Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет
(Национальный исследовательский университет) »

Институт естественных и точных наук
Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра математического анализа и МПМ

РАБОТА ПРОВЕРЕНА	**ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ**
Рецензент	**Заведующий кафедрой**,
к.пед.н., доцент	д.ф.-м.н.,зав.каф.
___________/А.Ю. Эвнин/	___________/В.Л. Дильман/
“_____” _________ 2020 г.	“_____” _________ 2020 г.

АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

ЮУрГУ – 01.03.01–2020–129-06–128. ВКР

Руководитель работы
к.ф.-м.н., доцент
___________/ В.И. Заляпин/
“_____” __________2020 г.

Автор
Студент группы ИЕТН-415
_________/А.А. Анциферов/
“_____” _________ 2020 г.

Нормоконтролер
к.ф.-м.н., доцент
___________/М.А. Корытова/
“____” __________ 2020 г.

Челябинск
2020

Содержание

ВВЕДЕНИЕ **4**

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ. **5**

Общие сведения. 5

Числовые характеристики. 5

Примеры. 6

СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ. **8**

Общие сведения. 8

Элементы анализа стационарных (в широком смысле) процессов. 10

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ СТАЦИОНАРНЫХ (В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ) ПРОЦЕССОВ. **17**

Общие сведения. 17

Примеры решения уравнения физики. 24

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. **29**

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ. **30**

Введение.

Реальные физические процессы всегда имеют некоторые искажения, которые могут носить как закономерный, так и совершенно случайный характер. Математическим аппаратом для описания и решения самых разнообразных задач любых областей физики служит теория случайных процессов, математические методы теории случайных процессов применяются в задачах управления сложными динамическими системами, при обработке измерительной информации, в задачах прогноза.

Рассматривается задача $x'(t) + A(t)x(t) = f(t)$, где правая часть «зашумляется» случайной функцией $f(t) \to f(t) + \xi(t)$. При каких условиях у такого уравнения существует стационарное решение и как его найти.

Случайные процессы.

Общие сведения.

Пусть (Ω, F, P) –некоторое вероятностное пространство, а T – подмножество действительной прямой.

Случайным процессом называется семейство случайных величин $X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in T$.

В случае, когда зафиксирован момент времени $t = t_0$, случайная величина $X(\omega, t_0)$ называется **сечением** процесса в точке t_0. Если зафиксировать исход $\omega = \omega_0$, то функция времени $X(\omega_0, t)$ называется **реализацией** процесса.

Пусть $\xi(t), t \in T$ и $\eta(t), t \in T$ – случайные процессы, определенные на одном вероятностном пространстве, принимающие значения в одном измеримом пространстве. Если $\forall t \in T$

$$P(\xi(t) = \eta(t)) = 1,$$

то процессы называются **стохастически эквивалентными**. $\xi(t)$ называется **модификацией** процесса $\eta(t)$, и наоборот.

Числовые характеристики.

Математическое ожидание $X(t)$ - функция $m_X: T \rightarrow R$, такая что для любого $t \in T$ $m_X(t) = MX(t)$.

Корреляционная функция $X(t)$ - функция двух переменных $R_X: T \times T \rightarrow R$, каждой паре моментов времени сопоставляющая корреляционный момент сечений, $R_X(t_1, t_2) = MX(t_1)X(t_2) - MX(t_1)MX(t_2)$.

Ковариационная функция $X(t)$ - функция двух переменных $K_X: T \times T \rightarrow R$, $K_X(t_1, t_2) = MX(t_1)X(t_2)$.

Корреляционная и ковариационная функции связаны между собой соотношением: $K_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) + m_X(t_1)m_X(t_2)$.

Дисперсия $X(t)$ - функция $D_X: T \rightarrow R$, $D_X(t) = MX^2(t) - (MX(t))^2$.

Дисперсия процесса связана с корреляционной функцией по формуле $D_X(t) = R_X(t, t)$.

Характеристической функцией процесса $X(t)$ называется функция $\varphi_{X(t)}(s) = Me^{isX(t)}, s \in R$.

Случайная функция $X(t), t \geq 0$ является процессом с **независимыми приращениями**, если $\forall n \geq 1$ и $\forall t_i: 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$ случайные величины $X(0), X(t_1) - X(0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ независимы в совокупности.

Примеры.

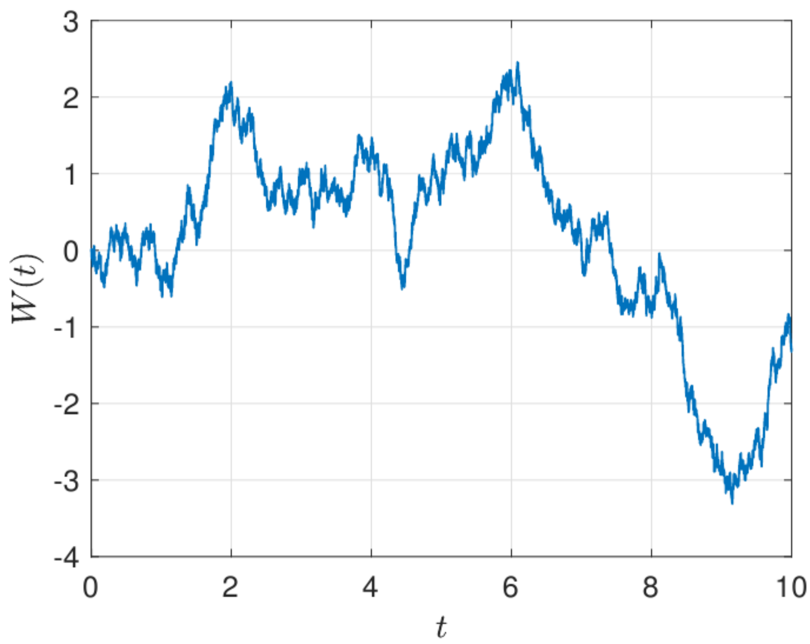
Винеровский процесс с параметром $\sigma > 0$ - случайная функция $W(t), t \geq 0$, такая что:

а) $W(0) = 0$ п.в.

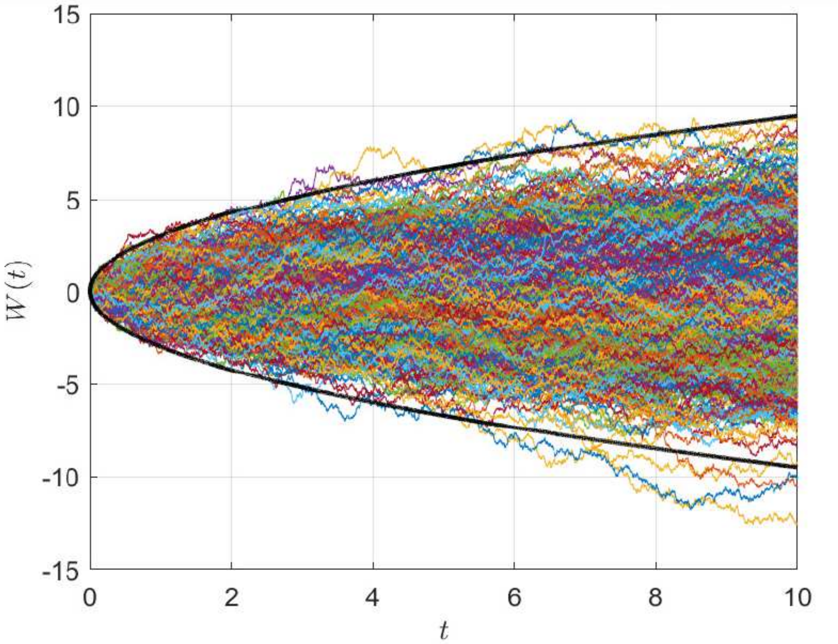
б) $W(t)$ – процесс с независимыми приращениями.

