Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет
(Национальный исследовательский университет) »

Институт естественных и точных наук
Факультет математики, механики и компьютерных технологий
Кафедра математического анализа и МПМ

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент
к.ф.-м.н., доцент
_______/А.В. Кунгурцева /
“_____” _________ 2020 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой,
д.ф.-м.н.,зав.каф.
___________/В.Л. Дильман/
“_____” _________ 2020 г.

ПРЕПОДАВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ В 8 КЛАССЕ. ОПЫТ ПОСТРОЕНИЯ УЧЕБНИКА: ТЕОРИЯ, ПРИМЕРЫ, ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
ЮУрГУ – 01.03.01–2020–306-01-137. ВКР

Руководитель работы
к.ф.-м.н., доцент
___________/М.А. Корытова/
“_____” __________2020 г.

Автор
Студент группы ИЕТН-415
_________/Е.В. Сафонова/
“_____” _________ 2020 г.

Нормоконтролер
к.ф.-м.н., доцент
___________/М.А. Корытова/
“____” __________ 2020 г.

Челябинск
2020

Аннотация

УДК 372.851

Сафонова Е.В.

Преподавание геометрии в 8 классе. Опыт построения учебника: теория, примеры, избранные задачи./ Е.В. Сафонова.– Челябинск, 2020.– 64 с.

В работе предложен учебник по геометрии для 8 классов профильных школ. Рассмотрены все темы, предусмотренные федеральным государственным образовательным стандартам.

Список лит. – 11 назв., рисунков – 161.

Оглавление

Введение

Геометрия – одна из самых древних наук, возникшая еще до нашей эры. В переводе с греческого слово «геометрия» означает «землемерие» («гео» – по-гречески земля, а «метрео» – мерить). Такое название объясняется тем, что зарождение геометрии было связано с различными измерительными работами, которые приходилось выполнять при разметке земельных участков, проведении дорог, строительстве зданий и других сооружений. В результате этой деятельности появились и постепенно накапливались различные правила, связанные с геометрическими измерениями и построениями. Таким образом, на основе практической деятельности людей, возникла геометрия, в дальнейшем сформировавшись в самостоятельную науку, занимающуюся изучением геометрических фигур.

Предлагаемый учебник предназначен для изучения геометрии в 8-м классе, как продолжение курса геометрии 7 класса. Учебник знакомит учащихся с разнообразием пространственных форм, законами восприятия и изображения, формирует необходимые представления об окружающем нас мире, дает метод научного познания, способствует развитию логического мышления, формирует представление об идеях и методах математики, о математике как форме описания и методе познания действительности.

Учебник развивает умение и навык отличать друг от друга формы различных геометрических фигур, перечисляя их существенные признаки, из него учащиеся узнают о свойствах фигур, соотношениях между их отдельными элементами, учатся решать задачи на вычисление длин, площадей, размеров их элементов, а также задачи на построение геометрических фигур. Изучение геометрии дает учащимся навыки и знания, необходимые не только для последующей учебной работы, но и для дальнейшей профессиональной деятельности.

Представленный учебник сообщает учащимся не только знания, предусмотренные программой, но и вызывает интерес к познанию, стимулируя самостоятельность в изучении предмета ввиду теорем, представленных в учебнике на индивидуальный разбор.

В гармоническом развитии пространственного воображения, логического мышления и выработки навыков в практических приложениях заключается залог успеха занятий по геометрии.

При подготовке к ВКР были изучены отечественные труды, посвященные проблеме преподавания геометрии в современной школе.

В учебно-методическом пособии И. М. Смирновой «Педагогика геометрии» [2] определены приоритетные направления развития школы, ориентированные на формирование личности школьников, реализацию их задатков, склонностей, способностей, интересов и других индивидуальных особенностей. В этом большую роль играет школьный курс геометрии. И. М. Смирнова выделяет три основные темы, определяющие предмет педагогики геометрии. Одна из них посвящена историческим аспектам современных тенденций математического образования. В ней представлен опыт создания и развития отечественного учебника по геометрии, рассмотрена история профильного обучения, а также возникновения и развития элективной формы обучения.

«Педагогика геометрии» дает наиболее важные, с практической точки зрения, сведения об индивидуальных особенностях учащихся. Эти особенности внимания, восприятия, памяти, способностей, мышления учащихся необходимо учитывать при организации учебного процесса. Учет индивидуальных психологических особенностей учеников является важным компонентом современного обучения геометрии.

И. М. Смирнова излагает и методические вопросы, формулирует цели обучения геометрии, рассматривает критерии отбора содержания учебного материала, отвечающие новым идеям и тенденциям образования, а также методы и формы обучения.

Успех проводимой модернизации образования во многом зависит от правильного определения роли и места каждого школьного предмета в новых, быстро меняющихся условиях.

М. Г. Мехтиев в своей статье «Проблемы обучения геометрии в общеобразовательной школе на современном этапе» [1] одной из главных задач преподавания геометрии выявляет планомерное, систематическое развитие геометрического, образного мышления, восприятия геометрии не только как школьного предмета, но и феномена человеческой культуры.

В связи с этим автор считает необходимым проведение подготовительной работы, которая могла бы методически правильно подготовить учащегося к усвоению стандартного курса геометрии.

