а перед фронтом возникла область повышенного давления из-за деформирования нагретого слоя.

Полученные результаты показали незначительное влияние слоя на протяжённость волн сжатия, которые уменьшаются по мере удаления от УВ.

Таким образом авторы делают вывод, что на уменьшение интенсивности УВ значительно влияет уменьшение числа Маха и увеличение нагретого слоя.

Распространение ударных волн над нагретой поверхностью изучалось экспериментально изучалось авторами в работе [4].

УВ генерировалась одиночным импульсом лазерного излучения, падающего под углом в поверхности танталовой пластинки, помещённой в камеру, заполняемую газом.

Результаты эксперимента подтвердили критерий возникновения предвестника, в следствии взаимодействия ударной волны и нагретого слоя.

В статье [5] авторами было рассмотрено развитие предвестника перед фронтом ударной волны, которая взаимодействует с тёплым слоем.

Когда происходит ситуация, что впереди фронта ударной волны начинает распространяться возмущение, то такое возмущение называется предвестником.

Авторами было получено аналитическое решение для автомоделного течения за поршнем. Решение поставленной авторами задачи показало, что

когда волна повышенной плотности «натыкается» на область пониженной плотности, то происходит распад произвольного разрыва. Результатом этого решения стало образование предвестника и контактных разрывов, из-за взаимодействия ударных волн сжатия и разрежения.

Описанные выше результаты были получены авторами аналитическим решением.

В работе [6] рассматривается взаимодействие ударной волны, находящейся вблизи нагретого слоя, который расположен на небольшом расстоянии от твёрдой поверхности. Поставленная авторами задача решалась модифицированным методом крупных частиц. Модификация метода заключалась в использовании квадратичной и линейной псевдовязкостями.

Нагретый слой, который взаимодействует с ударной волной, влияет на изменение фронта этой волны, что приводит к образованию предвестника. Решение, полученное с помощью электронно-вычислительной машины, показало, что из-за наличия нагретого слоя картина течения становится сложнее и возникают скачки уплотнения и новые ударные волны. Из-за взаимного расположения ударных волн и скачков наблюдалось возникновение тройных точек.

Авторы, по полученному решению, нашли зависимость высоты верхней тройной точки от времени для разных значений отношения плотностей. Оказалось, что найденная зависимость линейна, и решение задачи становится автомодельным.

Авторами было установлено, что возникающее течение характеризуется полем скоростей, что влияет на общую картину течения. На границе тёплого слоя и ударной волны формируются вихри с противоположными направлениями, из-за чего возникает встречная струя, которая движется в сторону набегающего потока. Стоит отметить, что основной характеристикой исследуемого течения стала скорость «возрастания» предвестника. Авторы установили зависимость этой скорости от значения отношения плотностей. Эта зависимость показала, что скорость возрастает с уменьшением



упомянутого отношения и уменьшается при увеличении интенсивности набегающей ударной волны.

На основе полученных результатов авторы делают выводы о том, что наличие тонкого нагретого слоя вблизи ударной волны значительно влияет на характер, параметры и картину течения.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в двумерной плоскости  $XOY$  находится неограниченная твёрдая поверхность. Перпендикулярно к этой поверхности в плоскости  $YOZ$  в вдоль оси  $OX$  движется плоская ударная волна, неограниченная по оси  $OY$ .

Взаимодействующий с УВ плоский слой расположен параллельно поверхности в плоскости  $XOY$ , который неограничен вдоль  $OY$  и ограничен в противоположном направлении оси  $OX$ .

Модель обладает плоской симметрией. Из этого следует, что задача должна решаться в двумерном виде.

Характерным параметром решения задачи является - отношение плотности газа в нагретом слое к плотности газа при нормальных условиях:

$$\omega = \frac{\rho_H}{\rho_0} \quad (1).$$

Схема расположения плоской ударной волны и неоднородностей в начальный момент времени в одномерном и двумерном виде показана на рис. 1 – 2. За вертикальную ось декартовой системы координат была принята  $OY$ . Область I заполнена газом с параметрами, которые определяются из соотношения для ударной волны: давление  $P_H$  за фронтом задаётся в соответствии с начальными условиями, плотность газа  $\rho_H$  за фронтом вычисляется с помощью адиабаты Гюгонио:

$$\frac{\rho_H}{\rho_0} = \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} + \frac{P_H}{P_0} \right) \left( 1 + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{P_H}{P_0} \right)^{-1} \quad (2),$$

а скорость газа за фронтом:

$$u_H = \frac{2}{(\gamma + 1)} \left( M - \frac{1}{M} \right) a_H \quad (3),$$

где  $P_0$  и  $\rho_0$  – давление и плотность газа при нормальных условиях,  $\gamma$  – показатель адиабаты газа,  $M$  – число Маха. Область II заполнена газом при нормальных условиях. Так как рассматривается задача о взаимодействии ударной волны с приподнятым над поверхностью слоем пониженной

плотности, то область III заполнена нагретым газом с пониженной плотностью и нормальным давлением, а область IV - газом при нормальных условиях.

Граничные условия для одномерной постановки рассматриваемой задачи выглядят так: левая граница – условие свободного протекания, а правая граница – твёрдая стенка (условие непротекания).

В двумерной постановке граничные условия для рассматриваемой задачи выглядят следующим образом: на левой и правой границе используется условие свободного протекания, на нижней границе – условие твердой стенки (условие непротекания), верхняя граница – условие свободного протекания.

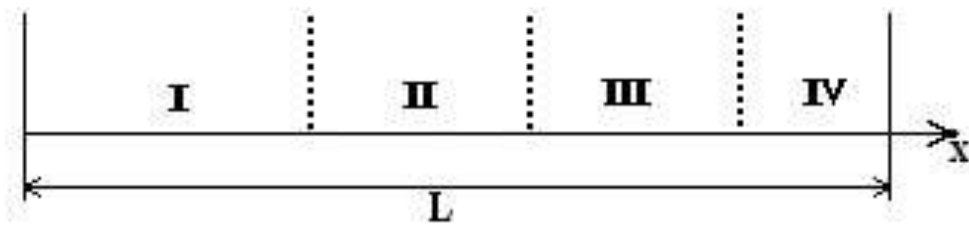


Рис. 1. Схема расчётной области в одномерном виде.

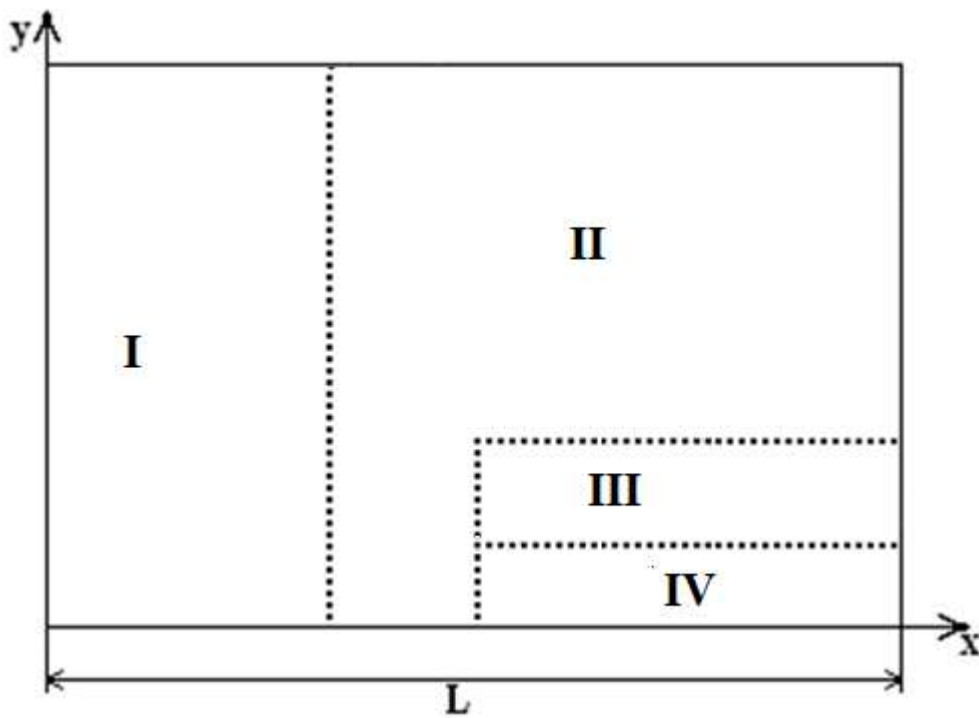


Рис. 2. Схема расчётной области в двумерном виде.