в) $\forall t, s \geq 0: W(t) - W(s) \in N(0, \sigma^2|t - s|)$.

Пример траектории винеровского процесса на отрезке $[0; 10]$



1000 реализаций винеровского процесса на отрезке $[0; 10]$



Вычислим числовые характеристики для этого процесса:

Т.к. $W(t) = W(t) - W(0) \in N(0, \sigma^2 t)$, то $m_W(t) = MW(t) = 0, \forall t \geq 0$,

$D_W(t) = DW(t) = \sigma^2 t, \forall t \geq 0$,

$R_W(t, s) = \sigma^2 \min(t, s)$,

$K_W(t, s) = R_W(t, s) + MW(t)MW(s) = R_W(t, s) = \sigma^2 \min(t, s)$.

$X(t), t \geq 0$ - **гауссовский**, если $\forall n \geq 1$ и точек $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ вектор $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ является нормальным случайным вектором.

В связи с этим определением, можно иначе сформулировать определение для винеровского процесса

$W(t), t \geq 0$ - **винеровский** процесс, тогда и только тогда, когда

а) $W(t)$ – гауссовский;

б) $MW(t) = 0, \forall t \geq 0$;

в) $R_W(t, s) = \min(t, s), \forall t, s \geq 0$.

Пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda > 0$ - случайная функция $K(t), t \geq 0$, со следующими свойствами:

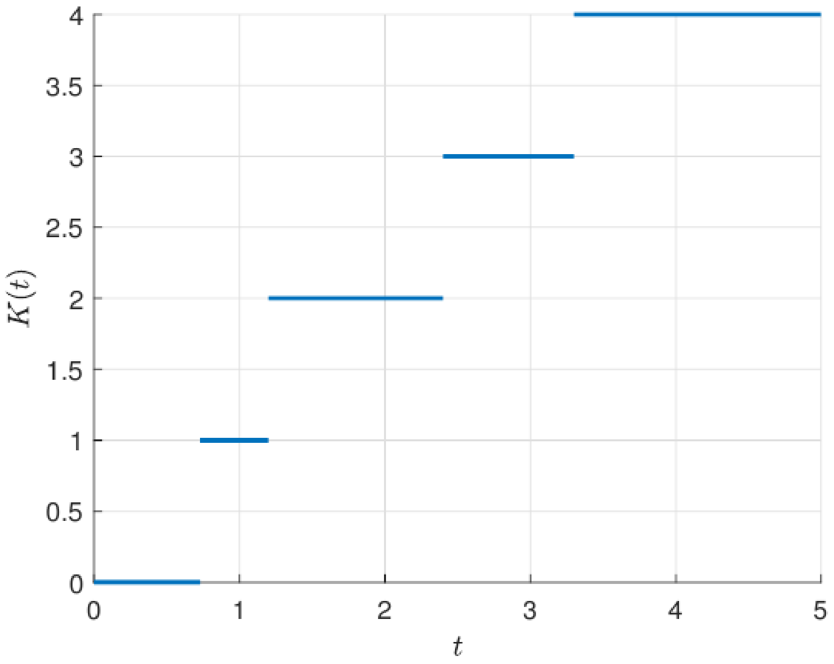
а) $K(0) = 0$ п.в.

б) $K(t)$ – процесс с независимыми приращениями.

в) $\forall t > s \geq 0$ выполняется $K(t) - K(s) \in Po(\lambda(t - s))$.

Мат. ожидание, дисперсия и корелляционная функция соответственно равны $MK(t) = \lambda t, DK(t) = \lambda t, R_K(t,s) = \lambda \min(t,s)$

Пример типичной траектории Пуассоновского процесса



Стационарные случайные процессы.

Общие сведения.

Стационарным в узком смысле называется случайный процесс $X(\omega, t)$, конечномерная функция распределения которого (или плотность распределения вероятностей) не зависят от сдвига всех моментов времени t_i $i = 1,2, \ldots, n$ на одну и ту же величину τ. Иначе говоря, статистические свойства такого процесса не зависят от начала наблюдения.

$$p(x,t) = p(x, t + \tau)$$

Полагая $t = -\tau$:

$$p(x,t) = p(x),$$

т.е. одномерное распределение (распределение сечения) стационарного случайного процесса от времени не зависит.

Стационарный в широком смысле случайный процесс - процесс, среднее значение и дисперсия которого не зависят от времени, функция корреляции - функция, зависящая только от разности моментов времени.
Если рассматривать достаточно большие участки времени, то стационарные случайные процессы протекают на них примерно одинаково: графики реализаций – колеблющиеся линии приблизительно одинакового характера, средние амплитуда, частота колебаний, уровень, около которого происходят колебания, несущественно изменяются в случае сдвига промежутка времени, если вычислять их на достаточно большом промежутке. Матожидание и дисперсия должны быть постоянными, в противном случае процесс сильно различался бы при переходе от сечения к сечению. Примерами являются колебания самолета при «автопилоте», колебания напряжения в электрической цепи, давление газа в газопроводе, процесс качки корабля на стационарной волне и т.д. Такие процессы оказываются проще в изучении, т.к. зависимости их описывающие более просты. Стационарность случайного процесса отражает идею неизменности условий его протекания, означает независимость некоторых характеристик сечений от времени. Для реальных процессов это задает жесткие ограничения, поэтому для применения свойств стационарных процессов к изучаемому явлению, процесс рассматривают на коротком интервале, в течение которого вероятностные характеристики мало изменяются.
Теорема Колмогорова. Пусть дан случайный процесс $X(t), t \in T$; $T = [a, b]$. Если существуют $\alpha > 0, \beta > 0, c < \infty$, что $\forall t, t + h \in [a, b]$ выполняется

$$M|X(t+h) - X(t)|^{\alpha} \le c|h|^{1+\beta},$$

то $\xi(t)$ имеет непрерывную модификацию.
Для винеровского процесса, по указанной теореме, существует непрерывная модификация (можно положить $\alpha = 4, \beta = 1, c = 3\sigma^4$). Поэтому можно считать, что **траектории** винеровского процесса всегда **непрерывны**.
Случайный процесс $X(t), t \in T$ **стохастически непрерывен**, если $\forall t$

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{h\to 0} P(|X(t+h) - X(t)| > \varepsilon) = 0.$$

Случайный процесс $X(t), t \geq 0$ **процесс Леви**, если

а) $X(0) = 0$ п.в.,

б) $X(t)$ – процесс с независимыми приращениями,

в) $\forall t, s \geq 0$ случайная величина $X(t+s) - X(t)$ имеет распределение, которое не зависит от t,

г) $X(t)$ – стохастически непрерывен, т.е.

$$\forall t \geq 0\ X(t+\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} X(t).$$

Можно ввести эквивалентные определения для винеровского и пуассоновского процессов:

Процесс $K(t), t \geq 0$ - пуассоновский процесс с параметром $\lambda > 0$, если

а) $K(t)$ – процесс Леви,

б) $\forall t > 0$ сечение $K(t)$ имеет распределение $Po(\lambda t)$.