Важной проблемой обучения, по мнению М. Г. Мехтиева, является проблема учебника по геометрии. Частая смена учебников приводит к снижению авторитета школьного учебника - главного источника знаний учащихся.

Естественно, разноуровневые программы подкрепляются различными учебниками по геометрии, которые имеют свои дидактические достоинства, свои системы задач, специфические методы доказательств, методические находки.

Наряду с задачей дать научную информацию, учебник должен выполнять дидактические задачи: способствовать усвоению учащимися содержания, вооружить их методами приобретения знаний, умений, навыков, способствовать воспитанию и развитию учащихся, что осуществляется через методическое построение учебника. В методическом построении учебника должны реализовываться научные достижения психологии, педагогики, частной методики, учитываться закономерности процесса обучения учащихся на той или иной ступени. Учебник должен сообщать учащимся не только предусмотренные программой знания, но и вызывать интерес, прививать ученику уверенность в своих силах и возможностях, стимулировать самостоятельность, содержать материалы для самоконтроля.

К современным учебникам по геометрии для предъявляется много различных требований, в том числе: обеспечить осознанное усвоение геометрического материала; уделять особое внимание языку изложения; учить мыслить.

Все большую роль играет не только содержание, но и форма, не только что изложено, но и как изложено, так и возникает проблема языка учебника. Математический текст учебника все учащиеся должны понимать одинаково. Выбор слов в учебнике определяется тем, насколько учитывается мышление учащегося.

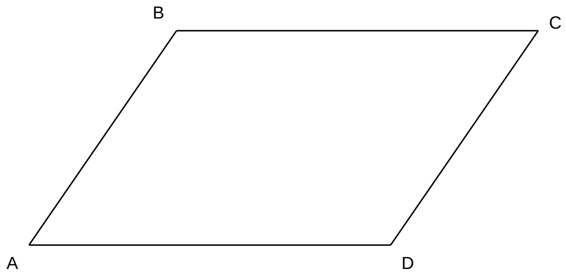
Задачу – учить самостоятельному мышлению- не все учебники математики выполняют успешно, что является самой трудной и важной проблемой, так как умение логично, четко и самостоятельно мыслить необходимо всем.

В ходе разработки модели учебника в качестве примера были рассмотрены учебники геометрии для 8 класса разных авторов: Л. С.Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, В. В. Шлыков, Э. Г. Позняк, И. И. Юдина, А. В. Погорелов, А. Г. Мерзляк, А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В.И.Рыжик, В. В. Казаков.

Из всех учебников более всего отличается учебник Л. С. Атанасяна и др., так как он написан настолько просто, ясно, доступно, что ученик без учителя сможет усвоить основные понятия геометрии. В качестве основы, при формировании ВКР, лежала идея о доступном для каждого ученика учебника по геометрии.

Параллелограмм. Его свойства и признаки

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.



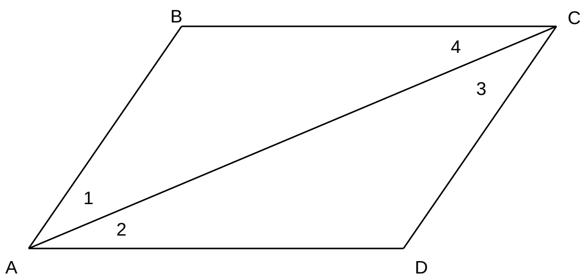
ABCD – параллелограмм

AB || CD, AD || DC

Свойство 1: В параллелограмме противоположные стороны равны, противоположные углы равны.

Дано: ABCD – параллелограмм
Доказать:

1) AB = CD, BC = AD
2) ∠A = ∠C, ∠B = ∠D

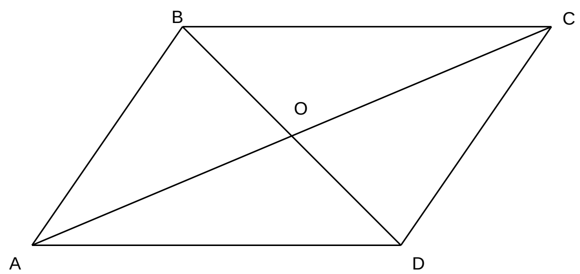


Доказательство:

1) AB || CD и AD || DC по определению => ∠1 = ∠2 (накрест лежащие при AB || CD и секущая AC), ∠2 = ∠4 (накрест лежащие при AD || DC и секущая AC)
2) ΔABC = ΔACD (по II признаку) => BC = AD, AB = CD, ∠B = ∠D
3) $\begin{matrix} \angle A = \angle 1 + \angle 2 \\ \angle C = \angle 3 + \angle 4 \\ \angle 1 = \angle 3 \\ \angle 2 = \angle 4 \end{matrix} \Rightarrow \angle A = \angle C$

Свойство 2: В параллелограмме сумма соседних углов равна 180° (доказать самостоятельно).

Свойство 3: Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.



