Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет
(Национальный исследовательский университет) »

Институт естественных и точных наук
Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра математического анализа и МПМ

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент
к. пед. наук
_______/Н.Н. Овчинникова/
“_____” _________ 2020 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой,
д.ф.-м.н., доцент
___________/В.Л. Дильман/
“_____” _________ 2020 г.

Методические особенности преподавания темы «Теория чисел» в спецкурсе по математике для школьников

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

ЮУрГУ – 01.03.01–2020–306-01–134. ВКР

Руководитель работы

Зав. кафедрой д.ф.-м.н.,
доцент
___________/ В.Л. Дильман /
“_____” __________2020 г.

Автор
Студент группы ИЕТН-415
_________/А.В.Мухлынин /
“_____” _________ 2020 г.

Нормоконтролер
К. ф.-м. н., доцент
___________/М.А. Корытова /
“____” __________ 2020 г.

Челябинск
2020

УДК 51(07)

Мухлынин А.В.

Методические особенности преподавания темы «Теория чисел» в спецкурсе по математике для школьников./ А.В. Мухлынин. – Челябинск, 2020. – 57 с.

Выпускная квалификационная работа направлена на методику изучения школьниками базовой основы теории чисел, развитие у учеников математического мышления, подготовку их к участию в олимпиадах, а также развитие интереса к дальнейшей учёбе. Курс ориентирован на подростков определённого возраста и учитывает особенности этого этапа взросления, путём корректной нагрузки в период его прохождения.

Список лит. – 14 назв.

Оглавление

Введение

Такая наука, как арифметика зародилась ещё в очень глубокой древности, и является старейшей отраслью математики. Научным обобщением арифметики можно назвать теорию чисел. Интерес во все времена был повышен к теории чисел, а результатами теории чисел и арифметики, полученными древними учеными, активно пользуются и по сей день. К середине двадцатого и в начале двадцать первого века существенно изменилась роль теории чисел. Если в предыдущие три века она была прекраснейшем разделом математики, приковывающая внимание лучших математиков своего времени, таких как Ферма, Эйлер, Лагранж, Гаусс, Риман, Гильберт, то с появлением вычислительной техники теория чисел нашла многочисленное применение при обработке, передаче и защите информации, конвертируемой в числовом виде.

Теория чисел появилась в 399 году до н. э. В основе теории лежит алгоритм Евклида для нахождения общего наибольшего делителя двух чисел.

Предлагаемый элективный курс ориентирован для применения с 6 по 9 класс в школах с углублённым изучением математики, в общей степени направлен на развитие абстрактного мышления и прививание любви алгебре в целом.

Этот курс поможет обеспечить необходимую мотивацию учащихся для более осознанного и глубокого познания таких предметов как алгебра в часности, так и математика в целом. Курс рассмотрен для изучения элементов высшей алгебры в математической школе. Методика обучения на элективных курсах, в профильных классах, должна постепенно развивать у учеников обширные навыки организации самообразования, умственного труда. В задачах курса разработан план по развитию смекалки, наблюдательности, а, главное, умение логически рассуждать. В этих же задачах задействованы основополагающие мыслительные операции, такие как синтез, анализ и чуть ли не самое важное предвидение, которое способствует развитию творческого мышления в целом. Здесь и умение достаточно быстро конспектировать, и что более важно улавливать объясняемый учителем материал, также умение работать с учебниками и любой другой литературой. Помимо всего учащиеся смогут научиться решать простые задачи из этого курса, в дальнейшей жизни то умение, которое они приобретут понадобится им для обучения в ВУЗах. Курс позволяет развивать умения учащихся решать задачи в нестандартных ситуациях и мыслить.

Привлечение детей младшего и среднего школьного возраста к творческой интеллектуальной деятельности наталкивается на ряд проблем не только методического и организационного характера, но и трудностей, связанных с возрастными физическими, психологическими и интеллектуальными особенностями ребенка. Обучение должно быть ненавязчивым, категорически ненасильственным, желательно веселым и спортивным. Хорошо, когда занятия превращаются в совместное творчество ученика и учителя (не только совместное решение, но и придумывание задач учителем и учеником).

Важной и трудной задачей педагога, работающего с ребенком 10-16 лет, является воспитание у последнего устойчивого интереса к умственной деятельности. Эффективным средством тренировки в творческой работе школьников является систематическое решение ими нестандартных в том числе олимпиадных, задач по математике. Это развивает у учащихся потребность в творческом мышлении, повышает их культуру, усиливает их инициативность и самостоятельность. Такие задачи можно решать на математических кружках, использовать их в различных конкурсах, олимпиадах, викторинах. Особенно эффективно их использование в летних математических лагерях, где сочетание занимательного отдыха и изучение предмета не отвлекается необходимостью посещать другие занятия и делать домашние задания.

Актуальность темы работы

Как было отмечено, задача развития опыта интеллектуальной творческой деятельности у школьника является во всем мире одной из наиболее актуальных задач образования. Решение логических задач, а к ним можно отнести и задачи по теории числел, является интересным примером такой работы школьников. что делает актуальными подготовку сборника занимательных задач по теории чисел и методику работы с ним. Этот сборник задач поможет дать базовое понимание ученикам средней школы основных аспектов по курсу «теория чисел», познакомит с логикой решения как наиболее характерных задач, так и более оригинальных. Работа сделана с целью облегчить поиск и решение задач, как учителям, преподающим в центрах и школах с углублённым изучением математики, так и трудолюбивым и усердным ученикам, которые решили разобраться в теме самостоятельно.

Практическая значимость работы

Подготовленный сборник задач, решения к ним могут быть использованы во внеклассной работе при изучении математики (математические кружки, летние математические школы, центры и т.д.).

Цель работы

Цель работы: подготовить пособие, которое могло бы сформировать у учащихся представление об элементах теории чисел, привить любовь к математике путём разбирания интересных задач, способствовать развитию абстрактного мышления, стимулировать творческую активность учащихся.

Для реализации поставленной цели следовало решить *задачи*:

1. Изучение литературы по олимпиадной математике для школьников младшего и среднего звена;
2. Подготовка и редактирование сборника задач;
3. Поиск и решение интересных примеров;
4. Подготовка методических указаний к решениям задач из сборника;
5. Подбор задач необходимой сложности;

На самом деле алгебра может быть не такой монотонной, как ее привыкли преподавать или изучать в школе, для её постижения необходимы как вычислительные навыки, так и знание базовых теорем и определений, а также абстрактное мышление.

Предполагаемыми результатами усвоения данной программы учащимися могут стать набор определенных умений, обширно связанных с математикой, вдобавок к приобретению опыта исследовательской деятельности., После полного освоения данного материала, у учащихся проводится срез знаний, путём проведения контрольной работы, и сдачи зачета по теории.

План занятий

Класс	**Количество занятий**
6-7 класс	5 занятий
8-9 класс	5 занятий

6-7 класс

№	Тема	Количество часов
1	Метод от противного	2
2	Простые и разложение на простые	3
3	Простые и составные числа	2
4	Делимость целых чисел и остатки	3
5	Уравнения в целых числах	2
6	НОД и НОК	3

8-9 класс

№	Тема	Количество часов
1	Метод от противного	2
2	Простые и разложение на простые	3
3	Простые и составные числа	2
4	Делимость целых чисел и остатки	3
5	Уравнения в целых числах	2
6	НОД и НОК	3

Модель занятия

10 минут	Повтор предыдущей темы
15 минут	Разбор примеров по новой теме
5 минут	Разминка
15 минут	Разбор примеров по новой теме
20 минут	Решение задач
5 минут	Разминка
20 минут	Решение задач

Рассмотрим примеры решения задач по основным темам курса

НОД и НОК

Примеры, рекомендованные для 6-7 классов:

1. Условие

С 1 сентября четыре школьника начали посещать кинотеатр. Первый бывал в нём каждый четвёртый день, второй – каждый пятый, третий – каждый шестой и четвёртый – каждый девятый. Когда второй раз все школьники встретятся в кинотеатре?

Подсказка

НОК(4, 5, 6, 9) = 180.

Ответ: Через 180 дней (28 февраля)

2. Условие

Докажите, что следующие дроби несократимы при всех натуральных значениях n:

а) $(2n + 13)/ (n + 7)$; б) $(2n^2 – 1)/(n + 1)$; в) $(n^2 – n + 1)/(n^2 + 1)$.

Решение

а) $2(n + 7) – (2n + 13) = 1$, значит, НОК$(2n + 13, n + 7) = 1$.

б) $2n^2 – 1 – 2(n + 1)(n – 1) = 1$, значит, НОК$(2n^2 – 1, n + 1) = 1$.

в) $n^2 + 1 – (n^2 – n + 1) = n$, НОК$(n^2 + 1, n) = 1$, значит,
НОК$(n^2 + 1, n^2 – n + 1) = 1$

Примеры рекомендованные для 8-9 классов:

1.Условие

Докажите, что если $(a, b) = 1$, то наибольший общий делитель чисел $a + b$ и $a^2 + b^2$ равен 1 или 2.

Решение

Пусть $d = (a^2 + b^2, a + b)$. Числа $a + b$ и ab взаимно просты. Значит, $(a + b, 2ab) = 1$ или 2. Число $2ab = (a + b)^2 – (a^2 + b^2)$ делится на d. Следовательно, $(a + b, 2ab)$ делится на d.