### 3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Численное решение было проведено методом крупных частиц.

#### 3.1. ОПИСАНИЕ МЕТОДА КРУПНЫХ ЧАСТИЦ

Основная идея метода крупных частиц состоит в расщеплении по физическим процессам исходной не стационарной системы уравнений Эйлера, записанных в форме законов сохранения. Расчёт каждого временного шага (вычислительного цикла) в свою очередь разбивается, как это обычно принято, на три этапа:

I. – эйлеров этап - здесь для крупной частицы определяются промежуточные значения искомых параметров потока  $\bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{E})$ ;

II. – лагранжев этап, где при движении газа вычисляются потоки массы через границы эйлеровых ячеек;

III. – заключительный этап – определяются в новый момент времени окончательные значения газодинамических параметров потока  $\psi(u, v, E, \rho)$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)^2}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)^2}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial[u(P + \rho E)]}{\partial x} + \frac{\partial[v(P + \rho E)]}{\partial y} &= 0, \\ \varepsilon &= P/\rho(\gamma - 1).\end{aligned}\tag{4}$$

Рассмотрим все этапы расчётного цикла по отдельности.

Область интегрирования покрывается фиксированной в пространстве (эйлеровой) расчётной сеткой с ячейками со сторонами в плоской системе координат  $\Delta x$  и  $\Delta y$ . Значения целых чисел  $i$  (вдоль  $x$ ) и  $j$  (вдоль  $y$ ) обозначают центр ячейки.

I Эйлеров этап.

На этом этапе расчёта изменяются лишь величины, относящиеся к ячейкам в целом, а газа предполагается заторможенной.

Из уравнения неразрывности, в частности, следует, что поле плотности будет заторможено, поэтому в оставшихся уравнениях (4) можно вынести  $\rho$  из-под знака дифференциала и разрешить (4) относительно временных производных от  $u, v, E$ . Тогда

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho W) + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho W) + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \rho \frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(pW) &= 0.\end{aligned}\tag{5}$$

Аппроксимируя уравнения (5) в момент времени  $t^n$ , получим следующие разностные уравнения в декартовой системе координат  $x, y$  для ячейки (крупной частицы)  $i, j$ :

$$\begin{aligned}\rho_{i,j}^n \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j} \Delta x \Delta y &= -[p_{i+0.5,j}^n - p_{i-0.5,j}^n] \Delta y, \\ \rho_{i,j}^n \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_{i,j} \Delta x \Delta y &= -[p_{i,j+0.5}^n - p_{i,j-0.5}^n] \Delta x, \\ \rho_{i,j}^n \left( \frac{\partial E}{\partial t} \right)_i^n \Delta x \Delta y &= \\ &= -\{[p_{i+0.5,j}^n u_{i+0.5,j}^n - p_{i-0.5,j}^n u_{i-0.5,j}^n] \Delta y \\ &\quad + [p_{i,j+0.5}^n v_{i,j+0.5}^n - p_{i,j-0.5}^n v_{i,j-0.5}^n] \Delta x\},\end{aligned}$$

где производные по времени определяются так:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{i,j}^n = \frac{\bar{f}_{i,j}^n - f_{i,j}^n}{\Delta t}, \quad f = (u, v, E)$$

В результате получим для (5) явные конечно-разностные уравнения первого порядка точности по времени и второго порядка по пространству:

$$\bar{u}_{i,j}^n = u_{i,j}^n - \frac{p_{i+0.5,j}^n - p_{i-0.5,j}^n}{\Delta x} \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}^n}\tag{6}$$

$$\overline{v}_{i,j}^n = v_{i,j}^n - \frac{p_{i,j+0.5}^n - p_{i,j-0.5}^n}{\Delta y} \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}^n}$$

$$\overline{E}_{i,j}^n = E_{i,j}^n - \left[ \frac{p_{i+0.5,j}^n u_{i+0.5,j}^n - p_{i-0.5,j}^n u_{i-0.5,j}^n}{\Delta x} + \frac{p_{i,j+0.5}^n v_{i,j+0.5}^n - p_{i,j-0.5}^n v_{i,j-0.5}^n}{\Delta y} \right] \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}^n}$$

Величины с дробными индексами, относящиеся к границам ячеек, находятся, например, так:

$$u_{i+0.5,j}^n = \frac{u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n}{2}, p_{i+0.5,j}^n = \frac{p_{i,j}^n + p_{i+1,j}^n}{2}$$

и т.д.

В приведённых схемах  $\overline{u}, \overline{v}, \overline{E}$  - промежуточные значения параметров потока на слое  $t^n + \Delta t$ , полученные в расположении заторможенности поля плотности без учёта эффектов перемещения среды.

## II Лагранжев этап.

На данном этапе вычисляются эффекты переноса, учитывающие обмен между ячейками при их перестройке на прежнюю эйлеровую сетку. Здесь находятся за время потоки массы через границы эйлеровых ячеек. При этом полагаем, что вся масса переносится только за счёт нормальной к границе составляющей скорости. Например, уравнение неразрывности (4) в разностной форме можно записать так:

$$\rho_{i,j}^{n+1} \Delta x = \rho_{i,j}^n \Delta x \Delta y - \Delta M_{i+0.5,j}^n + \Delta M_{i-0.5,j}^n - \Delta M_{i,j+0.5}^n + \Delta M_{i,j-0.5}^n$$

где поток массы:

$$\Delta M_{i+0.5,j}^n = \langle \rho_{i+0.5,j}^n \rangle \overline{\langle u_{i+0.5,j}^n \rangle} \Delta y \Delta t \quad (4)$$

Знак  $\langle \rangle$  обозначает здесь значение  $\rho$  и  $\overline{u}$  на границе ячейки. Выбор этих величин имеет важное значение, так как сильно влияет на устойчивость и точность вычислений. Для всех видов записи  $\Delta M^n$  характерен учёт

направления потока на данной границе, что повышает устойчивость вычислений.

Поток массы можно определять по формулам первого порядка точности:

$$\Delta M_{i,j}^n = \begin{cases} \rho_{i,j}^n \frac{\overline{u_{i,j}^n} + \overline{u_{i+1,j}^n}}{2} \Delta y \Delta t, & \text{если } \overline{u_{i,j}^n} + \overline{u_{i+1,j}^n} > 0 \\ \rho_{i+1,j}^n \frac{\overline{u_{i,j}^n} + \overline{u_{i+1,j}^n}}{2} \Delta y \Delta t, & \text{если } \overline{u_{i,j}^n} + \overline{u_{i+1,j}^n} < 0 \end{cases} \quad (7)$$

### III Заключительный этап.

Здесь происходит перераспределение массы, импульса и энергии по пространству и определяются окончательные поля эйлеровых параметров потока на фиксированной сетке в момент времени.

Уравнения этого этапа представляют собой законы сохранения массы  $M$ , импульса и полной энергии, записанные для данной ячейки в разностной форме:

$$M^{n+1} = M^n + \sum \Delta M_{\Gamma}^n \quad (8)$$

$$P^{n+1} = P^n + \sum \Delta P_{\Gamma}^n \quad (9)$$

$$E^{n+1} = E^n + \sum \Delta E_{\Gamma}^n \quad (10)$$

Здесь  $\Delta M_{\Gamma}^n$  - масса газа, которая пересекла за время  $\Delta t$  одну из границы рассматриваемой ячейки: суммирование производится по всем сторонам ячейки. Аналогичным образом принимаются  $\sum \Delta P_{\Gamma}^n$  и  $\sum \Delta E_{\Gamma}^n$ .