Дано: ABCD – параллелограмм, AC ∩ BD = 0
Доказать: AO = OC, BO = OD
Доказательство:

1) AB = CD (по свойству параллелограмма)

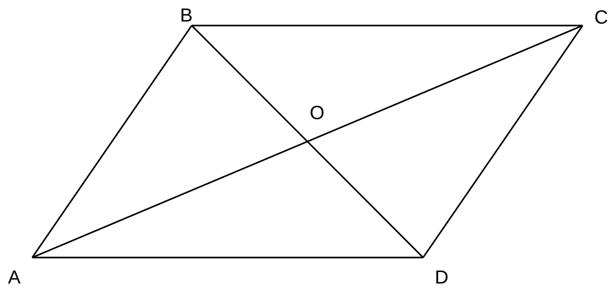
2) ∠DBA = ∠DBC – накрест лежащие при AB || CD (по определению параллелограмма) и BD – секущая

3) Аналогично ∠BAC = ∠DCA

Рассмотрим ∠BAO и ∠COD:

$$\begin{matrix} \angle DBA = \angle BDC \\ \angle BAC = \angle DCA \\ AB = CD \end{matrix} => \Delta BAO = \Delta COD \text{ (по I признаку) } => BO = OD, AO = OC$$

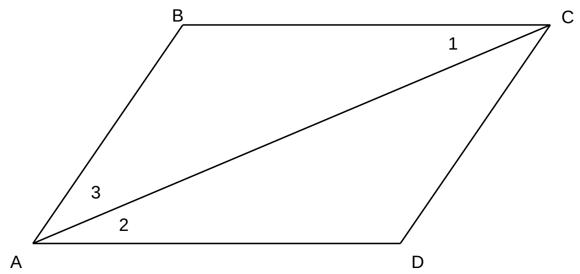
Свойство 4: Диагонали параллелограмма образуют равные треугольники (доказать самостоятельно).



ΔABC = ΔADC
ΔABD = ΔCBD
ΔABO = ΔCOD
ΔAOD = ΔBOC

Свойство 5: В параллелограмме а) биссектрисы противоположных углов параллельны или совпадают, б) биссектрисы соседних углов перпендикулярны.

а) Дано: ABCD – параллелограмм;
AE, CF – биссектрисы
Доказать: AE || CF
Доказательство:



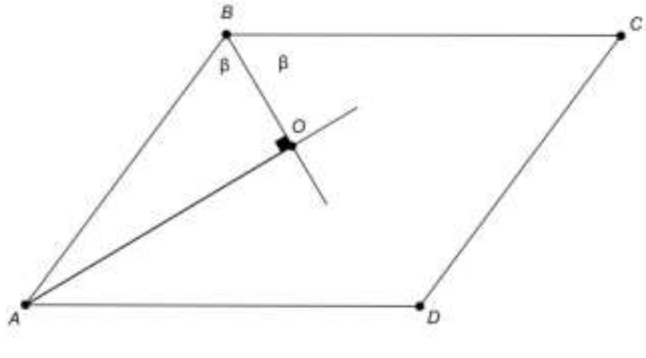
1) ∠1 = ∠2 (накрест лежащие при BC ||AD, OF – общая)

2) $\begin{matrix} \angle 1 = \frac{1}{2}\angle C \\ \angle 3 = \frac{1}{2}\angle A \end{matrix} \quad => \angle 1 = \angle 3$

$\angle A = \angle C$ (по свойству параллелограмма)

3) $\begin{matrix} \angle 1 = \angle 3 \\ \angle 1 = \angle 2 \end{matrix} => \angle 2 = \angle 3$ (соответственные при AE, CF прямых; AF секущей) => AE || CF

Биссектрисы совпадают, если они являются одной диагональю.



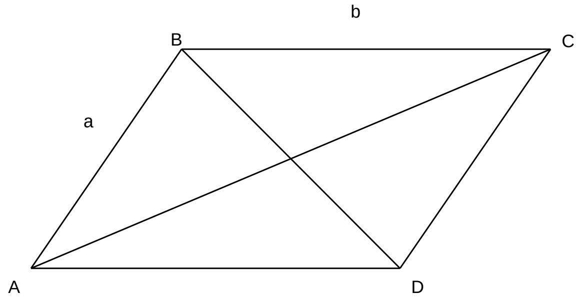
б) Дано: ABCD – параллелограмм, AO и BO – биссектрисы
Доказать: AO⊥BO
Доказательство:

1) 2α + 2β = 180° (по свойству параллелограмма)
α + β = 90°

2) Рассмотрим: ΔAOB
   $\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \angle BOA = 90° \Rightarrow BO \perp AO$

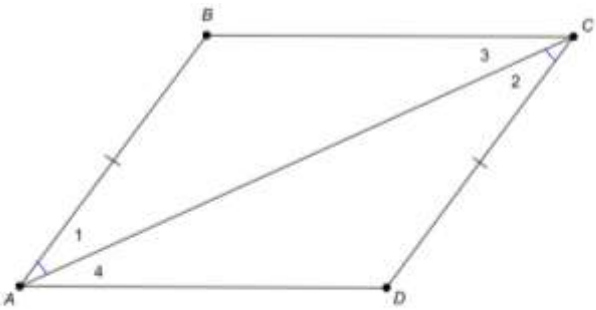
Свойство 6: В параллелограмме сумма квадратов всех сторон равна сумме квадратов диагоналей.