2.Условие

Числа от 1 до 1000 выписаны подряд по кругу. Начиная с первого, вычёркивается каждое 15-е число: 1, 16, 31, ..., причём при повторных оборотах зачёркнутые числа считаются снова. Число оборотов не ограничено. Сколько чисел останутся незачёркнутыми?

Подсказка: Можно считать, что выписаны числа от 0 до 999. Тогда будут вычеркнуты все числа, кратные НОД(1000, 15) = 5.

Ответ 800.

Делимость целых чисел и остатки

Примеры рекомендованные для 6-7 классов:

1. Условие a, b, c – целые числа, причём $a + b + c$ делится на 6. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3$ тоже делится на 6.

Решение $x^3 \equiv x \pmod 6$

2.Условие

Докажите, что $n^3 - n$ делится на 24 при любом нечётном n.

Подсказка: Докажите, что указанное число делится и на 3, и на 8.

Решение

$n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$. Из трёх последовательных чисел одно делится на 3. $n - 1$ и $n + 1$ – последовательные чётные числа. Поэтому одно из них не только чётно, но и делится на 4. Значит, всё произведение делится на $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$.

Примеры рекомендованные для 8-9 классов:

1. Условие

Делится ли на 9 число 1234...500? (В записи этого числа подряд выписаны числа от 1 до 500.)

Решение:

Это число сравнимо с суммой $1 + 2 + ... + 500 = 500 \cdot 501 : 2 \equiv 250 \cdot 6 = 1500 \equiv 6$

(mod 9).

Ответ: Не делится.

1. Условие

Докажите, что число 11...1 (1986 единиц) имеет по крайней мере

а) 8; б) 32 различных делителя.

Решение

а) 8 делителей можно найти среди чисел вида 11...1 (n единиц), выбирая n = 1, 2, 3, 6, 331, 662, 993. б) Воспользуйтесь равенством $111111 = 1001 \cdot 111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$.

Простые и составные числа

Примеры рекомендованные для 6-7 классов:

1.Условие

а) Докажите, что $p^2 - 1$ делится на 24, если p – простое число и $p > 3$.

б) Докажите, что $p^2 - q^2$ делится на 24, если p и q – простые числа, большие 3.

Решение

а) Число $p^3 - p = p(p^2 - 1)$ делится на 24. Но простое число p ни на 2, ни на 3 не делится. Поэтому $p^2 - 1$ делится на 24.

б) $p^2 - q^2 = (p - q)(p + q)$. $p - q$ и $p + q$ – чётные числа, причём их разность $2q$ не кратна 4. Значит, одно из этих чисел делится на 4.

$2q$ также не кратно 3, значит, $p - q$ и $p + q$ дают разные остатки при делении на 3. Если бы ни одно из этих чисел не было кратно 3, то сумма

$(p - q) + (p + q) = 2p$ делилась бы на 3. Но это не так. Поэтому

$(p - q)(p + q)$ делится на $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$.

2. **Условие**

Докажите, что числа а) $2^{32001} + 1$; б) $2^{32001} - 1$ – составные.

Решение

$2^{3k} + 1$ делится на $2^k + 1$, $2^{3k} - 1$ делится на $2^3 - 1 = 7$.

Примеры рекомендованные для 8-9 классов:

Условие

Докажите, что $p_{n+1} \leq 2^{2n} + 1$, где p_n – n-е простое число.

Решение:

Число $2^{2n} - 1$ имеет n различных простых делителей, причём все они отличны от 2. Поэтому $p_{n+1} \leq 2^{2n} - 1$ при $n > 0$.

Метод от противного

Пример рекомендованный для 6-7 классов:

Условие Существует ли целое число, произведение цифр которого равно 594?

Решение:

Разложим число 594 на простые множители: $594=2\cdot3^3\cdot11$. Пусть это произведение цифр какого-то целого числа, но ведь никакая цифра не содержит в своем разложении на простые множители число 11 существует.

Ответ: Не(цифры – это: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0). Следовательно, такого числа не существует

Пример рекомендованный для 8-9 классов:

Произведение двух натуральных чисел, каждое из которых не делится нацело на 10, равно 10000. Найдите сумму этих чисел.

Решение:

Так как 10000=$2^4 \cdot 5^4$, то каждое из чисел может содержать в своем разложении на простые множители только 2 и 5. Заметим, что если число одновременно содержит и двойку и пятерку в своем разложении, то оно делится на 10, что противоречит условию. Поэтому одно число содержит только двойки и значит оно равно 2^4=16, а второе число содержит только пятерки и значит оно равно 5^4=625. Тогда сумма этих чисел равна 16+625=641.

Ответ: 641.

Уравнения в целых числах

Пример рекомендованный для 6-7 классов:

1. Условие

Решите в натуральных числах уравнение:

а) $x^2 - y^2 = 31$;

б) $x^2 - y^2 = 303$.

Подсказка: Разложите левую часть на множители.

Решение: $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

а) Так как произведение равно простому числу 31, то больший множитель равен 31, а меньший – 1. Итак, $x - y = 1$, $x + y = 31$, откуда $x = 16$, $y = 15$.

б) $303 = 1 \cdot 303 = 3 \cdot 101$. Имеем два случая.

1) $x - y = 1$, $x + y = 303$, откуда $x = 152$, $y = 151$.

2) $x - y = 3$, $x + y = 101$, откуда $x = 52$, $y = 49$.

Ответ: а) (16, 15); **б)** (152, 151), (52, 49).

2.Условие

Доказать, что число $2 + 4 + 6 + ... + 2n$ не может быть

а) квадратом; **б)** кубом целого числа.

Решение:

а) $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1)$. Так как числа n и $n + 1$ взаимно просты, то оба они – квадраты. Но соседние натуральные числа квадратами быть не могут.

б) Аналогично а).

Примеры рекомендованный для 8-9 классов:

1. Условие

Из квадратного листа бумаги в клетку, содержащего целое число клеток, вырезали квадрат, содержащий целое число клеток так, что осталось 124 клетки. Сколько клеток мог содержать первоначальный лист бумаги?

Решение:

Задача сводится к решению в натуральных числах уравнения $x^2 - y^2 = 124$, которое можно переписать в виде $(x - y)(x + y) = 124$. Хотя бы один из множителей левой части чётен, поэтому x и y имеют одинаковую четность, значит, оба числа $x - y$ и $x + y$ чётны. Единственный способ разложить число 124 на два чётных сомножителя – это $2 \cdot 62$. Значит сумма чисел x и y равна 62, а разность – 2, откуда $x = 32$, $y = 30$.

Ответ: $32^2 = 1024$ клетки

2. Условие

Найти все целые натуральные решения уравнения $(n + 2)! – (n + 1)! – n! = n^2 + n^4$.

Решение 1: Уравнение можно записать в виде $n!((n + 2)(n + 1) – (n + 1) – 1) = n^2(n^2 + 1)$, или $n!(n + 2)n = n^2(n^2 + 1)$.

Проверка показывает, что $n = 1$ не является решением.

Пусть $n > 1$. Запишем уравнение в виде $(n – 2)!(n + 2)(n – 1) = (n^2 + 1)$. Отсюда $n^2 + 1 \geq (n + 2)(n – 1)$. Раскрывая скобки, получим $n \leq 3$. Проверка показывает, что $n = 2$ не подходит, а $n = 3$ – решение.

Решение 2: Перепишем уравнение в виде $n! = {}^{n(n^2+1)}/_{n+2} = n^2 – 2n + 5 – {}^{10}/_{n+2}$. Последняя дробь будет целым числом при $n = 3$ и $n = 8$, но последнее число решением не является.

Ответ: $n = 3$.

Простые и разложение на простые

Примеры рекомендованный для 6-7 классов:

1. Условие

Произведение двух натуральных чисел, каждое из которых не делится нацело на 10, равно 1000. Найдите их сумму.

Решение: Так как $1000 = 5^3 \cdot 2^3$, то каждое из чисел в своем разложении на простые множители может содержать только двойки и пятёрки. При этом оба этих множителя не могут присутствовать в разложении одного числа, иначе оно будет делиться на 10.

Следовательно, одно из чисел равно 5^3, а другое – 2^3, а их сумма равна $5^3 + 2^3 = 125 + 8 = 133$.

Ответ: 133.

2. Условие

Сколько двоек будет в разложении на простые множители числа 1984! ?

Решение:

Среди чисел от 1 до 1984 есть 992 чётных. Каждое из них дает по крайней мере одну двойку в разложение на простые множители числа 1984!. Две двойки в это разложение дадут числа, делящиеся на 4 (их всего 496). Далее, по 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 двоек соответственно дадут 248, 124, 62, 31, 15, 7, 3 и 1 число, делящиеся на 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 и 1024 соответственно. Сложив результаты, мы и получим искомое количество двоек:

$992 + 496 + 248 + 124 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 1979$.

Ответ: 1979 двоек

Примеры рекомендованный для 8-9 классов:

1. Условие

Докажите, что нечётное число, являющееся произведением n различных простых сомножителей, можно представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел ровно 2^{n-1} различными способами.

Подсказка: 2^{n-1} – это число способов разбить множество из n простых сомножителей на два подмножества.