Уравнения (8)-(10) утверждают, в частности, что внутри поля течения нет источников и стоков для  $M$ ,  $P$  и  $E$ , а их изменение за время  $\Delta t$  осуществляется только за счёт взаимодействия на внешней границе области течения. При этом предполагается, что потоки массы  $\Delta M^n$  через границы ячеек (определяемые на втором этапе) несут с собой промежуточные значения скорости и удельной



энергии (вычисленные на первом этапе). Величины  $\Delta M^n$  играют здесь роль весовых функций.

Исходя из этого, окончательные значения параметров потока  $\rho, X = (u, v, E)$  на новом слое  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$  вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \rho_{i,j}^{n+1} &= \rho_{i,j}^n + \frac{\sum \Delta M_k^n}{\Delta x} \\ &= \rho_{i,j}^n + \frac{\Delta M_{i-0.5,j}^n - \Delta M_{i+0.5,j}^n + \Delta M_{i,j-0.5}^n - \Delta M_{i,j+0.5}^n}{\Delta x \Delta y} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} X_{i,j}^{n+1} &= \frac{\rho_{i,j}^n}{\rho_{i,j}^{n+1}} + \frac{\sum \bar{X}_k^n \Delta M_k^n}{\rho_{i,j}^{n+1} \Delta x \Delta y} = \\ &= \frac{\rho_{i,j}^n}{\rho_{i,j}^{n+1}} \bar{X}_{i,j}^n \\ &+ \frac{\bar{X}_{i-1,j}^n \Delta M_{i-0.5,j}^n + \bar{X}_{i,j-1}^n \Delta M_{i,j-0.5}^n - \bar{X}_{i+1,j}^n \Delta M_{i+0.5,j}^n}{\rho_{i,j}^{n+1} \Delta x \Delta y} \end{aligned} \quad (12)$$

Формула (10) справедлива, когда поток втекает в ячейку  $(i, j)$  через все стороны. Для произвольной ориентации потока формулы будут приведены ниже.

При практических расчётах для автоматического определения направления потока формула (12) была изменена. Введём, как это обычно принято в методах типа частиц в ячейках, функцию  $D_{i,j}^n$  и занумеруем все стороны  $(i, j)$  индексами  $k = 1, 2, 3, 4$ , где  $k = 1$  – левая граница,  $k = 2$  нижняя граница,  $k = 3$  – правая граница и  $k = 4$  – верхняя граница ячейки.

Определим значение  $D_{i,j}^n(k)$ , относящиеся к стороне  $k$ , следующим образом:

$$D_{i,j}^n(k) = \begin{cases} 1, & \text{если газ втекает в ячейку } (i, j) \text{ через сторону } k \\ 0, & \text{если газ вытекает из ячейки } (i, j) \text{ через сторону } k \end{cases}$$

Тогда в методе крупных частиц окончательные значения параметров потока на новом временном слое в плоском случае определяются так:

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n + \frac{\Delta M_{i-0.5,j}^n - \Delta M_{i+0.5,j}^n + \Delta M_{i,j-0.5}^n - \Delta M_{i,j+0.5}^n}{\Delta x \Delta y},$$

$$X_{i,j}^{n+1} =$$

$$= \frac{D_{i,j}^n(1) \bar{X}_{i-1,j}^n \Delta M_{i-0.5,j}^n + D_{i,j}^n(2) \bar{X}_{i,j-1}^n \Delta M_{i,j-0.5}^n}{\rho_{i,j}^{n+1} \Delta x \Delta y}$$

$$- \frac{D_{i,j}^n(3) \bar{X}_{i+1,j}^n \Delta M_{i+0.5,j}^n - D_{i,j}^n(4) \bar{X}_{i,j+1}^n \Delta M_{i,j+0.5}^n}{\rho_{i,j}^{n+1} \Delta x \Delta y}$$

(14)

$$+ \left[ \frac{\bar{X}_{i,j}^n \rho_{i,j}^n \Delta x \Delta y + [1 - D_{i,j}^n(1)] \Delta M_{i-0.5,j}^n + [1 - D_{i,j}^n(2)] \Delta M_{i,j-0.5}^n}{\rho_{i,j}^{n+1} \Delta x \Delta y}$$

$$- \frac{\bar{X}_{i,j}^n \rho_{i,j}^n \Delta x \Delta y - [1 - D_{i,j}^n(3)] \Delta M_{i+0.5,j}^n - [1 - D_{i,j}^n(4)] \Delta M_{i,j+0.5}^n}{\rho_{i,j}^{n+1} \Delta x \Delta y} \right]$$

### 3.2.МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА

В силу того, что метод крупных частиц имеет неустойчивость на волнах сжатия в данной работе для сглаживания решения была использована псевдовязкость, предложенная в [8].

Модификация заключается в том, что перед вычислением эйлерового этапа вводится искусственная вязкость без ограничителей, которая высчитывается таким образом:

$$Q_{i\pm 0,5}^n = -1 \sqrt{\gamma p_{i\pm 0,5}^n \rho_{i\pm 0,5}^n} (U_{i\pm 1}^n - U_i^n),$$

Псевдовязкость участвует в вычислениях лишь на волнах сжатия, поэтому на волнах разряжения вязкость полагается равной нулю.

На эйлеровом этапе значения давления с дробными индексами претерпят изменения:

$$p_{i\pm 0,5}^n = \frac{p_i^n + p_{i\pm 1}^n}{2} + Q_{i\pm 0,5}^n.$$

На рис. 3-4 показано сравнение метода крупных частиц с вязкостью и без падающей и отражённой от стенки ударной волны. Видно, что использованная вязкость сглаживает решение.

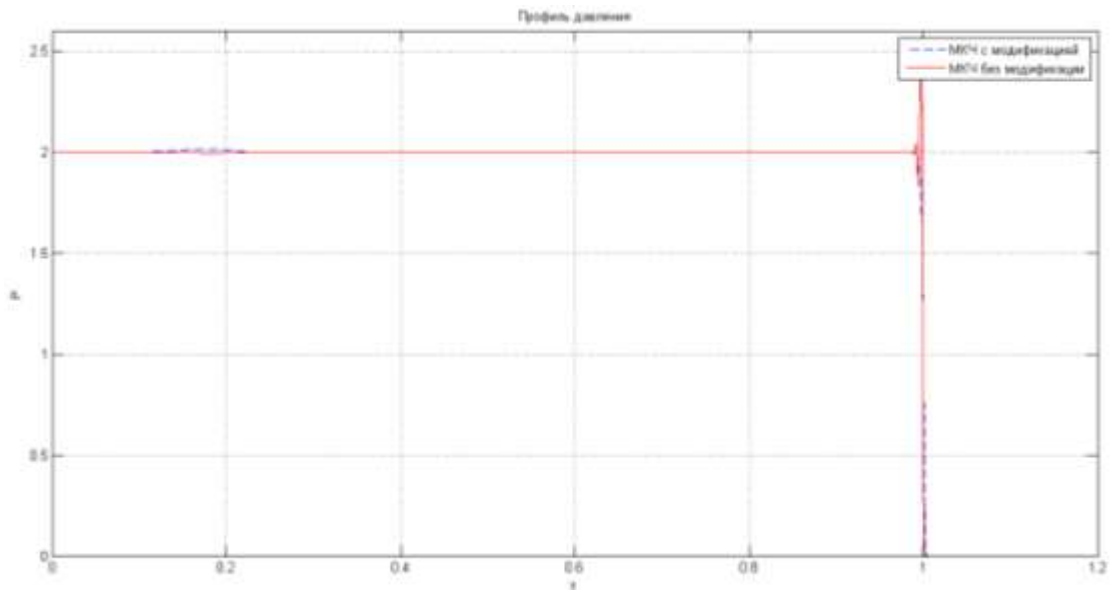


Рис. 3. График распределения давления вдоль стенки.