Дано: ABCD – параллелограмм,
AC = CD = a, AD = BC = b
Доказать: $(d_1)^2 + (d_2)^2 = 2a^2 + 2b^2$
Доказательство:



1) ΔABD: по теореме косинусов
   $d_1{}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\angle A$
2) ΔACD: по теореме косинусов
   $d_2{}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\angle D = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos\angle A$ =>
   $d_1{}^2 + d_2{}^2 = 2a^2 + 2b^2$

Признак 1: Если в четырехугольнике две противоположные стороны параллельны и равны, то это параллелограмм.

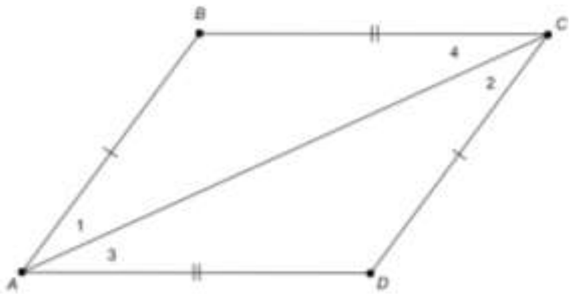


Дано: ABCD – четырехугольник,
AB||CD, AB = CD
Доказать: ABCD – параллелограмм
Доказательство:

1) $\angle 1 = \angle 2$ – накрест лежащие при AB||CD и секущей AC => $\angle 1 = \angle 2$

2) Рассмотрим: ΔABC и ΔADC :
   AB = CD (по условию), $\angle 1 = \angle 2$, AC – общая => $\Delta ABC = \Delta ADC$ (по 1 признаку) => $\angle 3 = \angle 4$, а они накрест лежащие при прямых AD и BC и секущей AC => AD||BC, AB||DC => ABCD – параллелограмм (по определению)

Признак 2: Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то это параллелограмм.

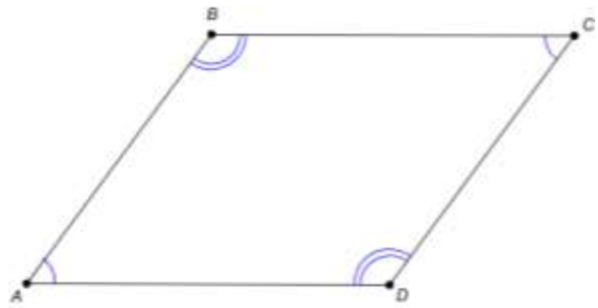


Дано: AD = BC, AB = CD
Доказать: ABCD – параллелограмм.
Доказательство:

1) Рассмотрим: ΔABC и ΔADC :
AB = CD, AD = BC, AC –общая =>

ΔABC и ΔADC(по III признаку) => $\angle 1 = \angle 2$, а они накрест лежащие при AB и CD, сек. AC; $\angle 3 = \angle 4$, а они накрест лежащие при BC и AD, сек. AC
=> AB||CD, BC||AD => ABCD – параллелограмм (по определению).

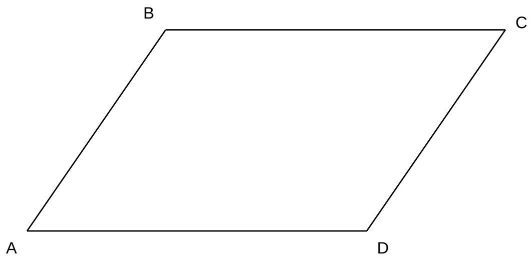
Признак 3: Если в четырехугольнике противоположные углы попарно равны, то это параллелограмм.



Дано: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$
Доказать: ABCD – параллелограмм.
Доказательство:

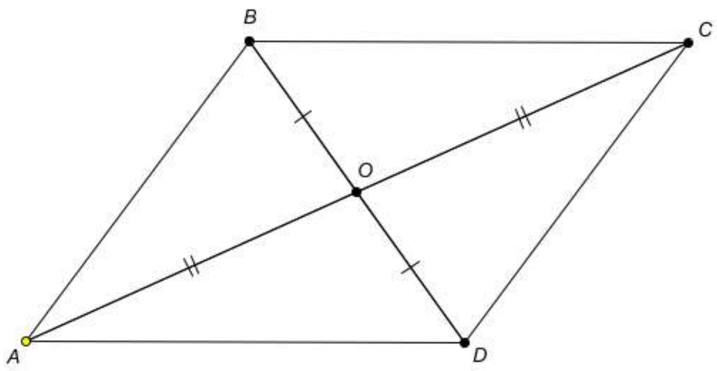
1) $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$,
   $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ =>
   $2\angle A+2\angle B = 360°$
   $\angle A+\angle B = 180°$, а они внутренние односторонние при AD и BC, секущей – AB => AD||BC
2) Аналогично $\angle B+\angle C = 180°$ => AB||CD => ABCD – параллелограмм (по определению)

Признак 4: Если в четырехугольнике суммы соседних углов равны 180° (хотя бы двух соседних пар), то это параллелограмм (доказать самостоятельно).



$\angle A+\angle B = 180°$
$\angle C+\angle D = 180°$ => ABCD – параллелограмм.

Признак 5: Если в четырехугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам, то это параллелограмм.