Решение: Пусть $m = p_1p_2...p_n$, где $p_1, p_2, ..., p_n$ – различные нечётные простые числа. Будем решать уравнение $x^2 – y^2 = m$ в натуральных числах. Это уравнение приводится к виду $(x – y)(x + y) = p_1p_2...p_n$, откуда следует, что сомножитель $x – y$ есть произведение нескольких чисел (возможно ни одного, в этом случае $x – y = 1$) из набора $p_1, p_2, ..., p_n$, а сомножитель $x + y$ есть произведение оставшихся чисел из этого набора. При этом сомножителю $x – y$ соответствует меньшее произведение. Таким образом, каждому решению (x, y) соответствует разбиение множества из n чисел на два подмножества.

Наоборот, пусть есть некоторое разбиение чисел $p_1, p_2, ..., p_n$ на два подмножества. Обозначим через t и s $(t < s)$ произведения чисел в этих подмножествах $(t \neq s,$ поскольку числа $p_1, p_2, ..., p_n$ различны). Тогда найдётся единственная пара натуральных чисел $(x, y) = \left(\frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2}\right)$, для которой $x – y = t$ и $x + y = s$ (x и y натуральные, так как t и s нечётны).

Итак, число представлений m в виде разности квадратов двух натуральных чисел равно числу способов разбить множество из n элементов на два подмножества, то есть $2^{n–1}$ (в два раза меньше числа 2^n всех подмножеств).

2. Условие

Сколько существует целых чисел от 1 до 16500, которые

а) не делятся на 5;

б) не делятся ни на 5, ни на 3;

в) не делятся ни на 5, ни на 3, ни на 11?

Решение:

а) Разобьём все числа на 16500 : 5 = 3300 пятерок последовательно идущих чисел. В каждой пятерке одно число делится на 5, а 4 – не делятся. Поэтому всего 4·3300 = 13200 чисел не делятся на 5.

б) 3300 чисел делятся на 5. Аналогично 16500 : 3 = 5500 чисел делятся на 3. Из них 16500 : 15 = 1100 делятся на 15, то есть и на 5, и на 3. Они были сосчитаны дважды. Всего на 5 или на 3 делятся 3300 + 5500 – 1100 = 7700, а не делятся 16500 – 7700 = 8800 чисел.

в) На 11 делятся 16500 : 11 = 1500 чисел, на 5 и на 11 – 16500 : 55 = 300 чисел, на 3 и на 11 – 16500 : 33 = 500 чисел, на 3, на 5 и на
11 – 300 : 3 = 100 чисел.
По формуле включения-исключения всего на 3, на 5 или на 11 делятся 5500 + 3300 + 1500 – 1100 – 500 – 300 + 100 = 8500 чисел, а не делятся ни на одно из этих чисел 16500 – 8500 = 8000 чисел.

Ответ: а) 13200; б) 8800; в) 8000 чисел

Сборник

1. Решить в целых числах уравнение: $x^2 - xy - 2y^2 = 7$

Решение:

Запишем уравнение в виде $(x - 2y)(x + y) = 7$.

Так как x, y – целые числа, то находим решение исходного уравнения, как решения следующих четырех систем:

1) $x - 2y = 7, x + y = 1;$
2) $x - 2y = 1, x + y = 7;$
3) $x - 2y = -7, x + y = -1;$
4) $x - 2y = -1, x + y = -7;$

Решив эти системы, получаем решения уравнения: $(3;\ -2), (5; 2), (-3; 2)$ и $(-5; -2)$.

Ответ: $(3, -2), (5; 2), (-5;\ -2)$.

2. Докажите, что любое простое число, большее 3, можно записать в одном из двух видов: 6n + 1 либо 6n – 1, где n – натуральное число.

Подсказка

Какие остатки при делении на 6 может давать простое число, большее 3?

Решение:

Простое число, большее 3, при делении на 6 не может давать остатки 0, 2, 3, 4 – в любом из этих случаев оно будет составным. Возможны только остатки 1 и 5

3. Решить в целых числах уравнение:

$$a)\ 20x + 12y = 2013;$$
$$\text{б})\ 5x + 7y = 19;$$
$$\text{в})\ 201x - 1999y = 12.$$

Решение:

а) Поскольку при любых целых значениях x и y левая часть уравнения делится на два, а правая нечётным числом, то уравнение не имеет решений в целых числах.

Ответ: решений нет.

б) Подберем сначала некоторое конкретное решение. В данном случае, это просто, например, $x_0 = 1, y_0 = 2$. Тогда $5x_0 + 7y_0 = 19$, откуда

$5(x - x_0) + 7(y - y_0) = 0,$

$$5(x - x_0) = -7(y - y_0).$$

Поскольку простые числа 5 и 7 взаимно простые, то

$$x - x_0 = 7k, y - y_0 = -5k.$$

Значит, общее решение:

$$x = 1 + 7k, y = 2 - 5k,$$

где k – произвольное целое число.

Ответ: $(1 + 7k; 2 - 5k)$, где k – целое число.

в) Найти некоторое конкретное решение подбором в данном случае достаточно сложно. Воспользуемся алгоритмом Евклида для чисел 1999 и 201:

НОД (1999, 201) = НОД (201, 190) = НОД (190, 11) = НОД (11, 3) = НОД (3, 2) = НОД (2, 1) = 1.

Запишем этот процесс в обратном порядке:

$1 = 2 – 1 = 2 – (3 – 2) = 2\cdot 2 – 3 = 2\cdot (11 – 3\cdot 3) – 3 = 2\cdot 11 – 7\cdot 3 = 2\cdot 11 – 7(190 – 11\cdot 17) =$

$= 121\cdot 11 – 7\cdot 190 = 121(201 – 190) – 7\cdot 190 = 121\cdot 201 – 128\cdot 190 =$

$= 121\cdot 201 – 128(1999 – 9\cdot 201) = 1273\cdot 201 – 128\cdot 1999.$

Значит, пара (1273, 128) является решением уравнения $201x – 1999y = 1$. Тогда пара чисел

$x_0 = 1273\cdot 12 = 15276$, $y_0 = 128\cdot 12 = 1536$

является решением уравнения $201x – 1999y = 12$.

Общее решение этого уравнения запишется в виде

$x = 15276 + 1999k$, $y = 1536 + 201k$, где k – целое число,

или, после переобозначения (используем, что $15276 = 1283 + 7\cdot 1999$, $1536 = 129 + 7\cdot 201$), x = 1283 + 1999n, y = 129 + 201n, где n – целое число.

Ответ: (1283+1999n, 129+201n), где n – целое число.

4. Решить в целых числах уравнение:

а) $x^3 + y^3 = 3333333$;

б)$x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$.

Решение:

а) Так как x^3 и y^3 при делении на 9 могут давать только остатки 0, 1 и 8, то $x^3 + y^3$ может давать только остатки 0, 1, 2, 7 и 8. Но число 3333333 при делении на 9 дает остаток 3. Поэтому исходное уравнение не имеет решений в целых числах.

Ответ: целочисленных решений нет.

б) Перепишем исходное уравнение в виде

$$(x + y)^3 = 7(x^2y + xy^2) + 4.$$

Так как кубы целых чисел при делении на 7 дают остатки 0, 1 и 6, но не 4, то уравнение не имеет решений в целых числах.

Ответ: целочисленных решений нет.

5. Решить в целых числах уравнение $x + y = x^2 - xy + y^2$.

Решение:

Рассмотрим данное уравнение как квадратное уравнение относительно x: $x^2 - (y + 1)x + y^2 - y = 0$.

Дискриминант этого уравнения равен $-3y^2 + 6y + 1$. Он положителен лишь для следующих значений y: 0, 1, 2. Для каждого из этих значений из исходного уравнения получаем квадратное уравнение относительно x, которое легко решается.

Ответ: (0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 2), (2; 1), (2;2).

6. Сформулируйте и докажите признак делимости на

а) степень основания системы счисления (аналогичный признакам делимости на 100, 1000, ...).

б) делитель основания системы счисления (аналогичный признакам делимости на 2 и на 5).

Ответ:

а) В n-ичной системе счисления запись числа заканчивается k нулями тогда и только тогда, когда это число делится на nk.

б) Пусть m – делитель n. Последняя цифра n-ичной записи числа делится на m тогда и только тогда, когда само число делится на m.

7. Очень скучно смотреть на черно-белый циферблат, поэтому Клайв ровно в полдень закрасил число 12 красным цветом и решил через каждые 57 часов закрашивать текущий час в красный цвет.

а) Сколько чисел на циферблате окажутся покрашенными?

б) Сколько окажется красных чисел, если Клайв будет красить их каждый 1913-й час?

Решение:

а) Поскольку НОД(12, 57) = 3, то красным окажется каждый третий час: 12, 3, 6 и 9 часов.

б) Так как НОД(12, 1913) = 1, то все числа на часах окажутся красными. (Произойдёт это, правда, почти через 3 года.)

Ответ: **а)** 4 числа; **б)** все 12 чисел.

8. Существуют ли такие десять попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя

а) ровно в шесть раз;

б) ровно в пять раз?

Решение:

а) Например, 1, 2, ..., 9, 15. Сумма их равна 60, среднее арифметическое – 6, а НОД равен 1.

б) Пусть НОД десяти чисел $a1 < a2 < ... < a10$ равен d. Тогда $a1 \geq d$, $a2 \geq 2d$, ..., $a10 \geq 10d$. Значит, сумма этих чисел не меньше 55d, а среднее арифметическое не меньше 5,5d.

Ответ: **а)** Существуют; **б)** не существуют.