Процесс $W(t), t \geq 0$ - винеровский процесс, если

а) $W(t)$ – процесс Леви,

б) $\forall t > 0$ сечение $W(t)$ имеет распределение $N(0, t)$.

Для следующих определений, будем считать, что дан процесс $X(t), t \in T$, каждое сечение которого имеет конечный на T второй момент $MX^2(t) < \infty$. Процессы, обладающие таким свойством, называют случайными процессами второго порядка, а их множество обозначают L_2.

Элементы анализа стационарных (в широком смысле) процессов.

Билинейная функция $\langle\cdot,\cdot\rangle: L_2 \times L_2 \to R, \forall X, Y \in L_2 \to \langle X, Y\rangle = M(XY)$ определяет на L_2 **скалярное произведение**.

Проверим аксиомы скалярного произведения:

1. $\forall X \in L_2 \to \langle X, X\rangle = MX^2 \geq 0$, т.к. $X^2 \geq 0$. Кроме того, $\langle X, X\rangle = 0 \Leftrightarrow MX^2 = 0 \Leftrightarrow X \overset{\text{п.н.}}{\Longrightarrow} 0$.

2. $\forall X, Y \in L_2 \to \langle X, Y\rangle = M(XY) = M(YX) = \langle Y, X\rangle$.

3. $\forall X, Y, Z \in L_2, \alpha, \beta \in R \to \langle \alpha X + \beta Y, Z\rangle = \alpha\langle X, Z\rangle + \beta\langle Y, Z\rangle$.

Теорема (о полноте L_2). Любая фундаментальная по Коши последовательность из L_2 сходится в среднем квадратичном к случайной величине из L_2.

Теорема. Пусть для последовательности $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_2$ $\exists c \in R$, что $\forall \{X_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, \{X_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ выполняется $\langle X_{n_k}, X_{n_m} \rangle \xrightarrow[k,m\to\infty]{} c$. Тогда

$$\exists X \in L_2 : X = \lim_{n\to\infty} Xn.$$

$X(t) \in L_2$ называется непрерывным в среднем квадратичном, если $\forall t \geq 0 \to X(t + \varepsilon) \overset{L_2}{\to}_{\varepsilon\to 0} X(t)$.

Теорема (критерий **с.к.-непрерывности**). $X(t) \in L_2$ является **непрерывным** в среднеквадратичном, тогда и только тогда, когда его ковариационная функция $K_X(t_1, t_2)$ непрерывна на $[0, +\infty)^2$.

С учетом связи ковариационной функции с математическим ожиданием и корреляционной функцией, критерий может быть сформулирован таким образом:

Процесс $X(t) \in L_2$ является **непрерывным** в среднеквадратичном тогда и только тогда, когда $m_X(t)$ непрерывно при $t \geq 0$ и корреляционная функция $R_X(t_1, t_2)$ непрерывна на $[0, +\infty)^2$.

Винеровский процесс является непрерывным в среднеквадратичном, т.к. его матожидание непрерывно (равно нулю), корреляционная функция $R_X(t_1, t_2) = \min(t_1, t_2)$ непрерывна. Это справедливо и для пуассоновского процесса с интенсивностью $\lambda > 0$: матожидание $m_K(t) = \lambda t$, корреляционная функция $R_K(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2)$ непрерывны на своих областях определения.

$X(t) \in L_2$ называется **дифференцируемым** в среднем квадратичном, если $\exists Y(t) \in L_2, t \geq 0$:

$$\forall t \geq 0 \to \frac{X(t + \varepsilon) - X(t)}{\varepsilon} \overset{L_2}{\to}_{\varepsilon\to 0} Y(t).$$

$Y(t)$ называется **среднеквадратичной производной** $X(t)$ и обозначается штрихом, т.е. $Y(t) = X'(t)$.

Теорема (критерий **с.к.-дифференцируемости**). $X(t) \in L_2$ является дифференцируемым в среднеквадратичном тогда и только тогда, когда $\forall t \geq 0$

$$\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \to 0} \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\big(K_X(t+\varepsilon_1, t+\varepsilon_2) - K_X(t+\varepsilon_1, t) - K_X(t, t+\varepsilon_2) + K_X(t,t)\big) < \infty$$

Или, с учетом связи корреляционной и ковариационной функций, можно сформулировать критерий таким образом:

$X(t) \in L_2$ с.к.-дифференцируемый тогда и только тогда, когда $\forall t \geq 0$ $\exists m'_X(t)$ и существует

$$\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \to 0} \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\big(R_X(t+\varepsilon_1, t+\varepsilon_2) - R_X(t+\varepsilon_1, t) - R_X(t, t+\varepsilon_2) + R_X(t,t)\big) < \infty$$

Винеровский процесс не является с.к.-дифференцируемым ни в какой точке, так как не существует обобщенной производной корреляционной функции в точках вида (t, t). Действительно, возьмем произвольную точку t и рассмотрим предел:

$$\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \to 0} \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\big(R_X(t+\varepsilon_1, t+\varepsilon_2) - R_X(t+\varepsilon_1, t) - R_X(t, t+\varepsilon_2) + R_X(t,t)\big) < \infty$$

Т.к. $R_W(t,s) = \min(t,s) = (t + s - |t - s|)/2$, то данный предел равен пределу

$$\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \to 0} \frac{|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| - |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|}{2\varepsilon_1 \varepsilon_2}.$$

Конечный предел не существует, так как при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ он равен $+\infty$.