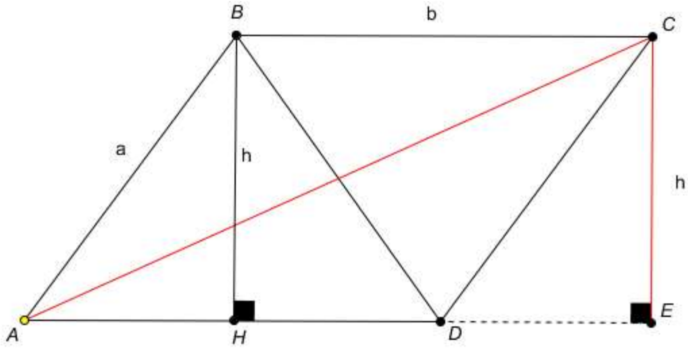
Дано: ABCD – четырехугольник, AO = OC, BO = OD, $AC \cap BD = 0$
Доказать: ABCD – параллелограмм.
Доказательство:

1) Рассмотрим ΔBOC и ΔAOD

∠BOC = ∠AOD (вертикальные), BO=OD, AO = OC => ΔBOC = ΔAOD (по I признаку) => BC = AD => ABCD – параллелограмм (по признаку).

2) Аналогично: ΔAOB = ΔCOD => AB = CD

Свойство 6: Если в четырехугольнике сумма квадратов всех сторон равна сумме квадратов диагоналей, то это параллелограмм.



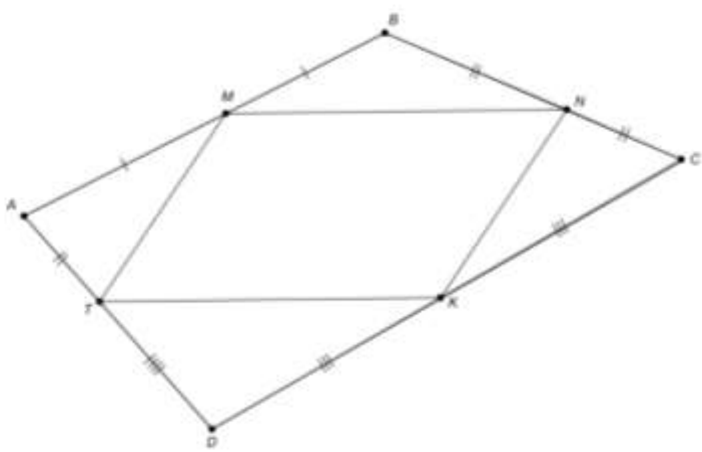
Дано: $2a^2 + 2b^2 = {d_1}^2 + {d_2}^2$

Доказать: ABCD – параллелограмм.

Доказательство:

1) BH⊥AD, BH = h, AH = x => HD = b–x
   из ΔABH : $h^2 = a^2 - x^2$,
   из ΔDBH : $h^2 = {d_1}^2 - (b-x)^2$=> $a^2 - x^2 = {d_1}^2 - (b-x)^2$
   $$a^2 - x^2 = {d_1}^2 - b^2 + 2bx - x^2$$
   $$x = \frac{a^2 + b^2 - {d_1}^2}{2b}$$
2) CE⊥AD, CE = h, DE = x => AE = $b + x$
3) Из ΔCDE : $h^2 = a^2 - x^2$, из ΔACE : $h^2 = {d_2}^2 - (b-x)^2$ =>
   $$a^2 - x^2 = {d_2}^2 - b^2 - 2bx - x^2$$
   $$x = \frac{a^2 + b^2 - {d_2}^2}{2b}$$
4) $\frac{a^2+b^2-{d_1}^2}{2b} = -\frac{a^2+b^2-{d_2}^2}{2b}$
   $$a^2 + b^2 - {d_1}^2 = -a^2 + b^2 - {d_2}^2$$
   $$2a^2 + 2b^2 = {d_1}^2 + {d_2}^2$$

Теорема Вариньона: Середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.



Дано: ABCD – четырехугольник, AM = MB, BN = NC, CK = KD, AT = TD.

Доказать: MNKT – параллелограмм.

Доказательство:

1)Рассмотрим: ΔABC
MN – средняя линия (по определению) => MN||AC, MN = $\frac{1}{2}$AC

2) Рассмотрим: ΔADC

TK – средняя линия (по определению) => $TK \parallel AC$, $TK = \frac{1}{2}AC$

=> $MN \parallel TK$, $MN = TK$ => MNTK – параллелограмм (по 1 признаку параллелограмма).

Свойства и признаки прямоугольника, ромба, квадрата.

Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые.

ABCD – прямоугольник

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

Т.к. прямоугольник – частный вид параллелограмма, то свойства параллелограмма справедливы для прямоугольника.

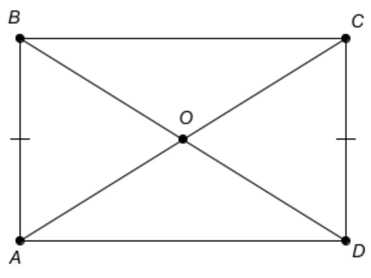
Свойство 1: Противоположные стороны прямоугольника параллельны и равны.

Свойство 2: Сумма соседних углов прямоугольника равна 180°.

Свойство 3: Биссектрисы соседних углов прямоугольника перпендикулярны, а противоположных параллельны.