9. Существуют ли бесконечное число троек целых чисел x, y, z таких, что $x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3$?

Решение:

Попробуем подбирать такие тройки, где $y = -z$. Тогда y^3 и z^3 будут всегда взаимно уничтожаться, и наше уравнение будет иметь вид $x^2 + 2y^2 = x^3$

Или, иначе, $x^2(x - 1) = 2y^2$.

Чтобы пара целых чисел (x; y) удовлетворяла этому условию, достаточно, чтобы число $x - 1$ было удвоенным квадратом целого числа. Таких чисел много, а именно, это все числа вида $2n^2 + 1$. Подставляя в $x^2(x-1) = 2y^2$ такое число, после несложных преобразований получаем: $y = xn = n(2n^2+1) = 2n^3 + n$.

Все тройки, полученные таким образом, имеет вид $(2n^2+1; 2n^3+n; \, -2n^3 - n)$.

Ответ: существует.

10. Найдите такие целые числа x, y, z, u, что $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 2xyzu$.

Решение:

Число $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ четно, поэтому среди чисел x, y, z, u четное число нечетных чисел. Если все четыре числа x, y, z, u нечетны, то $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ делится на 4, но при этом $2xyzu$ не делится на 4 – несоответствие.

Если ровно два из чисел x, y, z, u нечетны, то $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ не делится на 4, а $2xyzu$ делится на 4 – опять несоответствие. Поэтому все числа x, y, z, u четны. Тогда можно записать, что $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1, u = 2u_1$,

и исходное уравнение примет вид: $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 = 8x_1y_1z_1u_1$.

Теперь заметим, что $(2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1$ при делении на 8 дает остаток 1. Поэтому если все числа x_1, y_1, z_1, u_1 нечетны, то $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2$ не делится на 8. А если ровно два из этих чисел нечётно, то $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2$ не делится даже на 4. Значит, $x_1 = 2x_2, y_1 = 2y_2, z_1 = 2z_2, u_1 = 2u_2$, и мы получаем уравнение $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + u_2^2 = 32x_2y_2z_2u_2$.

Снова повторив те же самые рассуждения, получим, что x, y, z, u делятся на 2^n при всех натуральных n, что возможно лишь при x=y=z=u=0.

Ответ: (0; 0; 0; 0).

11. Докажите, что уравнение $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=30$
не имеет решений в целых числах.

Решение:

Воспользуемся следующим тождеством:

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x).$$

Тогда исходное уравнение можно записать в виде $(x-y)(y-z)(z-x)$=10.

Обозначим $a=x-y, b=y-z, c=z-x$ и запишем полученное равенство в виде $abc=10$.

Кроме того очевидно, $a+b+c=0$. Легко убедиться, что с точностью до перестановки из равенства $abc=10$ следует, что числа $|a|, |b|, |c|$ равны либо 1, 2, 5, либо 1, 1, 10. Но во всех этих случаях при любом выборе знаков a, b, c сумма $a+b+c$ отлична от нуля. Таким образом, исходное уравнение не имеет решений в целых числах.

12. Найдите все натуральные $n > 1$, для которых $n^3 - 3$ делится на $n - 1$.

Решение:

$n^3 - 3 = (n^3 - 1) - 2$. Первое слагаемое делится на $n - 1$, значит, и 2 делится на $n - 1$. Следовательно, $n - 1 = 1$ или 2.

Ответ: $n = 2, 3$.

13. Решить в целых числах уравнение $1!+2!+\cdots+x!=y^2$.

Решение:

Очевидно, что

Если $x=1,$ то $y^2=1,$

Если $x = 3,$ то $y^2 = 9.$

Этим случаям соответствуют следующие пары чисел:

$x_1 = 1, y_1 = 1;$

$x_2 = 1, y_2 = -1;$

$x_3 = 3, y_3 = 3;$

$x_4 = 3, y_4 = -3;$

Заметим, что при x = 2 имеем $1! + 2! = 3,$ при x = 4 имеем $1! + 2! + 3! + 4! = 33$ и ни 3, ни 33 не являются целыми квадратами целых чисел. Если же x > 5, так как $5! + 6! + \cdots + x! = 10n,$

можем записать, что $1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \cdots + x! = 33 + 10n.$

Так как $33 + 10n$ – число, оканчивающееся цифрой 3, то оно не является квадратом целого числа.

Ответ: (1; 1), (1; -1), (3; 3), (3; -3).

14. Решите следующую систему уравнений в натуральных числах:

$$a^3 - b^3 - c^3 = 3abc, a^2 = 2(b + c).$$

Так как $3abc > 0,$ то $a^3 > b^3 > c^3;$ Таким образом имеем $b < a, c < a.$

Складывая эти неравенства, получим, что $b + c < 2a$ и $2(b + c) < 4a.$

С учетом последнего неравенства, из второго уравнения системы получаем, что $a^2 < 4a$ и $a < 4.$ Но второе уравнение системы также показывает, что a – четное число. Таким образом, a = 2, b = c = 1.

Ответ: (2; 1; 1)

15. Найти все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению

$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$.

Решение:

Разложив на множители обе части данного уравнения, получим:

$$x(x+1) = y(y+1)(y^2+1), \text{или} \quad x(x+1) = (y^2+y)(y^2+1)$$

Такое равенство возможно, если левая и правая части равны нулю, или представляют собой произведение двух последовательных целых чисел. Поэтому, приравнивая к нулю те или иные множители, получим 4 пары искомых значений переменных: $x_1 = 0;\ y_1 = 0;$

$$x_2 = 0;\ y_2 = -1;$$

$$x_3 = -1;\ y_3 = 0;$$

$$x_4 = -1;\ y_4 = -1;$$

Произведение $(y^2 + y)(y^2 + 1)$ можно рассматривать как произведение двух последовательных целых чисел, отличных от нуля, только при y=2. Поэтому $x(x+1)$ = 30, откуда $x_5 = 5, x_6 = -6$. Значит, существует еще две пары целых чисел, удовлетворяющих исходному уравнению:

$$x_5 = 5;\ y_5 = 2;$$
$$x_6 = -6;\ y_6 = 2.$$

Ответ: (0; 0), (0; -1), (-1; 0), (-1; 1), (5; 2), (-6; 2).

16. Доказать, что число $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 120 при любом натуральном n.

Решение:

$n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^2 - 1)(n^2 - 4) = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$. Из пяти последовательных чисел одно делится на 5, по крайней мере одно – на 3, и два числа являются соседними чётными числами, одно из которых делится на 2, а другое на 4. Окончательно данное выражение делится на $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

17. Дано трёхзначное число, у которого первая и последняя цифра одинаковые.

Доказать, что число делится на 7 тогда и только тогда, когда делится на 7 сумма второй и третьей цифр.

Решение:

Обозначим первую цифру нашего числа буквой a, вторую буквой b. По условию последняя цифра тоже равна a. Тогда наше число равно

$100a + 10b + a = (98a + 7b) + 3(a + b)$. Первое слагаемое делится на 7. Если второе слагаемое делится на 7, то и само число делится на 7. Обратно, если число делится на 7, то второе слагаемое $3(a + b)$ делится на 7, следовательно, $a + b$ делится на 7.

18. Найти множество всех пар натуральных чисел, которые являются решениями уравнения $49x + 51y = 602$.

Решение:

Выразим из уравнения переменную x через y:

$$x = \frac{602-51y}{49} \geq 1,\ 602 - 51y \geq 49,\ 51y \leq 553,\ 1 \leq y \leq 10\frac{43}{51}.$$

Полный перебор вариантов показывает, что натуральными решениями уравнения являются $x = 5, y = 7$.

Ответ: (5; 7).

19. Решить уравнение в целых числах: $x^2 + 23 = y^2$

Решение:

Перепишем уравнение в виде: $y^2 - x^2 = 23, (y-x)(y+x) = 23$

Так как x и y – целые числа и 23 – простое число, то возможны случаи:

$$\{y - x = 23, y + x = 1;\ \ \{y - x = 1, y + x = 23;\ \ \{y - x = -23, y + x = -1;\ \ \{y - x = -1, y + x = -23;$$

Решая полученные системы, находим: $\{x_1 = -11, y_1 = 12.$ $\{x_2 = 11, y_2 = 12.$ $\{x_3 = 11, y_3 = -12.$ $\{x_4 = -11, y_4 = -12.$

Ответ: (-11; 12), (11; 12), (11; -12), (-11; -12).

20. Решить уравнение в целых числах: $x^2 + xy - y - 2 = 0.$

Решение:

Выразим из данного уравнения y через x:

$$y(x-1) = 2 - x^2,$$

$$y = \frac{2-x^2}{x-1} = -\frac{x^2-2}{x-1} = -\frac{(x^2-1)-1}{x-1} = -\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} + \frac{1}{x+1} = $$

$$= -(x+1) + \frac{1}{x-1}, (x \neq 1)$$

Так как x, y – целые числа, то дробь $\frac{1}{x-1}$ должна быть целым числом.

Это возможно, если $x - 1 = \pm 1$

1) $\{x - 1 = -1, y = -x - 1 - 1;$ 2) $\{x - 1 = 1, y = -x - 1 + 1;$

$\{x = 0, y = -2$ $\{x = 2, y = -2$

Ответ: (0; -2), (2;-2).