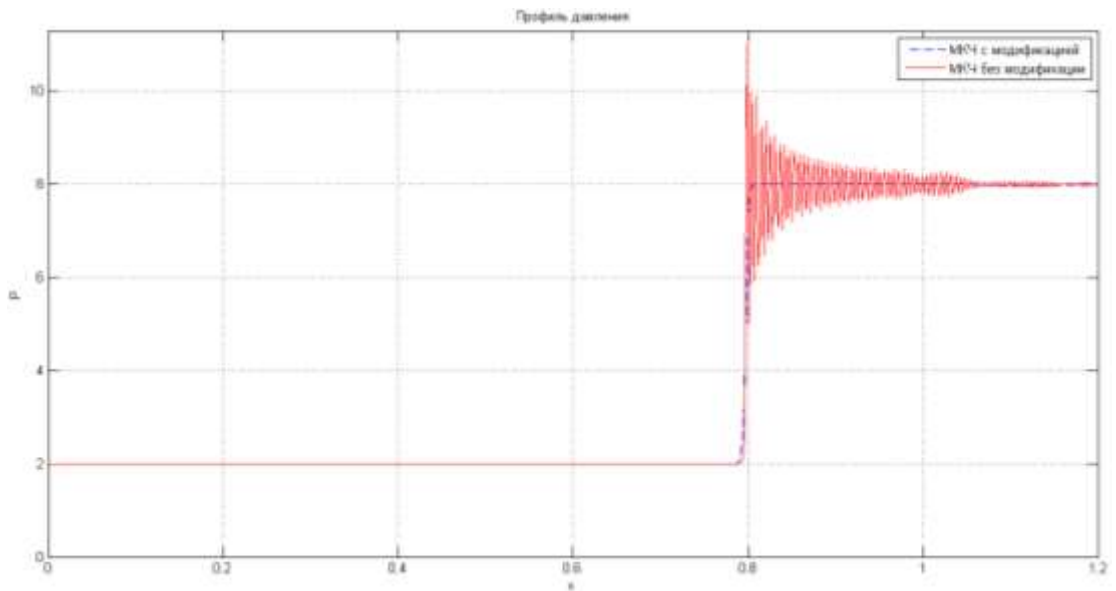


Рис. 4. График распределения давления вдоль стенки после отражения от правой границы.

### 3.3. ВЕРИФИКАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА

Верификация численного алгоритма проводилась на решении задачи о распространении стационарной ударной волны в газе.

Рассмотрим поставленную задачу. В момент  $t = 0$  параметры потока:

$$k = 1.4, P_0 = 10^5, \rho_0 = 1.21, E_0 = \frac{P_0}{(k-1) \cdot \rho_0} + \frac{u_0^2}{2}, U_0 = 0.$$

Величины за фронтом ударной волны задаются:

$$P_H = 5 \cdot 10^5, \rho_H = 3.41, E_H = \frac{P_H}{(k-1) \cdot \rho_H} + \frac{u_H^2}{2}, U_H = 461.$$

На рис. 5 приведен профиль давления. Расчётная сетка была распределена на число ячеек  $N = 1000$ , длиной  $L = 1.2$  и с числом Куранта равным 0.5.

Полученные результаты показывают, что метод крупных частиц хорошо согласуется с аналитическим решением.

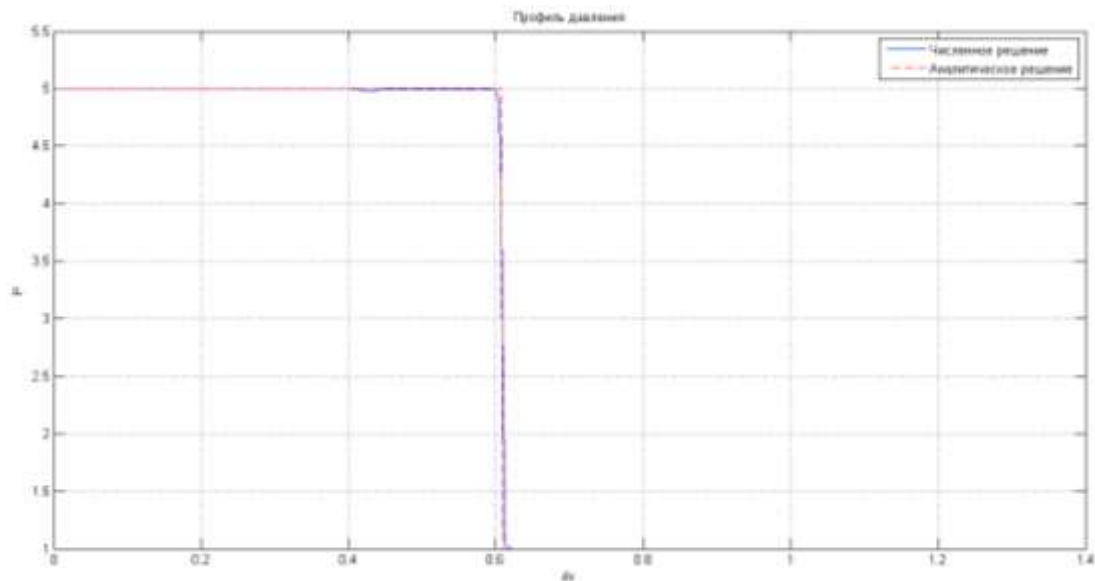


Рис. 5. График распределения профиля давления вдоль стенки для стационарной ударной волны.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ

В данной работе были проведены расчеты взаимодействия ударной волны с тепловой неоднородностью. Задача решалась с начальными параметрами:

$P_H = 5 \cdot 10^5 \text{ Па}$  – давление за фронтом ударной волны;

$P_0 = 10^5 \text{ Па}$  – давление перед фронтом волны;

$k = 1.4$  – показатель адиабаты;

$\rho_H = 3,41 \text{ кг/м}^3$  – плотность за фронтом ударной волны;

$\rho_0 = 1,21 \text{ кг/м}^3$  – плотность перед фронтом ударной волны;

$u_H = 461 \text{ м/с}$  – скорость за фронтом ударной волны;

$u_0 = 0 \text{ м/с}$  – скорость перед фронтом ударной волны;

$E_H = \frac{P_H}{(k-1)\rho_H} + \frac{u_H^2}{2}$  – энергия за фронтом ударной волны;

$E_0 = \frac{P_0}{(k-1)\rho_0} + \frac{u_0^2}{2}$  – энергия перед фронтом ударной волны;

В области теплового слоя:

$P_0 = 10^5 \text{ Па}$  – давление перед фронтом волны;

$\rho_T = \omega \rho_0 \text{ кг/м}^3$  – плотность перед фронтом ударной волны,

где  $\omega = \frac{\rho_H}{\rho_0}$  – характерный параметр для решения задачи;

$u_0 = 0 \text{ м/с}$  – скорость перед фронтом ударной волны;

$$E_0 = \frac{P_0}{(k-1)\rho_0} + \frac{u_0^2}{2}$$

На рис. 6 – 7 представлено распределение давления вдоль стенки на 2 момента времени. Полученные распределения показывают, что с уменьшением характерного параметра  $\omega$  скорость ударной волны увеличивается, а её интенсивность падает.