Свойство 4: Диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Собственное свойство прямоугольника: Диагонали прямоугольника равны



Дано: ABCD – прямоугольник

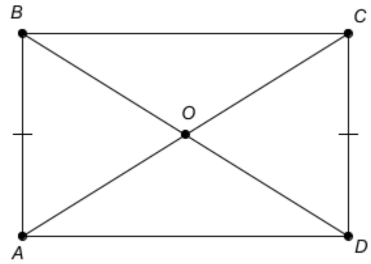
Доказать: AC = BD

Доказательство:

Рассмотрим: ΔABC и ΔBCD

AB = CD (по свойству прямоугольника), BC – общая, $\angle B = \angle C$ (равны 90° по определению) => $\Delta ABC = \Delta BCD$ (по 2 катетам) => AC = BD

Признак прямоугольника: Если в параллелограмме диагонали равны, то это прямоугольник.



Дано: ABCD – параллелограмм, AC = BD

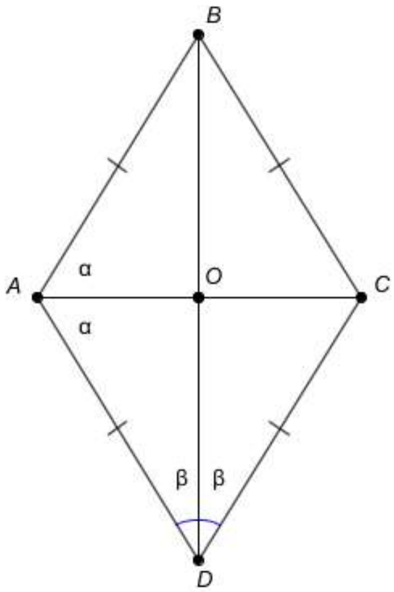
Доказать: ABCD – прямоугольник

Доказательство:

1) Рассмотрим: ΔABC и ΔBCD:
   AB = CD (по свойству параллелограмма), BC – общая, AC = BD (по условию) => ΔABC = ΔBCD (по III признаку) => ∠B = ∠C
2) ∠B + ∠C = 180° (по свойству параллелограмма), ∠B = ∠C => 2∠B = 180° => ∠B = 90° => ABCD – прямоугольник (по определению).

Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны.

Т.к. ромб – частный вид параллелограмма, то свойства параллелограмма справедливы для ромба.



Собственное свойство: В ромбе диагонали перпендикулярны и являются биссектрисами углов ромба.

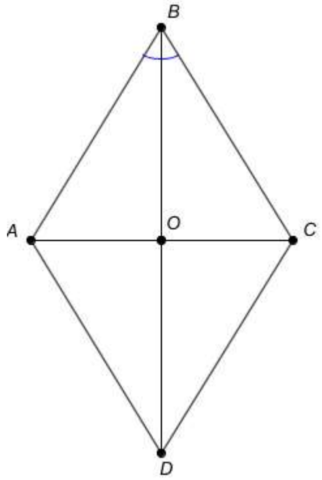
Дано: ABCD – ромб

Доказать: AC ⊥ BD; AC, BD – биссектрисы

Доказательство:

1) Рассмотрим: ΔABD и ΔCBD
   AB = BC = AD = CD (по определению), BD – общая => ΔABD = ΔCBD (по III признаку) => ∠ABD = ∠CBD, ∠ADB = ∠CDB => BD – биссектриса ∠ABC и ∠ADC
2) Аналогично ΔABC = ΔADC => ∠BAC = ∠CAD, ∠BAD и ∠BCD => AC –биссектриса ∠BCA = ∠DCA
3) ∠A+∠D = 2α + 2β = 180° (по свойству параллелограмма), ∠A = 2∠CAD (по признаку 2) = 2α, ∠D = 2∠ADB (по признаку 1) = 2β => ∠CAD+∠ADB = α + β = 90° => в ΔAOD ∠AOD = 90° => AC ⊥ BD

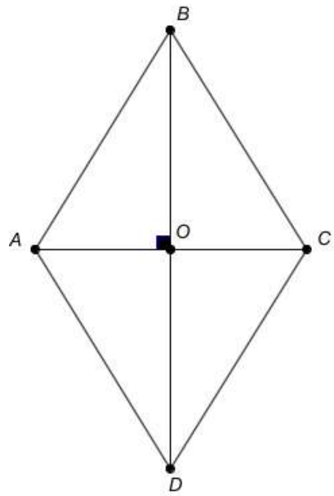
Признак 1: Если в параллелограмме диагональ является биссектрисой это ромб.



Дано: ABCD – параллелограмм, ∠ABD = ∠CBD
Доказать: ABCD – ромб
Доказательство:

1) ∠ABD = ∠CDB (накрест лежащие при AB||CD и BD – секущей), ∠CBD = ∠ADB (накрест лежащие при AD||BC и AC – секущей), ∠ABD = ∠CBD (по условию) => ∠ABD = ∠ADB, ∠CBD = ∠CDB => ∆ABD, ∆CBD – равнобедренные => AB=AD, BC=CD (по опр.) => AB = BC = CD = AD
2) AD = BC (по свойству параллелограмма) => ABCD – ромб (по определению

Признак 2: Если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то это ромб.