21. Найдите все целочисленные решения уравнения:

$$x^2 - 6xy + 13y^2 = 29.$$

Решение:

Преобразуем левую часть уравнения, выделив полные квадраты,

$$x^2 - 6xy + 13y^2 = (x^2 - 6xy + 9y^2) + 4y^2 = (x - 3y)^2 + (2y)^2 = 29,$$
значит $(2y)^2 \leq 29$.

Получаем, что y может быть равен 0; ±1; ±2.

1. $y = 0, (x - 0)^2 = 29$. Не имеет решений в целых числах.
2. $y = -1, (x + 3)^2 + 4 = 29, (x + 3)^2 = 25,\ x + 3 = 5$ или $x + 3 = -5$
   x=2, x=-8
3. $y = 1, (x - 3)^2 + 4 = 29, \quad x - 3 = 5$ или $x - 3 = -5 \quad x = 8, x = -2$
4. $y = -2, (x + 6)^2 + 16 = 29, (x + 6)^2 = 13$. Нет решений в целых числах.
5. $y = 2, (x - 6)^2 + 16 = 29, (x - 6)^2 = 13$. Нет решений в целых числах.

Ответ: (2; -1), (-8; -1), (8; 1), (-2; 1).

22. Решить уравнение в целых числах: $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$.

Решение:

Рассмотрим уравнение как квадратное относительно x:

$$5x^2 + (8y - 2)x + 5y^2 + 2y + 2 = 0$$
$$D = (8y - 2)^2 - 4 \cdot 5(5y^2 + 2y + 2) = 64y^2 - 32y + 4 =$$
$$= -100y^2 - 40y - 40 = -36(y^2 + 2y + 1) =$$
$$= -36(y + 1)^2$$
Для того, чтобы уравнение имело решения, необходимо, чтобы $D = 0$.

$-36(y + 1)^2 = 0$. Это возможно при $y = -1$, тогда $x = 1$.

Ответ: (1; -1).

23. Решить в целых числах уравнение $1! + 2! + \cdots + x! = y^2$

Решение:

Очевидно, что при $x = 1$ $y^2 = 1$ и при $x = 3$ $y^2 = 9$, то есть находим следующие решения:

$$\{x_1 = 1\ y_1 = 1\ \{x_2 = 1\ y_2 = -1\ \{x_3 = 3\ y_3 = 3\ \{x_4 = 3\ y_4 = -3$$

Заметим, что при $x = 2$ имеем $1! + 2! = 3 \neq y^2$

и при $x = 4$ имеем $1! + 2! + 3! + 4! = 33 \neq y^2$.

Если же $x \geq 5,$ то (так как $5! + 6! + \cdots + x! = 10N$)

$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \cdots + x! = 33 + 10N$ – число, оканчивающееся цифрой 3, значит, оно не является квадратом целого числа.

Ответ: $\{x_1 = 1\ y_1 = 1\ \{x_2 = 1\ y_2 = -1\ \{x_3 = 3\ y_3 = 3\ \{x_4 = 3\ y_4 = -3$

24. Решите в целых числах уравнение $x^3 - x = 2008$.

Решение:

Левая часть уравнения $x^3 - x = (x - 1)x(x + 1)$ – произведение трех последовательных целых чисел и делится на 3. Правая же часть не делится на 3.

Ответ: уравнение не имеет решений в целых числах.

25. Решить в натуральных числах уравнение $x^2 - 3xy + 2y^2 = 7$

Решение: Представим левую часть уравнения в виде произведения: $(x - 2y)(x - y)$, тогда из правой части следует, что множители могут быть 1 и 7, или -7 и -1, откуда получаются две пары натуральных корней.

Ответ: (13; 6) и (6; 5).

26. Решить уравнение в натуральных числах $2x^2 + 9y^2 - 8xy - 3y = 0$.

Решение:

Исходное уравнение равносильно $\left(2(x - 2y)\right)^2 + (y - 3)^2 + y^2 = 9$.

Так как девятку можно представить в виде суммы квадратов только двумя способами $2^2 + 1^2$и 3^2, то первое слагаемое может быть или нулем, или четверкой, что дает две пары указанных корней уравнения.

Ответ: (6:3), (5;2).

27. Решить уравнение относительно x, y, z в натуральных числах:
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2005$.

Решение:

Так как $2005 = 5 \cdot 401$, то два знаменателя в левой части уравнения должны быть кратными 5, 401 и другому знаменателю.

Предположим $y = 5x, z = 401x$. Тогда получаем уравнение

$\frac{1}{x} + \frac{1}{5x} + \frac{1}{401x} = \frac{1}{2005}$, которое дает $x = 2411$.

Ответ: 2411

28. Решите уравнение с двумя неизвестными x и y в целых числах
$xy = x + y + 3$

Решение:

Перепишем исходное уравнение как $(x - 1)(y - 1) = 4$, откуда следует, что сомножители левой части могут принимать только целые значения: -4, -2, -1, 1, 2, 4, которые приводят к парам корней: (3; 3), (5; 2), (2; 5), (0; -3), (-3, 0), (-1; -1).

Ответ: (3; 3), (5; 2), (2; 5), (0; -3), (-3, 0), (-1; -1).

29. Решите уравнение с двумя неизвестными х и у в целых числах $10x^2 + 11xy + 3y^2 = 7$.

Решение:

Левую часть уравнения можно представить в виде произведения двух сомножителей $(5x + 3y)$ и $(2x + y)$, которые могут принимать только целые значения -7, -1, 1, 7, которые приводят к следующим парам целых корней (-4; 9), (14; -21), (4; -9), (-14; 21).

Ответ: (-4; 9), (14; -21), (4; -9), (-14; 21).

30. По окружности радиуса 40 катится колесо радиуса 18. В колесо вбит гвоздь, который ударяясь об окружность, оставляет на ней отметки. Сколько всего таких отметок оставит гвоздь на окружности? Сколько раз прокатится колесо по всей окружности, прежде чем гвоздь попадёт в уже отмеченную ранее точку?

Решение:

Пусть $l = 4\pi$. Длина большой окружности равна $20l$, а малой – $9l$. В отмеченную ранее точку гвоздь попадёт, когда малая окружность прокатится по дуге длины НОД$(20, 9)l = 180l$, то есть 9 раз прокатится по большой окружности. При этом он оставит $180 : 9 = 20$ отметок.

Ответ: 20 отметок, 9 оборотов.

31. Решить в целых числах $xy = x + y$.

Решение:

Данное уравнение можно записать в виде

$$xy - x - y + 1 = 1, \text{или } (x - 1)(y - 1) = 1.$$

Произведение двух целых чисел равно 1, значит, оба равны +1 или -1;

следовательно, или $x - 1 = y - 1 = 1$ и $x = y = 2$,

или $x - 1 = y - 1 = -1$ и $x = y = 0$.

Ответ: $x_1 = 0;\ y_1 = 0;\ x_2 = 2;\ y_2 = 2$.

32. Решить в целых числах уравнение $6x^2 + 5y^2 = 74$.

Решение:

Перепишем данное уравнение так: $6x^2 - 24 = 50 - 5y^2$, т. е. $6(x^2 - 4) = 5(10 - y^2)$, откуда имеем $x^2 - 4 = 5u$, $10 - y^2 = 6v$ и, следовательно, $v = u$.

Итак, $x^2 = 4 + 5u$, то есть $4 + 5u \geq 0$, откуда $u \geq -\frac{4}{5}$; аналогично $10 - y^2 = 6u$, т. е. $10 - 6u \geq 0$, откуда $u \leq \frac{5}{3}$, значит, $u = 0$ или $u = 1$.

При $u = v = 0$ получим $10 = y^2$, где у – целое, что неверно.

Пусть $u = v = 1$, тогда $x^2 = 9$, $y^2 = 4$.

Ответ: $\{x_1 = 3\ y_1 = 2\ \{x_2 = 3\ y_2 = -2\ \{x_3 = -3\ y_3 = 2\ \{x_4 = -3\ y_4 = -2$

33. Решить в целых числах уравнение $19x^2 + 28y^2 = 729$.

Решение:

Так как $(18x^2 + 27y^2) + (x^2 + y^2) = 729$, то $x^2 + y^2$ делится на 3, поэтому $x = 3u$, $y = 3v$ и $19u^2 + 28v^2 = 81$.

Повторяя рассуждения, получим $u = 3t$, $v = 3s$ и $19t^2 + 28s^2 = 9$.

Последнее уравнение, очевидно, не имеет решений в целых числах, а значит и исходное уравнение решений не имеет.

34. Решите уравнение $x - y = 1$ в целых числах.

Решение:

Таким образом, при любом $x \in Z$ получим, что $y = x - 1$ – целое число, то есть ответом будет множество всевозможных пар вида $(x; x - 1)$, где $x \in Z$, то есть $\{(x; x - 1) |\ x \in Z\}$.

Ответ: $\{(x; x - 1) |\ x \in Z\}$

35. Решите уравнение $48x + 36y = 0$ в целых числах.

Решение:

Выразим y: $y = -\frac{4x}{3}$. Таким образом, только при $x = 3k,$ где $k \in Z$ получим, что $y = -4k$ – целое число, то есть ответом будет множество всевозможных пар вида $(3k;\ -4k),$ где $k \in Z,$ то есть $\{(3k;\ -4k) |\ k \in Z\}$.

Ответ: $\{(3k;\ -4k) |\ k \in Z\}$.