Пусть $X(t) \in L_2$ определен на $[a, b] \subset [0, +\infty)$. Построим разбиение $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$, на каждом промежутке выберем произвольную точку $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i), i = 1, \dots, n$. Если при $n \to \infty$ и $\max_{i=1,\dots,n}(t_i - t_{i-1}) \to 0$ существует предел в среднеквадратическом

$$\sum_{i=1}^{n} X(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) \underset{\varepsilon \to 0}{\overset{L_2}{\to}} Y,$$

не зависящий от способа разбиения $\{t_i\}$ и выбора точек $\{\tau_i\}$, то $X(t)$ называется **интегрируемым** в среднеквадратичном на $[a, b]$, а случайная величина Y называется ее с.к.-интегралом или стохастическим интегралом **Римана** на $[a, b]$ и обозначается

$$Y = \int_a^b X(t)dt.$$

Теорема (критерий **с.к.-интегрируемости**). Случайный процесс $X(t) \in L_2$ с.к.-интегрируем с непрерывной функцией $g(t)$ на отрезке $[a, b] \subset [0, +\infty)$ тогда и только тогда, когда существует конечный интеграл Римана:

$$\int_a^b \int_a^b g(t_1)g(t_2)K_X(t_1, t_2)dt_1dt_2 < \infty$$

Теорема (критерий **с.к.-интегрируемости**). Случайный процесс $X(t) \in L_2$ с.к.-интегрируем с непрерывной функцией $g(t)$ на отрезке $[a, b] \subset [0, +\infty)$ тогда и только тогда, когда существуют конечные интегралы Римана:

$$\int_a^b g(t)m_X(t)dt < \infty, \int_a^b \int_a^b g(t_1)g(t_2)R_X(t_1, t_2)dt_1dt_2 < \infty.$$

Если процесс с.к.-непрерывен, то он с.к.-интегрируем на любом отрезке и с любой непрерывной функцией. Если процесс с.к.-дифференцируемый, то он с.к.-непрерывен. Т.к. пуассоновский и винеровский процессы с.к.-непрерывны, то они с.к.-интегрируемы.

$X(t), t \in [a, b]$ называется **неупреждающей** функцией относительно процесса $W(t), t \in [a, b]$, если $\forall t \in [a, b]$ и для $\forall B \in B$ выполняется $\{X(t) \in B\} \in \sigma\{W(s), s \leq t\}$.

Если говорить очень грубо, это значит, что события, которые связаны с $X(t)$ в момент времени t, связаны с событиями $W(t)$ на интервале до t включительно и не связаны с «будущим» $W(t)$, т.е. с событиями на интервалах после t.

Как обычно, интеграл от случайной функции строится как предел интеграла от кусочно-постоянных функций. Предел будем понимать в с.к.-смысле. Под интегралом простой функции $X_n(t)$ со значениями $X_n(t) = X_n(t_k)$ на интервалах $t_k \le t < t_{k+1}$ разбиения $\{t_k\}_{n=1}^{k}$ интервала $[a,b]$ будет понимать просто сумму

$$I(X_n) = \sum_{k=1}^{n} X_n(t_k)\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big).$$

Теорема. $X(t), t \in [a,b]$ – с.к.-непрерывна на $[a,b]$, $X(t)$ - неупреждающая функция. Тогда $\exists\{X_n(t)\}$ простых неупреждающих функций $\{X_n(t)\}$, такая, что

$$\int_a^b M|X_n(t) - X(t)|^{2dt} \to 0, n \to \infty,$$

и для которой существует с.к.-предел $I(X_n) \xrightarrow{\text{с.к.}} I, n \to \infty$.

Предел I в теореме выше - стохастический интеграл $X(t)$ по $W(t)$ на $[a,b]$ и обозначается

$$I(X) = \int_a^b X(t)dW(t).$$

Сравнивая $I(X)$ с интегралом от неслучайной функции по случайному процессу, можно видеть, что отличие состоит в паре формальностей: вместо непрерывной подынтегральной функции - непрерывная в среднеквадратичном функция и дополнительно требуется свойство неупреждаемости. Доказывается, что I не зависит от выбора последовательности функций. Поэтому интервал $[a,b]$ можно разбивать равномерно по времени.

Обратим внимание на то, что если в формуле выше значение функции вычислялось бы не в левой точке отрезка $[t_k, t_{л+1}]$, а в любой другой, то значение интеграла изменится. Выберем произвольное $\theta \in [0,1]$, в качестве промежуточной точки возьмем $\tau_k^\theta = (1-\theta)t_k + \theta t_{k+1}$ и рассмотрим интегральную сумму

$$I(X_n) = \sum_{k=1}^{n} X_n(\tau_k^\theta)\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big),$$

при тех же условиях, что ранее, справедливо следующее:

$$I(X_n) \xrightarrow{\text{с.к.}} I^{\theta}, n \to \infty,$$

где I^{θ} зависит от θ и называется стохастическим интегралом. Случай, который рассмотрен выше, получается при $\theta = 0$, и называется **стохастический интеграл Ито**. При $\theta = \frac{1}{2}$ интеграл называется **стохастический интеграл Стратоновича**.

Для вычисления стохастического интеграла помогает формула Ито.

Пусть $\{f(t), t \in [a, b]\}$ и $\{g(t), t \in [a, b]\}$ – неупреждающие, и

$$P\left(\omega: \int_a^b |f(\omega, t)| dt < \infty\right) = 1, P\left(\omega: \int_a^b |g(\omega, t)|^2 dt < \infty\right) = 1.$$

Случайный процесс $X(t), t \in [a, b]$ называется **процессом Ито**, если

$$X(t) = X(0) + \int_a^t f(\omega, s) ds + \int_a^t g(\omega, s) dW(s).$$

Первый интеграл понимается в потраекторном смысле, второй - в смысле стохастического интеграла Ито. Обычно вместо последнего выражения используют запись в «дифференциалах»

$$dX(t) = f(\omega, t) dt + g(\omega, t) dW(t),$$

говоря, что $X(t)$ имеет стохастический дифференциал. Это сокращенная запись предыдущей формулы.

Теорема (**формула Ито**). Пусть $F(t, x)$ - неслучайна, непрерывно дифференцируема по $t \geq 0$ и дважды непрерывно дифференцируема по $x \in R$. Пусть процесс $X(t), t \geq 0$ имеет стохастический дифференциал. Тогда процесс $F(t, X(t)), t \geq 0$ тоже имеет стохастический дифференциал:

$$dF\big(t, X(t)\big) = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + f(\omega, t)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2(\omega, t)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right] dt + \frac{\partial F}{\partial x} g(\omega, t) dW(t).$$

Эту формулу можно записать в более удобном для запоминания виде:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\big(dX(t)\big)^2,$$

если принять $dtdt = 0, dW(t)dt = 0$ и $\left(dW(t)\right)^2 = dt$.

Теорема позволяет очень легко вычислять стохастический интеграл Ито $\int_0^T W(t)dW(t)$. По сути, это поиск $X(t)$, дифференциал которого $W(t)dW(t)$:

$$dX = W(t)dW(t).$$

Задача отыскания $X(t)$ сводится к поиску $F(t, x)$. Положим $F(t, x) = x^2$ и вычислим

$$dF(t, W(t)) = 0 + 2W(t)dW(t) + (dW(t))2 = 2W(t)dW(t) + dt.$$

Как говорилось выше, эта запись является сокращенной формой

$$W^2(t) = W^2(0) + 2\int_0^t W(s)dW(s) + \int_0^t ds,$$

откуда получается значение интеграла.

Стохастическое дифференциальное уравнение Ито

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t)$$

с коэффициентами f, g и начальным значением X_0 – это задача поиска $X(t)$ с $X(0) = X_0$. Решение с почти наверняка непрерывными траекториями называют **сильным решением** уравнения.