Дано: ABCD – параллелограмм, AC ⊥ BD
Доказать: ABCD – ромб
Доказательство:

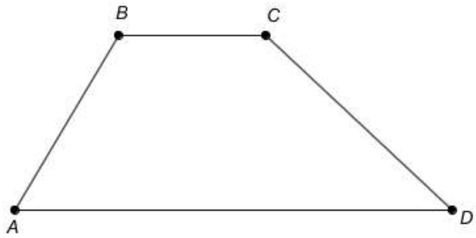
1) Рассмотрим: ∆AOD и ∆BOC –прямоугольные AD = BC (по свойству параллелограмма), ∠ADB = ∠CBD (накрест лежащие при AB||CD и BD – секущей) => ∆AOD = ∆BOC (по гипотенузе и острому углу) => AO = OC
2) AO = OC, AC ⊥ BD => BO – высота и медиана => ∆ABC – равнобедренный => AB = BC
3) AB = BC (по признаку 2), AB = CD (по свойству параллелограмма), BC = AD (по свойству параллелограмма) => AB = BC = CD = AD =>ABCD – ромб (по опр.)

Квадрат –

1) это параллелограмм, у которого все стороны равны и все углы прямые
2) это прямоугольник, у которого все стороны равны
3) это ромб, у которого все углы прямые

Т.к. квадрат частный случай параллелограмма, прямоугольника и ромба, то для него справедливы все свойства параллелограмма, прямоугольника и ромба.

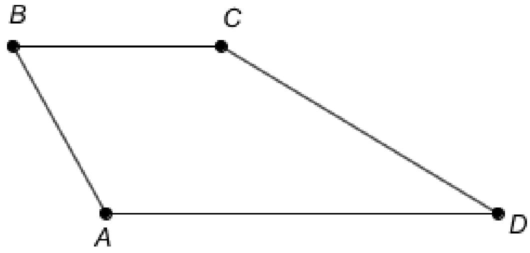
Трапеция



Трапеция – это выпуклый четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие нет. Параллельные стороны – основания, а не параллельные стороны – боковые.

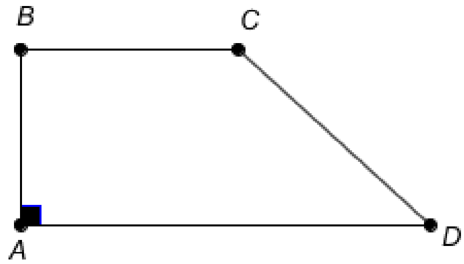
ABCD – трапеция, BC||AD, AB∦CD

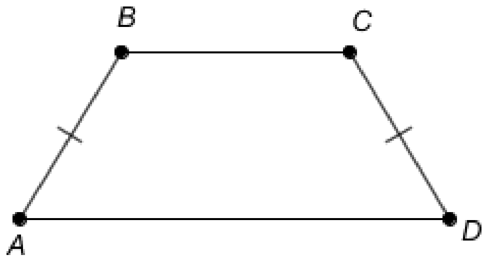
Виды трапеций:



Произвольная
BC||AD
AB∦CD

Прямоугольная AB⊥BC
AB ⊥AD
AB –меньшая боковая сторона

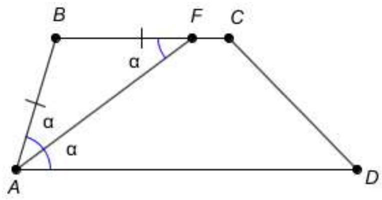


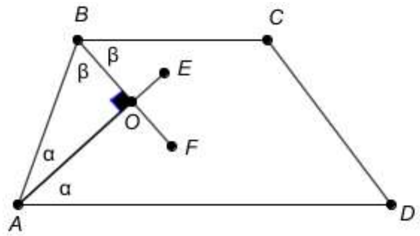


Равнобедренная
AB = CD
Равнобедренная трапеция – трапеция, у которой боковые стороны равны

Свойство трапеции:

1) В трапеции биссектриса угла отсекает равнобедренный треугольник (доказать самостоятельно)
AB = BF

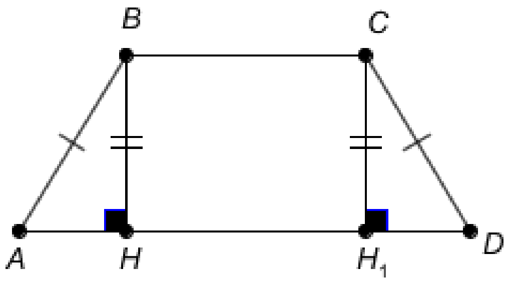




2) В трапеции биссектрисы соседних углов при боковой стороне перпендикулярны: BF⊥AE, 2α + 2β = 180° => α +β = 90°

Свойства равнобедренной трапеции:

Свойство 1: В равнобедренной трапеции углы при основании равны.