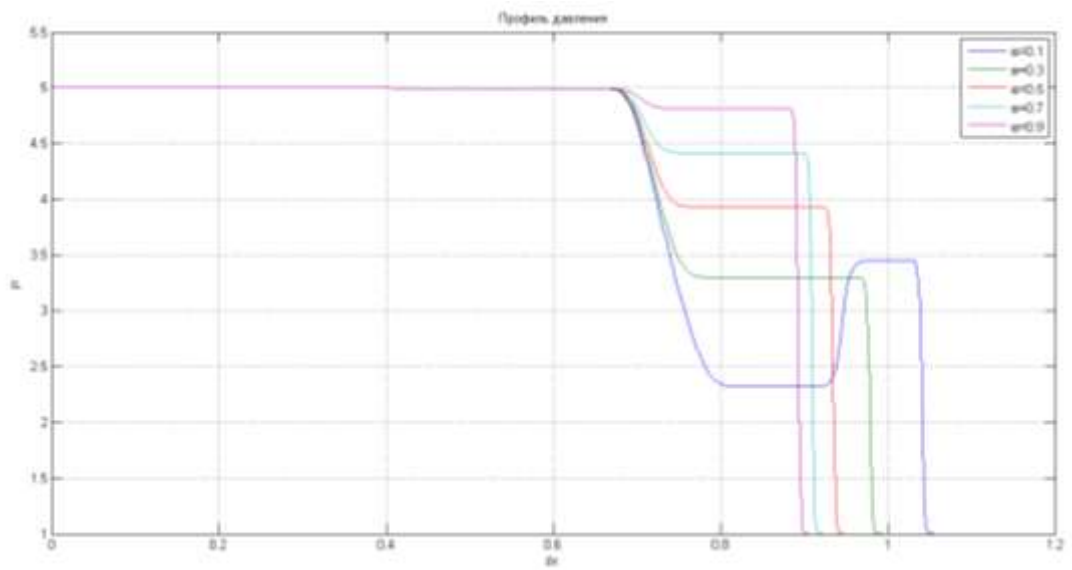


Рис. 6. График распределения профиля давления на момент времени  $t=0.0006$ с.

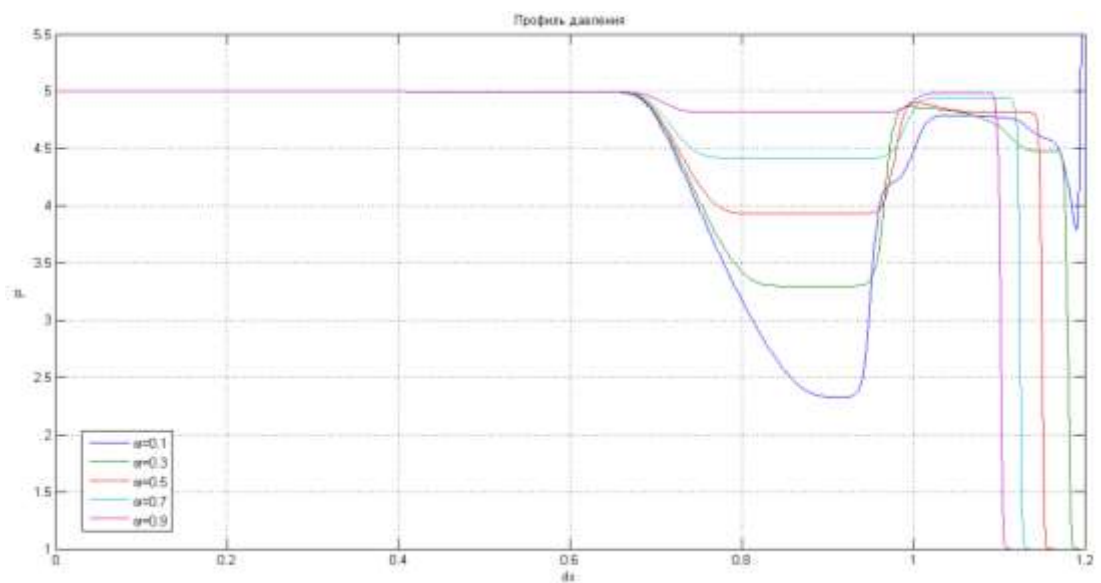


Рис. 7. График распределения профиля давления на момент времени  $t=0.0009$ с.

Решение задачи о взаимодействии УВ с теплым слоем в двумерной постановке решалась с теми же начальными данными, что и в одномерной. Расчётная сетка содержала 100x200 ячеек. Были рассмотрены два варианта расположения теплового слоя: у стенки и на некоторой высоте от неё.

На рис 8 – 9. представлены поля давлений и скоростей для трех моментов времени для первого случая. При взаимодействии УВ с нагретым слоем газа, часть УВ, движущаяся по слою, опережает головной фронт, в результате чего образуется предвестник. С течением времени размер предвестника увеличивается. Кроме того, чем выше будет температура газа в слое, тем больше будет размер предвестника. Также видно, что внутри слоя образуется вихревая зона.

При взаимодействии УВ с нагретым слоем газа, приподнятым над поверхностью, возникает сложная картина течения. На рис. 10 – 11 представлены поля давлений и скоростей для трех моментов времени. Особенностью течения является образование двух предвестника, движущихся по холодному газу. Теплый газ в слое, пройдя через УВ, встречает сильное возвратное течение и начинает двигаться в противоположные стороны от нагретого слоя. В результате чего образуются вихревые области вблизи верхней и нижней границ слоя.



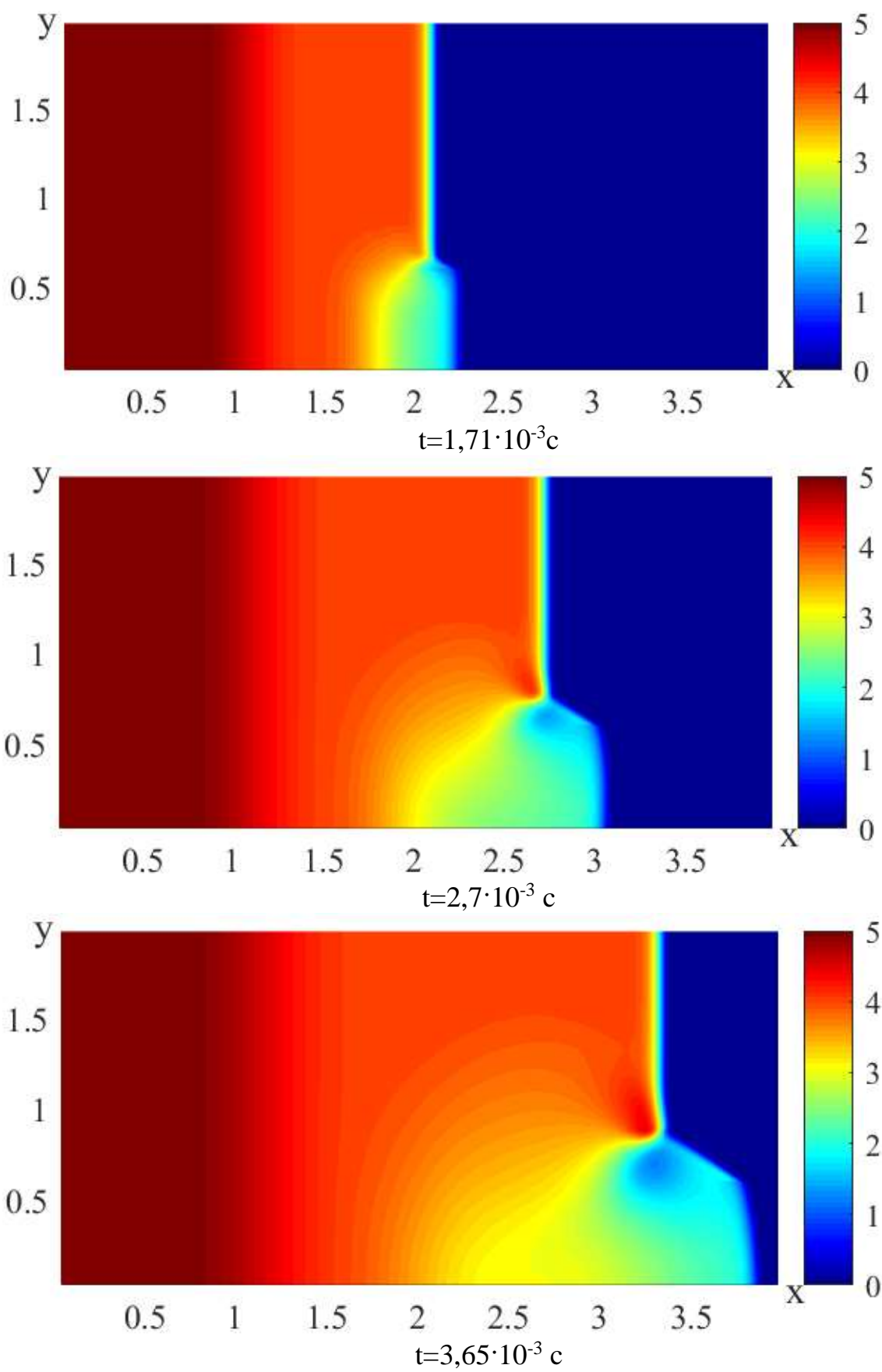


Рис 8. Поле давлений.