Если $f(t, x)$ и $g(t, x)$ достаточно «хорошие», т.е. удовлетворяют локальному условию Липшица:

$\forall n \in N\, \forall x, y \in [-n, n]\, \exists C(n)\, |f(t, x) - f(t, y)| \le C(n)|x - y|$,

$\forall n \in N\, \forall x, y \in [-n, n]\, \exists C(n)\, |g(t, x) - g(t, y)| \le C(n)|x - y|$,

а также условию линейного роста:

$\exists C > 0\, \forall t \ge 0\, \forall x \in R\, |f(t, x)| \le C|x|, |g(t, x)| \le C|x|$,

то сильное решение существует и единственно для любой случайной величины X_0, измеримой относительно $W(0)$.

В качестве примера стохастического дифференциального уравнения:

$$dS(t) = aS(t)dt + \sigma S(t)\, dW(t).$$

Решение $S(t)$ называется процессом Башелье–Самуэльсона. Этот процесс является одной из первых моделей стоимости акций в финансовой математике. С помощью формулы Ито можно проверить, что

$$S(t) = S_0 e^{at} e^{\sigma W(t) - \frac{\sigma^2 t}{2}}.$$

Спектральная теория стационарных (в широком смысле) процессов.

Общие сведения.

Комплекснозначный процесс $Z(t), t \in T$, определенный на вероятностном пространстве (Ω, F, P) - функция $Z(\omega, t) = X(\omega, t) + iY(\omega, t)$, где $i^2 = -1$, $\omega \in \Omega$, $X(t), Y(t)$ –вещественнозначные процессы, определенные для $t \in T$ и принадлежащие вероятностному пространству (Ω, F, P).

Математическое ожидание $Z(t)$ определяется по формуле $MZ(t) = MX(t) + iMY(t)$, где $X(t) = ReZ(t)$, $Y(t) = ImZ(t)$.

Дисперсия $Z(t)$: $DZ(t) = MZ(t)\overline{Z(t)}$, корреляционная функция $R_Z(t, s) = MZ(t)\overline{Z(s)}$.

Матожидание и корреляционная функция комплекснозначного процесса могут принимать комплексные значения. Дисперсия же может принимать только вещественные значения.

$Z(t), t \in T$ второго порядка называется комплекснозначный случайный процесс с $M|Z(t)|^2 < \infty, t \in T$. Множество таких процессов обозначают CL_2, т.е. $X(t) \in CL_2$. Скалярное произведение на CL_2 задается $\langle X, Y \rangle = MXY$.

$Z(t), t \in T$ – **комплекснозначный гауссовский процесс**, если для $\forall n \in N$ и $\forall t_1, \dots, t_n \in T$ вектор $(X(t_1), Y(t_1), \dots, X(t_n), Y(t_n))$, где $X(t) = ReZ(t)$, $Y(t) = ImZ(t)$, имеет нормальное распределение.

Процесс $X(t) \in CL_2$ **стационарный в узком смысле**, если $\forall n \in N$, для $\forall t_1, \dots, t_n$ и $\forall h > 0$ распределение $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ совпадает с распределением $(X(t_1 + h), \dots, X(t_n + h))$.

Иначе говоря, процесс стационарен в узком смысле, если все конечномерные распределения не зависят от сдвига моментов времени на одинаковую величину. Отсюда, для $n = 1$, распределение $X(t)$ совпадает с распределением $X(t + h)$ для $\forall h$, т.е. одномерное распределение не зависит от времени. Это значит, что никакие числовые характеристики одномерного распределения процесса не зависят от времени. Например, матожидание и дисперсия стационарного в узком смысле процесса не зависят от времени: $m_X(t) = const$, $D_X(t) = const$. Что касается двумерного распределения стационарного в узком смысле процесса, то оно зависит лишь от разности $t_2 - t_1$. Следовательно, и все числовые характеристики двумерного распределения (например, корреляционная и ковариационная функции) тоже зависят лишь от разности между t_1 и t_2. Это значит, что существует $R(\tau)$, , что корреляционная функция стационарного в узком смысле процесса $X(t)$ равна $R_X(t_1, t_2) = R(t_2 - t_1)$.
Процесс $X(t) \in CL_2$ **стационарный в широком смысле**, если матожидание не зависит от времени, а корреляционная функция зависит лишь от разности t_1 и t_2. Из того, что корреляционная функция является функцией только разности аргументов, следует, что дисперсия не зависит от времени. Таким образом, дисперсия постоянна как для стационарного в узком смысле процесса (если это процесс второго порядка), так и для стационарного в широком смысле процесса. Как видно из определений, для процессов второго порядка из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле. Вне класса процессов второго порядка это следствие уже не верно, так как определение стационарности в широком смысле предполагает существование вторых моментов сечений процесса. Например, можно рассмотреть процесс $X(t)$, для $\forall t \geq 0$, равного $X(t) = \xi \in C(0, 1)$, где $C(0,1)$ – стандартное распределение Коши с плотностью $f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$.
Такой процесс не зависит от времени, следовательно, является стационарным в узком смысле процессом. Однако, хорошо известно, что распределение

Коши не имеет даже первый момент, поэтому $X(t)$ пространству процессов второго порядка не принадлежит, и понятие стационарности в широком смысле к нему неприменимо.

Итак, простейшим примером стационарного в узком смысле процесса является не зависящий от времени процесс $X(t) = \xi$, где ξ – какая-нибудь случайная величина. Если ξ обладает конечным вторым моментом $M|\xi|2 < \infty$, то процесс $X(t)$ будет стационарным и в широком смысле, потому что является стационарным в узком смысле. Матожидание этого процесса $MX(t) = M\xi$ не зависит от времени, а корреляционная функция $R_X(t, s) = M\xi^2 - (M\xi)^2$ вообще не зависит ни от t, ни от s, поэтому и подавно $R_X(t, s) = R_X(t + h, s + h)$ для любого h. В частности, если $\xi = C = \mathrm{const}$, т.е. это вырожденная случайная величина, принимающая одно значение независимо от исхода, то $MX(t) = C$ и $R_X(t, s) = 0$. А теперь возьмем какую-нибудь случайную величину ξ с конечным вторым моментом $M|\xi|^2 < \infty$ и рассмотрим случайный процесс $X(t) = \xi f(t)$ с какой-нибудь (быть может комплекснозначной) неслучайной и непостоянной функцией $f(t)$. Попробуем выяснить, в каких случаях этот процесс будет стационарным в широком смысле. Математическое ожидание $MX(t) = f(t)M\xi$ не будет зависеть от времени тогда и только тогда, когда $M\xi = 0$, в этом случае $MX(t) = 0$. Корреляционная функция этого процесса равна $R_X(t, s) = MX(t)\overline{X(s)} - MX(t)M\overline{X(s)} = f(t)\overline{f(s)} \cdot M|\xi|^2$. Выясним, в каких случаях $R_X(t, s) = R_X(t + h, s + h)$ для любых t, s и h. Пусть сначала $t = s$, тогда $R_X(t, t) = R_X(t + h, t + h)$ приводит к $|f(t)|^2 = \mathrm{const}$, откуда сразу следует $f(t) = r \exp(i\varphi(t))$ для произвольных ненулевых $r, \varphi(t) \in R$. Предположим дополнительно, что $f(t)$ – всюду непрерывная функция. Функция $R_X(t + h, s + h)$ не будет зависеть от h тогда и только тогда, когда $\varphi(t + h) - \varphi(s + h)$ не будет зависеть от h, т.е. тогда и только тогда, когда $\varphi(t + h) - \varphi(s + h) = \varphi(t) - \varphi(s)$. Без потери общности будем считать, что $s = 0$, и перепишем это выражение в виде $\varphi(t + h) = \varphi(t) + \varphi(h) -$