36. Докажите, что НОД(n, m)>1, где n, m $\in N$, то не существует целых чисел p и q, таких, что $pn + qm = 1$.

Решение:

n и m делятся на НОД(n, m), следовательно, $pn + qm$ делится на НОД(n; m) >1, следовательно, $pn + qm$ не может быть равно 1.

37. Решите уравнение $x^2 + 8y = 32$ в целых числах.

Решение:

Так как в равенстве все слагаемые, кроме первого, делятся на 8, то и первое слагаемое должно делиться на 8.

Докажем от противного, что если x^2 делится на 8 при целом x, то x делится на 4.

Пусть x не делится на 4. Если x не делится на 2, то x^2 не делится на 2, что неверно. Если x делится на 2, то $x = 2y$, где y – целое нечетное, тогда $x^2 = 4y^2$, но $y^2 -$ нечетное, следовательно, x^2 не делится на 8 – противоречие.

Таким образом, x во всех решениях имеет вид $x = 4k$, где $k -$ целое. Но все ли x вида $x = 4k$ подходят? Выразим y при условии $x = 4k$:

$$16k^2 + 8y = 32 \quad \leftrightarrow \quad y = 4 - 2k^2$$

целое при $k \in Z$, следовательно, решениями уравнения являются всевозможные пары вида $(4k; 4 = 2k^2), k \in Z$.

Ответ: $\{(4k; 4 - 2k^2) | k \in Z\}$

38. Попробуйте разменять 25-рублевую купюру одиннадцатью купюрами достоинством 1, 3 и 5 рублей.

Решение:

Если мы возьмем 11 трехрублевых купюр, то получим 33 руб. – на 8 рублей больше, чем надо. Заменим несколько трехрублевых купюр на однорублевые. Каждая замена уменьшает сумму на 2 руб., следовательно, чтобы уменьшить сумму на 8 руб., надо заменить 4 трёхрублевые купюры на 4 однорублевые: 7·3 + 4·1 = 25.

Составим систему уравнений: x + y + z = 11, x + 3y + 5z = 25, где x, y, z – количество одно-, трёх- и пятирублевых купюр. Вычтя первое уравнение из второго, получим 2y + 4z = 14, или y + 2z = 7. Из последнего уравнения видно, что для z возможны четыре значения – 0, 1, 2, 3. Им соответствуют четыре значения y – 7, 5, 3, 1 и четыре значения x – 4, 5, 6, 7. Таким образом, задача имеет четыре различных решения.

Ответ: $\mathbf{25} = 4\cdot\mathbf{1} + 7\cdot\mathbf{3} = 5\cdot\mathbf{1} + 5\cdot\mathbf{3} + 1\cdot\mathbf{5} = 6\cdot\mathbf{1} + 3\cdot\mathbf{3} + 2\cdot\mathbf{5} = 7\cdot\mathbf{1} + 1\cdot\mathbf{3} + 3\cdot\mathbf{5}$.

39. Камни лежат в трёх кучках: в одной – 51 камень, в другой – 49 камней, а в третьей – 5 камней. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку из чётного количества камней на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

Решение:

На первом шаге разделить кучку нельзя. Если мы мы объединим две первых кучки, то дальше в любой из получающихся кучек количество камней будет кратно 5. В дальнейшем это свойство сохранится. Если мы объединим первую и третью кучки, то в дальнейшем число камней в каждой кучке будет кратно 7, а если объединим две последние кучки, то в дальнейшем число камней в каждой кучке будет кратно 3.

Ответ: Нельзя.

40. В комнате стоят трёхногие табуретки и четвероногие стулья. Когда на все эти сидячие места уселись люди, в комнате оказалось 39 ног.
Сколько в комнате табуреток?

Решение:

По условию в комнате находятся пяти- и шестиногие существа, у которых в сумме 39 ног. Число ног у пятиногих оканчивается на 0 или 5. Но на 0 это число оканчиваться не может: тогда число ног у шестиногих будет кончаться на 9. В таком случае пятиногих может быть 1, 3, 5 или 7. Перебором определяем, что пятиногих существ – 3, а шестиногих – 4. То есть в комнате 4 стула и 3 табуретки.

Ответ: 3 табуретки.

41. Во всех подъездах дома одинаковое число этажей, а на каждом этаже одинаковое число квартир. При этом число этажей в доме больше числа квартир на этаже, число квартир на этаже больше числа подъездов, а число подъездов больше одного. Сколько этажей в доме, если всего в нём 105 квартир?

Решение:

Подсказка: $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Обозначим через p число подъездов в доме, через f – число этажей, а через k – число квартир на этаже. Тогда $p \cdot f \cdot k = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, причём числа 3, 5, 7 – простые. Учитывая, что $1 < p < k < f$, получаем $f = 7$.

42. У кассира есть только 72-рублевые купюры, а у вас – только 105-рублевые (у обоих в неограниченном количестве).

а) Сможете ли вы уплатить кассиру один рубль?

б) А 3 рубля?

Решение:

а) Так, как и 72 и 105 кратны 3, то уплатить можно только сумму, кратную 3.

б) Например, вы дадите кассиру 11 купюр, а он вам отдаст 16 купюр.

Ответ: а) Не сможете; **б)** сможете

43. На какие натуральные числа можно сократить дробь $(3m - n)/(5n + 2m)$, если известно, что она сократима и что числа m и n взаимно просты.

Решение:

Если $3m - n$ и $5n + 2m$ делятся на d, то и числа $17m = 5(3m - n) + 5n + 2m$ и $17n = 3(5n + 2m) - 2(3m - n)$ делятся на d. Но НОК$(17m, 17n) = 17$. Значит, $d = 17$. Это возможно, например, при $m = 1$, $n = 3$ (или при $m = 6$, $n = 1$).

Ответ: На 17.

44. Жители города Глупова пользуются купюрами только в 35 и 80 тыров. Сможет ли рассчитаться продавец с покупателем, который хочет купить

а) шоколадку за 57 тыров;

б) булочку за 15 тыров?

Решение:

а) Так, как и 35 и 80 кратны 5, то уплатить можно только сумму, кратную 5.

б)например, покупатель даст продавцу 5 купюр по 35 тыров и получит 2 купюры по 80 тыров сдачи.

Ответ: а) Не сможет; **б)** сможет.

45. Найдите число нулей, на которое оканчивается число $11^{100} - 1$.

Подсказка: Воспользуйтесь разложением выражения $(10 + 1)^{100}$ по биному Ньютона.

Решение:

$S = (10 + 1)^{100} - 1 = ... + (100\cdot 99\cdot 98 : 6)\cdot 10^3 + (100\cdot 99 : 2)\cdot 10^2 + 100\cdot 10 + 1 = ... + (33\cdot 49)\cdot 10^5 + 495000 + 1000 = A + 496000$, где все члены на месте троеточия делятся на 10^4, то есть A оканчивается по крайней мере на четыре нуля. Отсюда следует, что число S оканчивается на три нуля (а четвёртая с конца цифра числа S равна 6).

Ответ: Три нуля.

46. Остап Бендер в интервью шахматному журналу о сеансе одновременной игры в Васюках сообщил, что в одной из партий у него осталось фигур в 3 раза меньше, чем у соперника, и в 6 раз меньше, чем свободных клеток на доске, а в другой партии фигур у него осталось в 5 раз меньше, чем у соперника, и в 10 раз меньше, чем свободных клеток на доске, и все-таки он сумел выиграть обе партии. Можно ли верить его рассказу?

Решение:

Обозначим через N количество фигур у О. Бендера. В первом случае $N + 3N + 6N = 64$, что невозможно. Во втором случае $N + 5N + 10N = 64$ и $N = 4$, что также невозможно, так как у противника при этом должно остаться 20 фигур.

Ответ: нельзя.

47. Существует ли четырёхзначное число, сумма цифр которого в 25 раз меньше их произведения?

Решение:

Предположим, что такое число существует. Тогда из условия задачи следует, что произведение его цифр делится на 25, поэтому среди его цифр должны быть две пятерки (нулей быть не может, иначе произведение цифр было бы равно нулю).

Пусть a и b – две другие его цифры, тогда сумма цифр этого числа равна 10 + a + b, а произведение цифр равно 25ab.

Составим уравнение: $25(10 + a + b) = 25ab$. Оно равносильно уравнению $10 + a + b = ab$, которое можно привести к виду: $ab – a – b + 1 = 11$. Тогда левую часть полученного уравнения можно разложить на множители способом группировки. В результате этого получим: $(a – 1)(b – 1) = 11$. Так как 11 – простое число, то один из множителей равен 1, а другой равен 11. Но a и b – цифры, поэтому ни одна из них не равна 12. Противоречие.

Ответ: не существует.

48. Существуют ли четыре подряд идущих натуральных числа, каждое из которых является степенью (большей 1) другого натурального числа?

Решение:

Подсказка: Рассмотрите остатки от деления на 4.

Среди четырёх последовательных натуральных чисел одно дает остаток 2 от деления на 4. Значит, оно делится на 2 и не делится на 4, то есть не может являться степенью, большей 1.

Ответ: не существует.

49. Найти четыре последовательных числа, произведение которых равно 1680.

Решение: $1680 = 40·6·7 = 5·6·7·8$.

Замечание: Можно составить уравнение $(x – 2)(x – 1)x(x + 1) = 1680$, которое приводится к виду $(x(x – 1) – 1)^2 = 1681$. Это уравнение распадается на два квадратных, одно из них имеет мнимые корни, а второе – $x_1 = –6$, $x_2 = 7$.