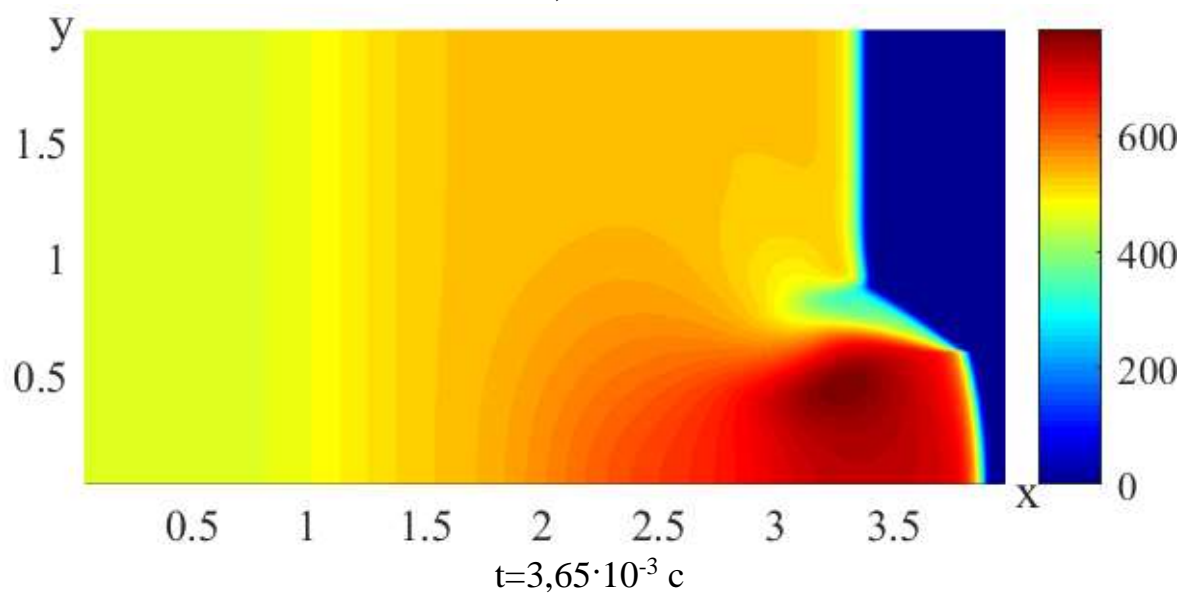
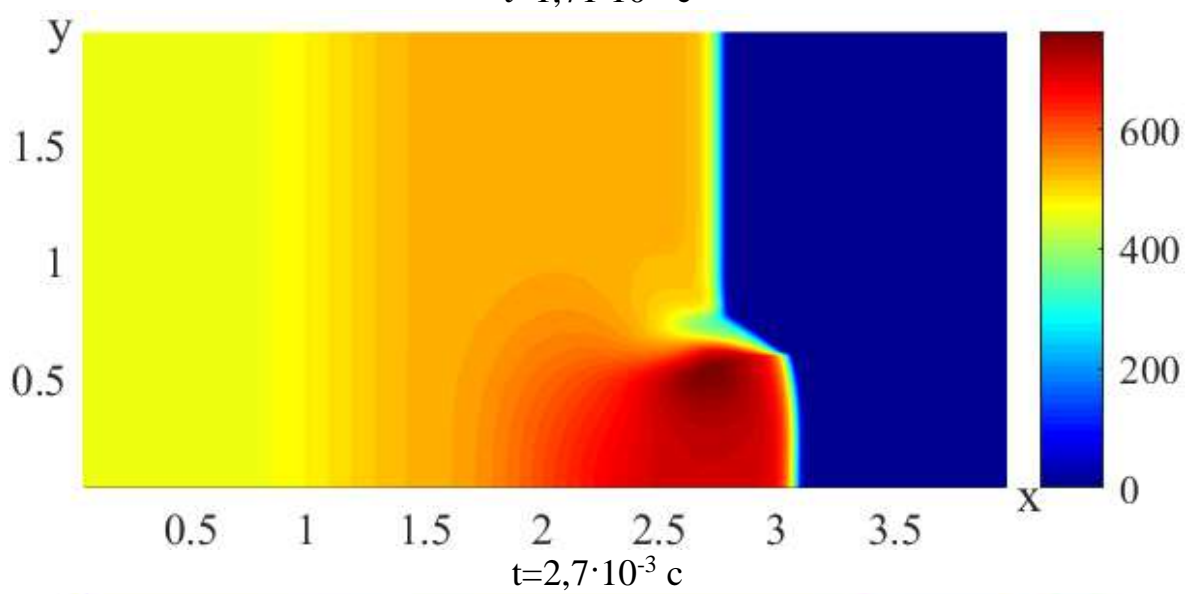
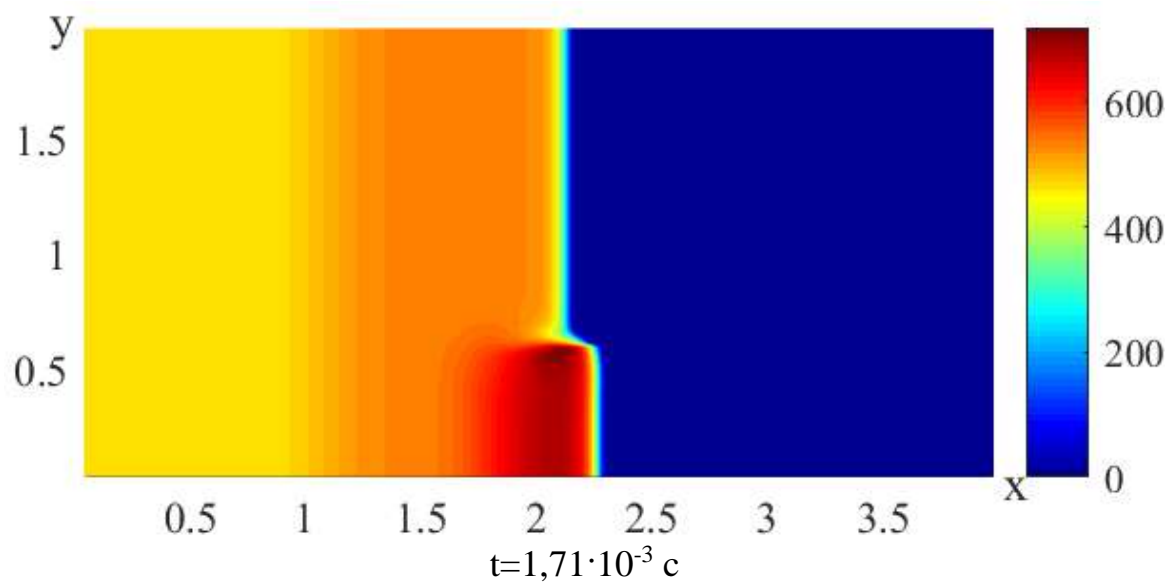