$\varphi(0)$. Теперь если ввести обозначение $g(t) = \varphi(t) - \varphi(0)$, то мы имеем непрерывную функцию $g(t)$, во всех точках удовлетворяющую уравнению Гамеля $g(t + h) = g(t) + g(h), \forall t, h \in R$. Можно доказать, что решением этого уравнения являются функции вида $g(t) = \omega t$, где $\omega \in R$ – произвольная постоянная, независящая от t. Обозначив $\theta = -\varphi(0)$, мы приходим к выражению для $\varphi(t)$: $\varphi(t) = \omega t + \theta$, где $\omega, \theta \in R$. Итак, мы выяснили, что процесс вида $X(t) = \xi f(t)$ будет стационарным в широком смысле тогда и только тогда, когда $X(t) = \xi \cdot re^{i(\omega t+\theta)}$. Случайная величина ξ может быть и комплекснозначная. Теперь если объединить этот случай с независящими от времени процессами, а число r включить в состав случайной величины ξ, то мы получаем следующее утверждение.

Теорема. $X(t) = \xi f(t)$ для $M|\xi|^2 < \infty$ и непрерывной неслучайной функции $f(t)$ является стационарным в широком смысле тогда и только тогда, когда $X(t) = \xi \exp(i(\omega t + \theta))$ для неслучайных $\omega, \theta \in R$.

Теперь рассмотрим процесс вида $X(t) = \xi_1 e^{i\omega_1 t} + \xi_2 e^{i\omega_2 t}$ с $M\xi_1 = 0$ и $M\xi_2 = 0$ и ненулевыми частотами $\omega_1 \neq \omega_2$ и выясним, при каких условиях этот процесс будет стационарным в широком смысле. Матожидание $MX(t) = 0$ не зависит от времени. Корреляционная функция

$$R_X(t,s) = M|\xi_1|^2 e^{i\omega_1\tau} + M\left(\xi_1\overline{\xi_2}\right)e^{i(\omega_1-\omega_2)t+i\omega_1\tau} +$$
$$+M\left(\xi_2\overline{\xi_1}\right)e^{-i(\omega_1-\omega_2)t+i\omega_2\tau} + M|\xi_2|^2 e^{i\omega_2\tau}$$

где $\tau = t - s$, является функцией лишь τ тогда и только тогда, когда $M(\xi_1\overline{\xi_2}) = M(\xi_2\overline{\xi_1}) = 0$, что следует из линейной независимости функций перед этими коэффициентами. Получаем, что $X(t) = \xi_1 e^{i\omega_1 t} + \xi_2 e^{i\omega_2 t}$ является стационарным в широком смысле тогда и только тогда, когда случайные величины ξ_1 и ξ_2 некоррелированы. Корреляционная функция тогда равна $R_X(t,s) = M|\xi_1|^2 e^{i\omega_1(t-s)} + M|\xi_2|^2 e^{i\omega_2(t-s)}$.

Теорема. Случайный процесс $X(t) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^{i\omega_k t}, \omega_k \neq \omega_m, M\xi_k = 0$, стационарный в широком смысле тогда и только тогда, когда ξ_k попарно некоррелированы. Тогда корреляционная функция равна

$$R_X(t,s) = R(\tau) = \sum_{k=1}^{n} M|\xi_k|^2 e^{i\omega_k\tau}, \tau = t - s.$$

Теперь, когда есть начальные представления о стационарных процессах, можно говорить подробно о природе этих процессов. Выше было показано, что суммы гармоник (комплексных экспонент) дают стационарный процесс тогда и только тогда, когда коэффициенты гармоник являются попарно некоррелированными.

Рассмотрим содержательный пример.

Пусть $X(t) = \xi e^{i\Omega t}$, где ξ и Ω – независимые случайные величины, $M\xi = 0$, $|\xi|^2 < \infty$, ξ – вообще говоря, комплекснозначная случайная величина, Ω – вещественнозначная. Матожидание $MX(t) = M\xi e^{i\Omega t} = M\xi \cdot Me^{i\Omega t} = 0$ из-за независимости случайных величин ξ и Ω (и произвольных функций от них) и условия $M\xi = 0$. Корреляционная функция $R_X(t,s) = MX(t)M\overline{X(s)} = M|\xi|^2 e^{i\Omega(t-s)}$ зависит лишь от разности $t - s$. Отсюда, X(t) является стационарным в широком смысле. Перепишем корреляционную функцию в другом виде. Введем $R_X(\tau) = R_X(t,s), \tau = t - s$, и запишем $R(\tau) = M|\xi|^2 \cdot Me^{i\Omega\tau} = M|\xi|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu\tau} dF_\Omega(\nu), F_\Omega(\nu) = P(\Omega < \nu)$, что равносильно $R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu\tau} d(M|\xi|^2 F\Omega(\nu))$. Если ввести $S(\nu) = M|\xi|^2 F_\Omega(\nu)$, то придем к выражению $RX(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu\tau} dS(\nu)$, где $S(\nu)$ –функция с точностью до произвольного неотрицательного множителя совпадающая с функцией распределения Ω. Если функция одной переменной имеет вид с функцией $S(\nu)$, которая с точностью до неотрицательного множителя совпадает с функцией распределения некоторой случайной величины, то эта функция является корреляционной функцией любого стационарного с.к.-непрерывного процесса $X(t) = \xi e^{i\Omega t}$, для которого $S(\nu) = M|\xi|^2 F_\Omega(\nu)$. Оказывается, справедливо и обратное.

Теорема (Бохнер–Хинчин). Чтобы функция $R(\tau)$ являлась корреляционной функцией некоторого стационарного в широком смысле непрерывного в среднеквадратическом случайного процесса, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в следующем виде:

$$\mathrm{RX}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu\tau} dS(\nu),$$

где $S(\nu) = M|\xi|^2 \cdot P(\Omega < \nu)$ для некоторых случайных величин ξ и Ω. $S(\nu)$ из теоремы выше называется спектральной функцией. Это название оправдано тем, что она представляет, с точностью до множителя, функцию распределения частоты гармоники $e^{i\Omega t}$.

Если $S(\nu)$ абсолютно непрерывна, т.е. если существует неотрицательная функция $\rho(\nu)$ такая, что для $\forall \nu \in R$: $S(\nu) = \int_{-\infty}^{\nu} \rho(\tau)d\tau$, то $\rho(\nu)$ называется **спектральной плотностью**. В этом случае корреляционная функция процесса представима в виде $R_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu t}\rho(\nu)d\nu$. Отметим, что дисперсия $D_X(t) = R_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\nu)d\nu$.