Ответ: 5, 6, 7, 8 или –8, –7, –6, –5.

50. В равенстве $(ay^b)^c = -64y^6$ замените a, b и c целыми числами, отличными от 1, так, чтобы получилось тождество.

Решение:

Задача сводится к решению системы bc = 6, $a^c = -64$. Из второго уравнения следует, что с *п*оложительно и нечётно. Отсюда с = 3.

Ответ: (-4, 2, 3).

51. Докажите, что числа от 1 до 2001 включительно нельзя выписать подряд в некотором порядке так, чтобы полученное число было точным кубом.

Подсказка: Рассмотрите остаток, который такое число будет давать при делении на 9.

Решение:

Полученное число при делении на 9 даст тот же остаток, что и сумма всех чисел от 1 до 2001. Сумма любых девяти последовательных чисел делится на 9. Значит, полученное число сравнимо с $1999 + 2000 + 2001 \equiv 3 \pmod 9$. Но, как известно, кубы при делении на 9 дают только остатки 0, 1 и 8.

52. Найдите все простые числа, которые отличаются на 17.

Подсказка: Такие числа имеют разную четность.

Ответ: 2 и 19.

53. Найдите все простые числа p и q, для которых выполняется равенство $p^2 - 2q^2 = 1$.

Решение:

Перепишем уравнение в виде $2q^2 = (p - 1)(p + 1)$. Заметим, что p нечётно. Значит, q чётно, то есть $q = 2$, а $p = 3$.

54. Докажите, что если число $n! + 1$ делится на $n + 1$, то $n + 1$ – простое число.

Решение:

Пусть $n + 1$ – составное число. Если p – некоторый его простой делитель, то $p \leq n$. Значит, $n!$ делится на p, а $n! + 1$ не делится. Противоречие.

55. Докажите, что каково бы ни было целое число n, среди чисел n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$ есть хотя бы одно число взаимно простое с остальными четырьмя из этих чисел.

Решение:

Если $|k - l| \leq 4$ и $k \neq l$, то наибольший общий делитель чисел k и l не превосходит 4. Поэтому наибольший общий делитель любой пары выбранных чисел не превосходит 4. Из пяти последовательных чисел можно выбрать пару последовательных нечётных чисел. Из двух последовательных нечётных чисел по крайней мере одно не делится на 3. Это число взаимно просто с остальными четырьмя числами.

56. Доказать, что для любых трёх чисел, меньших 1000000, найдётся число, меньшее 100 (но большее 1), взаимно простое с каждым из них.

Решение:

Составим сначала список простых чисел, меньших 100: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 78, 83, 89, 97. Предположим, что на каждое из этих чисел делится хотя бы одно из трёх данных чисел a, b, c. Тогда $abc \geq 2\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot97 > 10^{18}$. Но $a, b, c \leq 10^6$, поэтому $abc \leq 10^{18}$. Противоречие

57. Докажите, что составное число n всегда имеет делитель, больший 1, но не больший $\sqrt{n}$

Решение:

Каждому собственному делителю a числа n соответствует делитель ${}^{n}/_{a}$. Одно из этих двух чисел не превосходит $\sqrt{n}$

58. Определите, на какую наибольшую натуральную степень числа 2007 делится 2007!

Решение:

$2007 = 3^2\cdot223$. В разложении на простые множители числа 2007! показатель степени у числа 3 будет достаточно большим, так как множитель 3 входит в разложение каждого третьего числа. Множитель 223 входит только в разложение чисел вида $223p$, где p – натуральное число, не превосходящее 9.

Таким образом, в разложение числа 2007! на простые множители число 223 войдёт с показателем 9. Следовательно, число 2007! будет делиться на 2007^9, но не будет делиться на 2007^{10}.

Ответ: На девятую степень

59. Существуют ли 2016 целых чисел, сумма и произведение которых равны 2016?

Решение:

Пример 1. 1008, 2, 1510 единиц и 504 минус единицы.

Пример 2. 9, 7, –8, –4 и 2012 единиц.

Замечания: существуют и другие примеры

Ответ: существуют

60. В книге рекордов Гиннесса написано, что наибольшее известное простое число равно 23021377 – 1. Не опечатка ли это?

Решение:

Какая последняя цифра у числа $23021^{377} - 1$?

Любая степень числа, оканчивающегося цифрой 1, тоже оканчивается цифрой 1. Поэтому разность $23021^{377} - 1$ оканчивается на 0 и, следовательно, не является простым числом.

Замечание:

На самом деле наибольшим известным сегодня простым числом является число $2^{3021377} - 1$. Простые числа вида $2^n - 1$ называют числами Мерсенна (по имени математика XVII века М. Мерсенна, который их исследовал). Ясно, что при составном n число $2^n - 1$ составное. Поэтому числа Мерсенна бывают только при простых n. Например, $2^2 - 1 = 3$, $2^5 - 1 = 31$, $2^7 - 1 = 127$, ... – простые числа. Однако нельзя утверждать, что каждому простому числу p соответствует простое число $2^p - 1$.

Например, $2^{11} - 1$ составное. Поиском чисел Мерсенна занимались многие выдающиеся математики, например, Эйлер доказал, что число $2^{31} - 1$ – простое. Конечно или бесконечно множество чисел Мерсенна – вопрос, на который пока нет ответа.

Ответ: опечатка.

61. Известно, что $p > 3$ и p – простое число.

а) Как вы думаете, будет ли хотя бы одно из чисел $p + 1$ и $p - 1$ делиться на 4?

б) А на 5?

Решение:

а) Рассмотрим числа $p - 1$, p, $p + 1$, $p + 2$. Из четырёх последовательных чисел одно обязательно делится на 4, но это не p и не $p + 2$ (оба эти числа нечётны). Значит, одно из чисел $p + 1$ или $p - 1$ будет делиться на 4.

б) Например, при $p = 13$ оба эти числа на 5 не делятся.

Ответ: а) будет **б)** не обязательно

62. Является ли число $4^9 + 6^{10} + 3^{20}$ простым?

Решение:

Это число является полным квадратом.

$$4^9 + 6^{10} + 3^{20} = (2^9)^2 + 2\cdot 2^9\cdot 3^{10} + (3^{10})^2 = (2^9 + 3^{10})^2.$$

Ответ: не является.

63. Три простых числа p, q и r, большие 3, образуют арифметическую прогрессию: $q = p + d$, $r = p + 2d$. Докажите, что d делится на 6.

Решение:

Если d нечётно, то среди чисел p и q есть чётное, что невозможно. Если d не делится на 3, то среди чисел p, q и r есть кратное 3, что тоже невозможно.

64. Найдите десять последовательных натуральных чисел, среди которых:

а) нет ни одного простого числа;

б) одно простое число;

в) два простых числа;

г) три простых числа;

д) четыре простых числа;

е) сколько вообще простых чисел может быть среди десяти последовательных натуральных чисел?

Решение:

Подсказка: Среди десяти последовательных натуральных чисел (больших 5) обязательно пять чётных, а из нечётных одно кратно 5.

Ответ: а) 2312, ..., 2321; **б)** 2325, ..., 2334; **в)** 30, ..., 39; **г)** 22, ..., 31; **д)** 10, ..., 19; **е)** не более пяти

65. Может ли произведение трёх последовательных натуральных чисел быть степенью натурального числа (квадратом, кубом и т.д.)?

Подсказка Докажите, что среднее число само является степенью.

Решение:

Пусть произведение чисел $n-1$, n, $n+1$ является точной m-й степенью. Поскольку число n взаимно просто с числами $n-1$ и $n+1$, то любой простой делитель числа n входит в разложение числа $(n-1)n(n+1)$ с таким же показателем, с каким он входит в разложение числа n, то есть он входит в разложение числа n в степени, кратной m. Поэтому n (а следовательно, и n^2) является точной m-й степенью. Но и $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$ также является m-й степенью натурального числа, как частное от деления чисел $(n-1)n(n+1)$ и n, являющихся m-ми степенями. Таким образом, нами найдены два последовательных натуральных числа (n^2 и $n^2 - 1$), являющихся m-ми степенями. Ясно, что это невозможно. Противоречие

66. Дано n попарно взаимно простых чисел, больших 1 и меньших $(2n-1)^2$. Докажите, что среди них обязательно есть простое число.

Подсказка Предположите противное и рассмотрите наименьшие простые делители данных чисел.

Решение:

Пусть $a_1, a_2, ..., a_n$ – попарно взаимно простые составные числа. Обозначим через p_i наименьший простой делитель числа a_i. Тогда $a_i = p_iq_i$, причём $p_i \le q_i$. Поскольку $a_i < (2n-1)^2$, то $p_i < 2n-1$. Кроме того, числа $p_1, p_2, ..., p_n$ различны, так как числа $a_1, a_2, ..., a_n$ попарно взаимно просты. Однако существует не более $n-1$ простых чисел, больших 1 и меньших $2n-1$: все такие числа содержатся среди чисел 2, 3, 5, 7, ..., $2n-3$. Противоречие.

67. Найдите все пары (p, q) простых чисел, разность пятых степеней которых также является простым числом.