Рис 9. поле скоростей

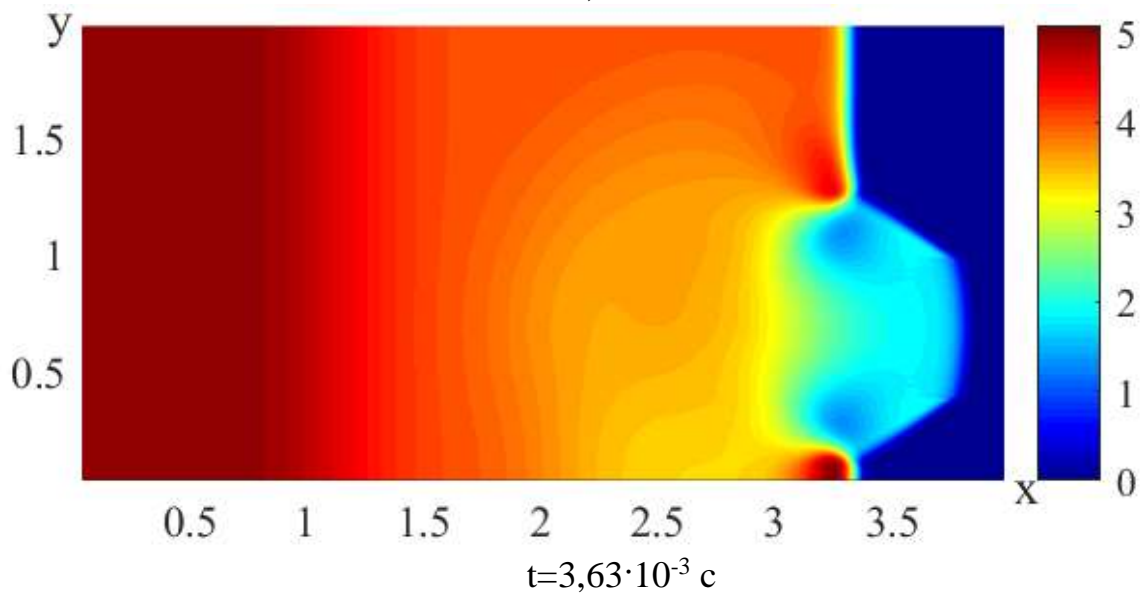
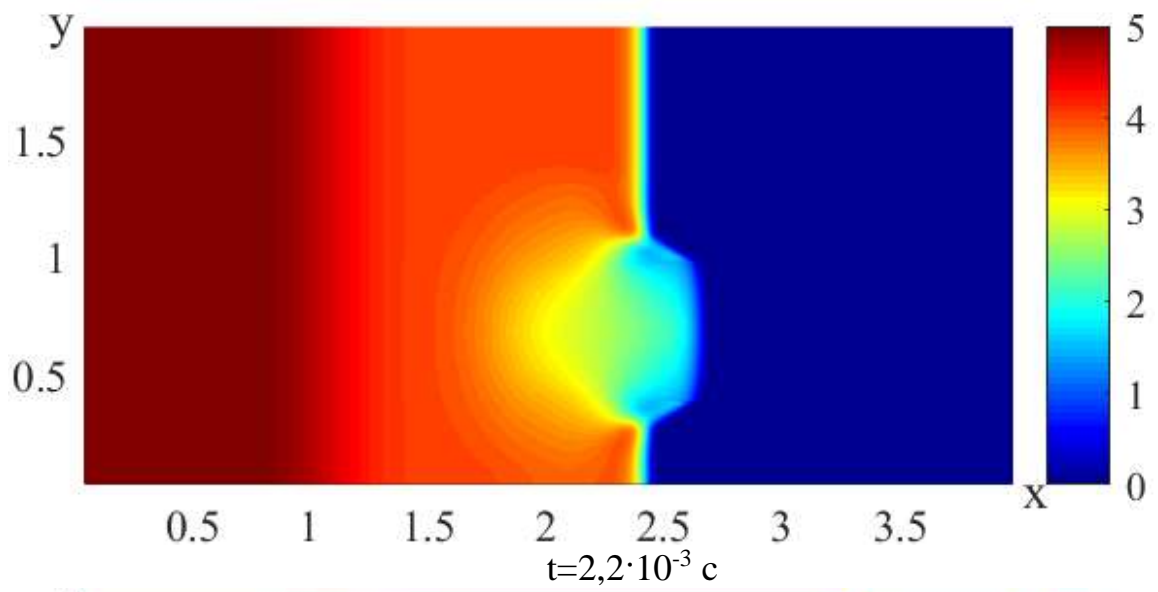
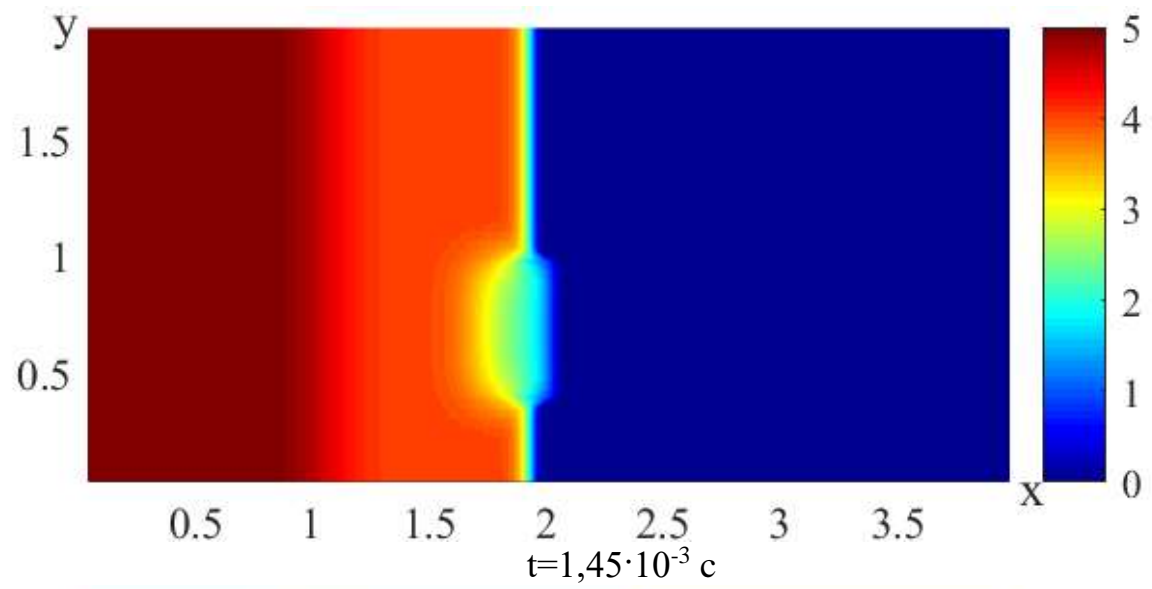


Рис. 10. Поле давлений.