Теорема. Если $R_X(t)$ с.к.-непрерывного процесса абсолютно интегрируема, т.е. $\int_{-\infty}^{+\infty} |R_X(t)|dt < \infty$, то спектральная функция этого процесса обладает непрерывной и ограниченной спектральной плотностью $\rho(\nu)$, причем $\rho(\nu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu t}R_X(t)dt$. Для вещественной функции $R_X(t)$ выражение выше упрощается: $\rho(\nu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos \nu t\, R_X(t)dt$ и $\rho(\nu)$ является четной функцией ν.

Пример. Найдем спектральную функцию случайного процесса с корреляционной функцией, заданной формально как $R_X(t) = \sigma^2\delta(t)$, где $\delta(t)$ – дельта-функция.

Решение. Абстрагируясь от математической строгости, относящейся к теории выше, мы можем записать:

$\rho_X(\nu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\nu t}R_X(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\nu t}\sigma^2\delta(t)dt = \frac{\sigma^2}{2\pi}$.

Хотя, строго говоря, процессов с такой корреляционной функцией не существует, тем не менее эта абстракция оказывается чрезвычайно полезна в приложениях. Процесс с такой формальной корреляционной функцией называется белым шумом. Его особенность в том, что любые два сколь угодно близких сечения процесса являются некоррелированными. Такие процессы называются обобщенными процессами, к ним принадлежит и белый шум.

Мы видели выше, что комплексные гармоники с нулевым математическим ожиданием являются стационарными в широком смысле процессами. Линейные комбинации таких некоррелированных гармоник также являются стационарными процессами. Кроме того, мы видели, что корреляционная функция стационарного процесса представляет собой интеграл («непрерывную сумму») гармоник. Возникает вопрос: можно ли и сам стационарный процесс представить в виде конечной или бесконечной суммы гармоник с некоррелированными коэффициентами? Оказывается, это всегда возможно. Чтобы это продемонстрировать, вернемся к примеру со стационарным процессом $X(t) = \xi e^{i\Omega t}$, где ξ – комплекснозначная случайная величина второго порядка с нулевым математическим ожиданием и Ω – вещественнозначная случайная величина с произвольной функцией распределения $F_\Omega(\nu)$ и не зависящая от ξ. Представим этот процесс в виде интеграла от комплексной экспоненты. Для простоты рассмотрим случай, когда $\xi = 1$ п.н. и $\Omega \in R(0,1)$. Введем процесс $V(\nu) = I(\Omega < \nu)$, где ν выполняет роль времени для случайного процесса $V(\nu)$. В таком случае

$$X(t) = e^{i\Omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu t} dV(\nu).$$

Центрированный случайный процесс $V(t) \in CL_2$ будем называть **процессом с ортогональными приращениями**, если для любых $t_1 < t_2 \le t_3 < t_4$

$$M(V(t_4) - V(t_3))\overline{(V(t_2) - V(t_1))} = 0.$$

Теорема (Крамер). Любому стационарному в широком смысле с.к.-непрерывному случайному процессу $X(t) \in CL_2$ соответствует случайный процесс $V(\nu)$, заданный на том же вероятностном пространстве, что и процесс $X(t)$, с ортогональными приращениями, такой, что с вероятностью единица $X(t) = mX + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu t} dV(\nu)$, $t \in R$, где интеграл понимается как несобственный интеграл в смысле Римана–Стилтьеса, а m_X – математическое ожидание процесса $X(t)$. Процесс $V(\nu)$ определен с точностью до аддитивной случайной величины.

Теорема. Пусть даны стационарный процесс $X(t) \in CL_2$ с спектральной функцией $S_X(\nu)$ и представлением $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu t} dV_X(\nu)$ и комплекснозначная функция $\Phi(\nu)$, удовлетворяющая условию $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(\nu)|^2 dS_X(\nu) < \infty$. Пусть некоторый центрированный стационарный случайный процесс $Y(t) \in CL_2$ допускает представление $Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu t} \Phi(\nu) dV_X(\nu)$. Тогда спектральная функция $S_X(\nu)$ процесса $X(t)$ связана со спектральной функцией $S_Y(t)$ процесса $Y(t)$ соотношением $dS_Y(\nu) = |\Phi(\nu)|^2 dS_X(\nu)$.

Теорема. Если для некоторого $k \geq 0$ существует конечный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \nu^{2k} dS_X(\nu) < \infty$, а процесс $X(t)$ является k раз с.к.-дифференцируемым, то с.к.-производная $X^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu t} (i\nu)^k dV_X(\nu)$, т.е. производную можно вносить под знак стохастического интеграла.

Примеры решения уравнения физики.

Пример. Дана линейная система $a_1\dot{X}(t) + a_0X(t) = Y(t)$ с входным сигналом $Y(t)$ и выходным сигналом $X(t)$. Пусть $MY(t) = 0$ для любого $t \in R$. Считая известной спектральную плотность $\rho_Y(\nu)$ процесса $Y(t)$, вычислить спектральную плотность процесса $X(t)$.

Решение. Будем искать стационарное с.к.-дифференцируемое решение $X(t)$ указанного уравнения. Для этого представим процесс $X(t)$ в виде $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu t} dV_X(\nu)$ и подставим это выражение в уравнение, воспользовавшись теоремой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{a_1 i\nu + a_0})\mathrm{e^{i\nu t} dV_X}(\nu) = \mathrm{Y(t)},$$

предположив, что для искомого решения выполняются условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathrm{a_1 i\nu + a_0}|^2 \mathrm{dS_X}(\nu) < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2 \mathrm{dS_X}(\nu) < \infty.$$

По теореме получаем, что спектральные функции $S_Y(\nu)$ и $S_X(\nu)$ связаны друг с другом соотношением $dS_Y(\nu) = |a_1 i\nu + a_0|^2 dSX(\nu)$, откуда следует

$$\rho_X(\nu) = \frac{\rho_Y(\nu)}{|a_1 i\nu \ + \ a_0|^2} = \frac{\rho_Y(\nu)}{a_1^2\nu^2 + a_0^2}.$$

В результате мы получаем, что если условия выполнены, то спектральная плотность процесса $X(t)$ существует и удовлетворяет этому равенству. Заметим, что для функции оба условия оказываются выполнены. Действительно, условие равносильно условию абсолютной интегрируемости спектральной плотности $\rho_Y(\nu)$, а условие выполнено, как следует из оценки $\frac{\nu^2\rho_Y(\nu)}{a_1^2\nu^2+a_0^2} \leq \frac{1}{a_1^2}\rho_Y(\nu)$ и, опять же, интегрируемости функции $\rho_Y(\nu)$. Заметим, наконец, что в принципе могут существовать решения, которые не удовлетворяют условию. Более того, спектральная плотность не однозначно определяет стационарный процесс. Другими словами, спектральной плотности, которую мы нашли, может соответствовать много разных процессов X(t).