Решение:

Можно считать, что $p > q$. Так как $p^5 - q^5$ делится на $p - q$, и частное заведомо больше 1, то $p - q = 1$. Следовательно, $p = 3$, $q = 2$.
Действительно, число $3^5 - 2^5 = 211$ – простое.

Ответ: $\{3, 2\}$.

68. Какое наименьшее натуральное число не является делителем 50!?

Подсказка: n! не делится ни на какое простое число, большее n.

Решение:
Простое число 53 не входит в разложение на простые множители числа 50!, поэтому 50! не делится на 53. С другой стороны ясно, что 50! делится на $3 \cdot 17 = 51$ и на $4 \cdot 13 = 52$.

Ответ: 53.

69. Найдите все простые числа, которые равны сумме двух простых чисел и разности двух простых чисел.

Решение:
Указанное простое число p нечётно, поэтому в сумме и разности участвуют числа разной чётности. Итак, $p = q + 2 = r - 2$. Отсюда видно, что числа дают

разные остатки при делении на 3, значит, одно из них кратно 3, а так как оно простое, то равно 3.

Ответ: 5.

70. Натуральные числа a, b, c таковы, что числа $p = b^c + a$, $q = a^b + c$, $r = c^a + b$ простые. Доказать, что два из чисел p, q, r равны между собой.

Решение:
Два из чисел a, b, c одной чётности. Пусть для определённости это a и b. Тогда простое число $p = b^c + a$ чётно. Следовательно, $p = 2$, $a = b = 1$,
а $q = 1 + c = r$.

71. Существуют ли арифметическая прогрессия, состоящая лишь из простых чисел?

Решение:

Пусть $a_1 = p$ – простое число. Тогда все числа $a_{kp+1} = p + kpd$ делятся на p, то есть являются составными.

Ответ: Не существует.

72. Существует ли такое число n , что числа

а) $n – 96$, n, $n + 96$;

б) $n – 1996$, n, $n + 1996$

простые? (Все простые числа считаем положительными.)

Решение:

а) Например, при $n = 101$ получаем простые числа 5, 101, 197.

б) Поскольку 1996 не делится на 3, то одно из чисел $n - 1996$, n и $n + 1996$ делится на 3, следовательно, $n - 1996 = 3$. Но тогда $n + 1996 = 3995$ – составное число.

Ответ: а) Существует; **б)** не существует.

73. Найдите все простые числа, которые нельзя записать в виде суммы двух составных.

Решение:

Докажем, что любое простое число $p > 11$ представляется в виде суммы двух составных. Поскольку любое такое число нечётно, то число $p - 9$ чётно и, следовательно, составное. Поэтому $p = (p - 9) + 9$ – искомое представление.

С другой стороны, непосредственно проверяется, что числа 2, 3, 5, 7 и 11 не представимы в виде суммы двух составных.

74. Разложите число 2016 на простые множители.

Решение:

Будем делить число 2016 на 2 до тех пор, пока не получится нечетное число:

$2016 \to 1008 \to 504 \to 252 \to 126 \to 63$.

Затем будем делить на 3:

$63 \to 21 \to 7$.

Итак, $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Степени мы определили посчитав то, сколько раз мы поделили на то или иное число (на 2, на 3, на 7).

Ответ: $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$

75. На 99 карточках пишутся числа 1, 2,..., 99. Затем карточки тасуются и раскладываются чистыми сторонами вверх. На чистых сторонах карточек снова пишутся числа 1, 2,..., 99. Для каждой карточки числа, стоящие на ней, складываются и 99 полученных сумм перемножаются. Докажите, что в результате получится четное число.

Решение:

Среди чисел 1, 2,..., 99 — 50 нечетных и 49 четных. Это значит, что на одной из карточек на обеих сторонах будут написаны нечетные числа.

76. Доказать, что произведение двух последовательных натуральных чисел не является степенью никакого целого числа.

Решение:

Предположим, что $n(n + 1) = am$, где $m \geq 2$ (a, m и n – натуральные числа). Числа n и $n + 1$ не имеют общих делителей, поэтому $n = bm$ и $n + 1 = cm$. Но этого не может быть, потому что разность между двумя последовательными m-ми степенями больше 1.

77. Сформулируйте и докажите признаки делимости на 2^n и 5^n.

Решение:

Число делится на 2^n (5^n) тогда и только тогда, когда число, образованное его последними n цифрами, делится на 2^n (5^n).

78. Существует ли целое число, произведение цифр которого равно 1330?

Решение: Разложим число 1330 на простые множители: $1330=2\cdot5\cdot7\cdot19$. Пусть это произведение цифр какого-то целого числа, но ведь никакая цифра не содержит в своем разложении на простые множители число 19 (цифры – это: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0). Следовательно, такого числа не существует.

Ответ: Нет

79. На доску выписали все собственные делители некоторого составного натурального числа n, увеличенные на 1. Найдите все такие числа n, для которых числа на доске окажутся всеми собственными делителями некоторого натурального числа m.

Решение:

Заметим, что число 2 на доску не выписано, ибо 1 – не собственный делитель n; стало быть, m нечётно. Значит, все выписанные делители m нечётны, а потому все делители n чётны. Итак, n не делится на нечётные простые числа, то есть n – степень двойки (и все его делители – тоже).

Если n делится на 16, то 4 и 8 – его собственные делители, поэтому на доску выписаны 5 и 9. Стало быть, m делится на 45 и, в частности, 15 является его собственным делителем. Но число 15 выписано быть не могло, поскольку 14 не является степенью двойки. Следовательно, n не может делиться на 16.

Оставшиеся (составные) степени двойки $n = 4$ и $n = 8$ подходят: для них можно соответственно положить $m = 9$ и $m = 15$.

Ответ: $n = 4$ или $n = 8$.

80. Найдите все простые числа p, q и r, для которых выполняется равенство: $p + q = (p - q)r$.

Решение:

Из условия видно, что $p + q$ делится на $p - q$, следовательно, $(p + q) - (p - q) = 2q$ также делится на $p - q$. Делителями числа 2q могут являться только числа 1, 2, q и 2q.

Если $p - q = 1$, то левая часть исходного равенства больше правой. Если $p - q$ равно q или 2q, то p равно 2q или 3q, то есть число p – не простое. Значит, $p - q = 2$. Тогда исходное равенство примет вид: $2q + 2 = 2r \Leftrightarrow q = 2r-1 - 1$. Если $r = 2$, то $q = 1$ – не простое число. Значит, r нечётно и $r - 1 = 2k$.

Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. $2r-1 - 1 = 4k - 1$ делится на $4 - 1 = 3$. Таким образом, $q = 3$. Тогда $p = 5$ и $r = 3$.

Второй способ. Так как $q = 22k - 1 = (2k - 1)(2k + 1)$, то q может оказаться простым числом только в случае, когда $2k - 1 = 1$. Значит, $k = 1$, $r = 3$, $q = 3$, $p = 5$.

Ответ: $p = 5$, $q = 3$, $r = 3$.

Заключение

Цель работы: подготовить пособие, которое могло бы сформировать у учащихся представление об элементах теории чисел, привить любовь к математике путём разбирания интересных задач, способствовать развитию абстрактного мышления, стимулировать творческую активность учащихся, достигнута.

В курсе представлены наиболее разнообразные задачи, подкрепляющие интерес ученика к математике и способствующие развитию у него математического мышления, для освоения базовых основ по теме теория чисел, ориентированные на учителей школьных и дополнительных учебных заведений для проведения занятий с углублённым изучением математики, а так же подросткам школьного возраста для изучения данного материала самостоятельно.

Разработаны планы урока с учётом возраста ученика и той нагрузки, которую он предполагаемо получает помимо занятий по данному курсу

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Генкин, С.А. Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы /С.А. Генкин, И.В. Итенберг, Д.В. Фомин. – Киров: Изд-во "АСА", 1994.
2. Дрозина, В.В. Как научить младших школьников решать нестандартные задачи. Учебное пособие / В.В. Дрозина, В.Л. Дильман, Д.А. Дрозин. – М.: Ленанд, 2016.
3. Дрозина, В.В. Механизм творчества решения нестандартных задач (издание 3-е) / В.В. Дрозина, В.Л. Дильман. – М.: Бином, 2017.
4. Иванов, О.А. Сто олимпиадных задач для старшеклассников / О.А.Иванов. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 1994.
5. Сборник задач московских математических олимпиад: пособие для внеклассной работы по математике / сост. А.А. Леман. – М.: Просвещение, 1965.
6. Соловьёв, Ю.П. Задачи по алгебре и теории чисел для математических школ. Часть 1 / Ю.П. Соловьёв. – М.: Изд-во СУНЦ МГУ, 1998.
7. Соловьёв, Ю.П. Задачи по алгебре и теории чисел для математических школ. Часть 2 / Ю.П. Соловьёв. – М.: Изд-во СУНЦ МГУ, 1998.
8. Соловьёв, Ю.П. Задачи по алгебре и теории чисел для математических школ. Часть 3 / Ю.П. Соловьёв. – М.: Изд-во СУНЦ МГУ, 1998.
9. Shkolkovo.net – сайт для подготовки к ЕГЭ по математике.
10. Math4school.ru – сайт по математике для школы.
11. Решение уравнений в целых числах - МАОУ “Гимназия №8” г. Пермь 2017.
12. Problems.ru – сборник задач по математике.
13. Васильев Н. Б. и др. Заочные математические олимпиады.

14.Лоповок Л. М. 1000 проблемных задач по математике.