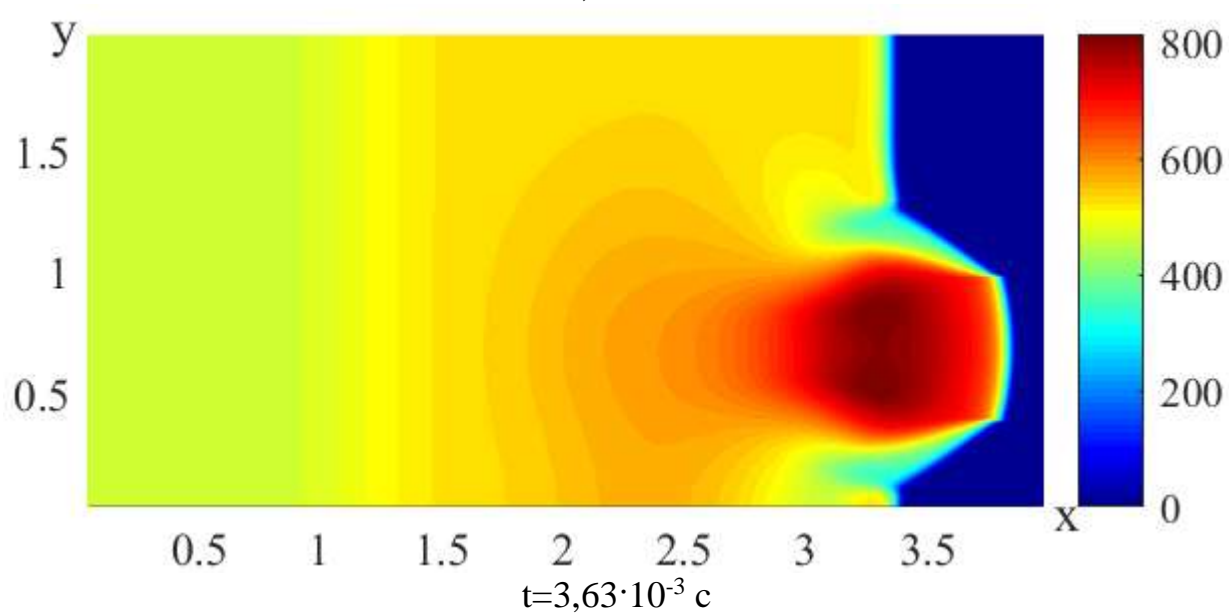
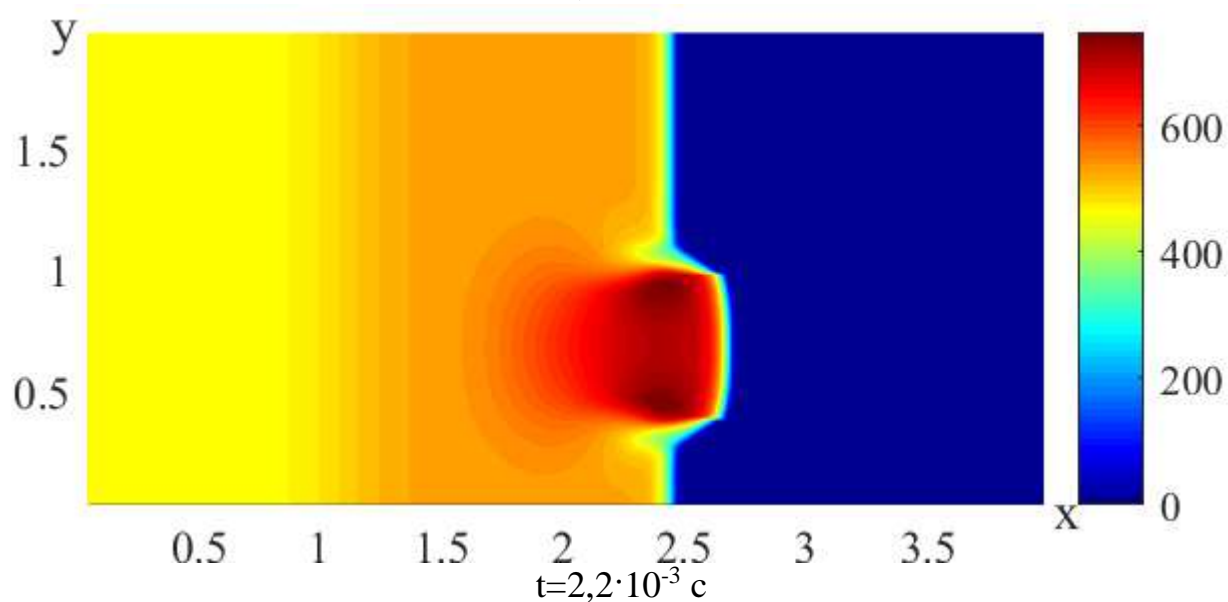
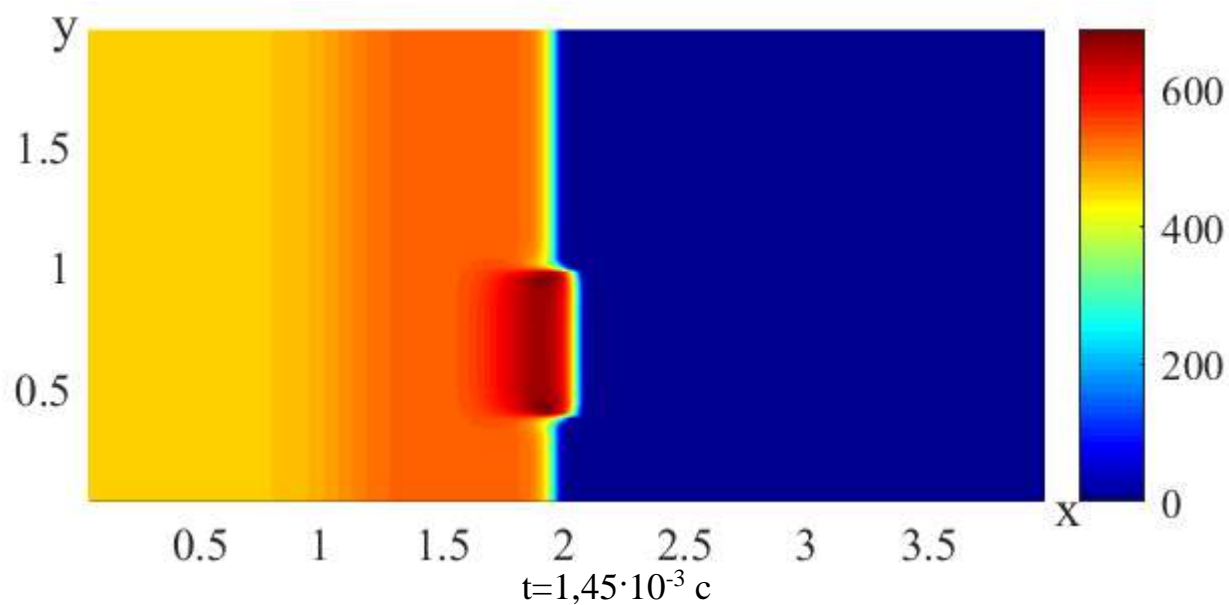


Рис. 11. Поле скоростей.

## **5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Основные выводы по работе:

1. Проведён обзор научной литературы, по теме исследования.
2. Построен численный алгоритм решения поставленной задачи в двумерной постановке.
3. Полученные результаты качественно совпадают с результатами, представленными в научной литературе [3], [5], [6].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. А. Садовский, В. В. Адушкин, Влияние нагретого пристеночного слоя на параметры ударной волны, Докл. АН СССР, 1988, том 300, номер 1, 79–83
2. Сутырин О.Г. Газодинамика взаимодействия ударных волн с областями газа повышенной и пониженной плотности. // Вестник Нижегородского Университета, 2011 №4. – С. 1153-1154
3. Т. А. Киселева, В. Ф. Чиркашенко. Воздействие теплового слоя на параметры ударной волны.
4. В. И. Артемьев, И. Э. Маркович, И. В. Немчинов, В Л. Суляев. Двумерное автомодельное движение сильной ударной волны над нагретой поверхностью. // ДАН СССР, 1987, том 293, номер 5, 1082-1084
5. В. И. Бергельсон, И. В. Немчинов, Т. И. Орлова, В. А. Смирнов, В. М. Хазинс, Автомодельное развитие предвестника перед ударной волной, взаимодействующей с тёплым слоем, Докл. АН СССР, 1987, том 296, номер 3, 554–557
6. Ю.М. Ковалев, А.Ю. Черемохов. Взаимодействие плоской ударной волны с нагретым слоем вблизи твёрдой поверхности // Вестник Челябинского государственного университета, 1997, С. 82-89.
7. Белоцерковский О.М, Ю.М Давыдов «Метод крупных частиц в газовой динамике»-М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982 – с 54 – 67.
8. Д. В. Садин, “Модификация метода крупных частиц до схемы второго порядка точности по пространству и времени для ударно-волновых течений газозвеси”, Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование, 12:2 (2019), 112–122.
9. Куропатенко В.Ф., Шестаковская Е.С. Основы численных методов механики сплошной среды. Челябинск, Издательский центр ЮУрГУ, 2017 – 254 с.