Закрепим предыдущий пример, рассмотрев содержательную задачу из курса физики.

Пример. Рассмотрим колебательный контур, состоящий из последовательно соединенных катушки индуктивности, конденсатора, сопротивления и источника сторонних эдс. Эдс $E(t)$, заряд $q(t)$ на обкладках конденсатора и производные $\dot{q}(t)$, $\ddot{q}(t)$ считаются достаточно с.к.-гладкими стационарными в широком смысле случайными процессами с нулевым математическим ожиданием. Считая известной спектральную плотность $\rho_E(\nu)$ процесса $E(t)$, вычислить спектральную плотность $\rho_q(\nu)$ процесса $q(t)$.

Решение. Уравнение тока в цепи имеет вид:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = E$$

Так как $E(t)$ и $q(t)$ считаются стационарными процессами с нулевым математическим ожиданием, то они могут быть представлены в виде

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\mathrm{t}} \mathrm{dV_E}(\nu)\,, \mathrm{q(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\mathrm{t}} \mathrm{dV_q}(\nu).$$

Теперь вычислим поочередно первую и вторую производную $q(t)$:

$$\dot{q}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{i}\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\mathrm{t}} \mathrm{dV_q}(\nu)\,, \ddot{q}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{i}\nu)^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\mathrm{t}} \mathrm{dV_q}(\nu),$$

в предположении условий

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathrm{i}\nu|^2 \mathrm{dS_X}(\nu) < \infty, \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathrm{i}\nu|^4 \mathrm{dS_X}(\nu) < \infty.$$

Подставляя выражения для $q(t)$, $\dot{q}(t)$ и $\ddot{q}(t)$ в исходное уравнение, мы получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\mathrm{L}(\mathrm{i}\nu)^2 + \mathrm{R}(\mathrm{i}\nu) + \mathrm{C}^{-1}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\mathrm{t}} \mathrm{dV_q}(\nu) = \mathrm{E(t)}.$$

Теперь предположим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\mathrm{L}(\mathrm{i}\nu)^2 + \mathrm{R}(\mathrm{i}\nu) + \mathrm{C}^{-1}] \mathrm{dS_q}(\nu) < \infty.$$

Тогда по теореме получаем, что спектральные функции $S_q(\nu)$ и $S_E(\nu)$ связаны соотношением

$$dS_E(\nu) = |L(i\nu)^2 + \mathrm{R}(\mathrm{i}\nu) + \mathrm{C}^{-1}|^2 dS_q(\nu),$$

что означает существование спектральной плотности

$$\rho_q(\nu) = \frac{\rho_E(\nu)}{|L(i\nu)^2 + R(i\nu) + C^{-1}|^2}.$$

Легко видеть, что условия для этой функции выполнены.

Итак, среди всех достаточно с.к.-гладких стационарных в широком смысле процессов, удовлетворяющих условиям, решения исходного уравнения (если существуют) обладают спектральной плотностью, записанной выше.

Рассмотрим пример, на котором можно проследить некоторые особенности поведения линейных систем под воздействием случайных колебаний. Именно, рассмотрим движение маятника (при наличии трения) большим периодом собственных колебаний, которое описывается уравнением

$$x''(t) + 2hx'(t) + \omega_0{}^2 x(t) = 0$$

и в явном виде описывается функцией

$$x(t) = Ae^{-ht} sin(\omega t + \theta), \omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - h^2};$$

спектральная характеристика такой системы есть

$\omega(i\lambda) = \frac{1}{(i\lambda)^2 + 2(i\lambda) + \omega_0{}^2}$.

Предположим, что эта система находится на корабле, и пусть частота собственных колебаний маятника много меньше частоты Ω качки корабля: $\omega \ll \Omega$; в результате качки на маятник воздействуют случайные толчки, возникающие приблизительно через малые промежутки времени $\Delta t \sim \frac{\pi}{\Omega}$. Если считать внешнее возмущение "белым шумом", то установившееся движение маятника будет представлять собой стационарный процесс $\xi(t)$со спектральной плотностью вида

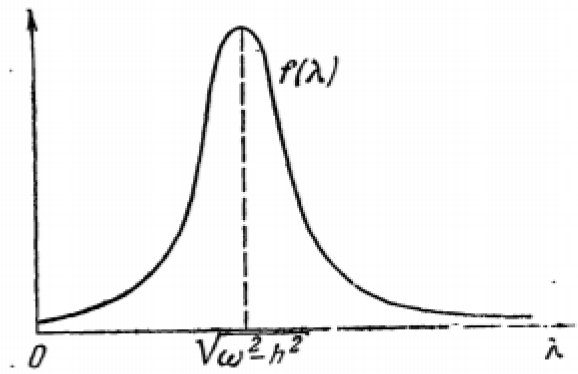


Рис. 10. Общий вид спектральной плотности.

$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |\phi(i\lambda)|^2$.

Напомним, что спектральная плотность характеризует распределение энергии случайного процесса $\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\Phi(\lambda)$по составляющим его "элементарным колебаниям" в зависимости от частоты λ, а именно, средняя амплитуда случайных колебаний, заданных стохастическим интегралом $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{i\lambda t} d\Phi(\lambda)$, равна $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda) d\lambda$. В нашем случае спектральная плотность есть

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{(\lambda^2 - {\omega_0}^2)^2 + 4h^2\lambda^2};$$

она имеет максимум при $\lambda^2 = \omega^2 - h^2$ (резко выраженный для малого "коэффициента трения" h) и довольно быстро убывает при удалении от точки максимум (рис).

Это говорит о том, что в случайном процессе $\xi(t)$ резко преобладают "элементарные колебания" с частотами, близкими к собственной частоте ω рассматриваемой системы.

Для сравнения отметим, что если считать внешнее воздействие (от качки корабля) гармоническим колебанием частоты Ω, то маятник при установившемся движении будет совершать вынужденные колебания с этой частотой Ω, что качественно отличается от полученного выше результата.

Заключение.

В работе рассмотрены основные теоретические выкладки спектральной теории стационарных в широком смысле случайных процессов. Установлено существование решения стохастического линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Показан пример решения уравнения физики со стационарной правой частью с помощью спектральной формулы.

Список литературы.

1. Бузун Н.О., Гасников А.В., Гончаров Ф.О., Горбачев О.Г., Гуз С.А., Крымова Е.А., Натан А.А., Черноусова Е.О. Стохастический анализ в задачах. Ч. 1 / под ред. А.В. Гасникова. Москва : МФТИ, 2016. 212 с.

2. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. Москва : Наука, 1996. 400 с.

3. Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М. Случайные процессы: учеб. для вузов / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. Москва : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 448 с.

4. Гардинер К.В. Стохастические модели в естественных науках. Москва : Мир, 1986. 591 с.

5. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. Москва : Наука, 1977. 568 с.

6. Кингман Дж. Пуассоновские процессы. Москва : МЦНМО, 2007. 136 с.

7. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. Москва : Наука, 1974.

8. Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. Москва : Физматлит, 2002. 320 с.

9. Розанов Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. Москва : Наука, 1985. 320 с.