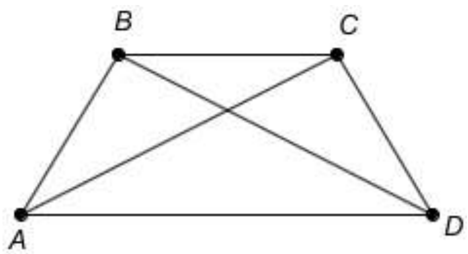
Дано: ABCD – равнобедренная трапеция

Доказать: ∠A = ∠D

Доказательство:

1) Дополнительное построение: BH⊥AD, CH_1⊥AD
2) Рассмотрим: ΔABH и ΔCDH_1 – прямоугольные
AB = CD (по определению равнобедренной трапеции), BH = CH_1 (расстояние между параллельными прямыми) => ΔABH=ΔCDH_1(по катету и гипотенузе) => ∠A = ∠D

Свойство 2: В равнобедренной трапеции диагонали равны.

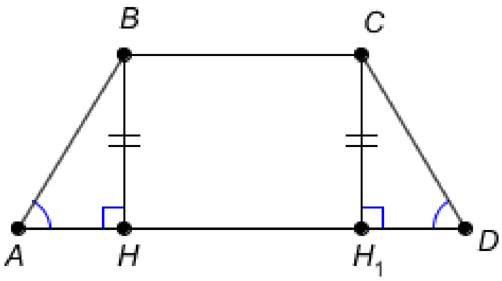


Дано: ABCD – равнобедренная трапеция

Доказать: AC = BD
Доказательство:
Рассмотрим: ΔABC и ΔBCD
BC – общая, AB = CD (по определению равнобедренной трапеции), ∠B = ∠C (по свойству равнобедренной трапеции) => ΔABC=ΔBCD (по I признаку) => AC=BD

Признаки равнобедренной трапеции:

Признак 1: Если в трапеции углы при основании равны, то это равнобедренная трапеция.



Дано: ABCD – трапеция

Доказать: ABCD – равнобедренная трапеция

Доказательство:

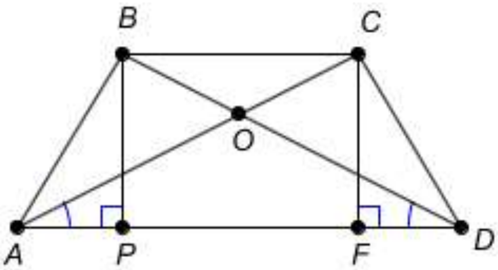
1) Дополнительное построение: BH⊥AD, CH_1⊥AD
2) Рассмотрим: ΔABH и ΔCDH_1 – прямоугольные, ∠A = ∠D (по условию), BH = CH_1 (расстояние между параллельными прямыми) => ΔABH=ΔCDH_1(по катету и противолежащему углу) => AB = CD => ABCD – равнобедренная трапеция (по определению)

Признак 2: Если в трапеции диагонали равны, то это равнобедренная трапеция.

Дано: ABCD – трапеция, AC = BD

Доказать: ABCD – равнобедренная трапеция

Доказательство:



1) Дополнительное построение: BP⊥AD, CF⊥AD
2) Рассмотрим: ΔACF и ΔDBP – прямоугольные
   BP = CF (высоты трапеции), AC = BD (по условию) => ΔACF = ΔDBP (по катету и гипотенузе) => ∠CAD = ∠BDA
3) Рассмотрим: ΔABD и ΔACD
   AC = BD (по условию), AD – общая, ∠CAD = ∠BDA => ΔABD = ΔACD (по I признаку) => AB = CD => ABCD – равнобедренная трапеция (по определению)

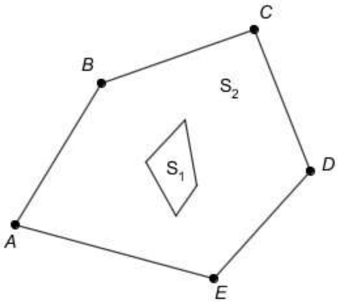
Площадь

Площадь многоугольника – это положительная величина, обладающая следующими характеристиками:

1) Площади равных многоугольников равны

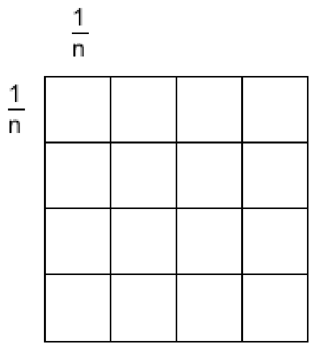
2) Если фигура разбита на части без взаимных внутренних точек, то площадь фигуры равна сумме площадей этих частей
3) Площадь квадрата со стороной равной 1 единице, равна 1 квадратной единице

Следствие 1: Площадь многоугольника, расположенного внутри другого многоугольника, будет не больше площади данного многоугольника



Доказательство: $S_{ABCDE} = S_1 + S_2$ (по определению);
S >0, $S_1 > 0, S_2 > 0$ (по определению) => $S_{ABCDE} > S_1$

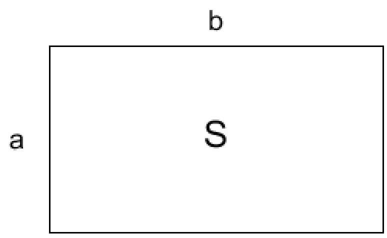
Следствие 2: Площадь квадрата со стороной $\frac{1}{n}$ равна $\frac{1}{n^2}$, где n∈N



Доказательство: Возьмем квадрат со стороной 1 ед. и поделим его стороны на n равных частей. Проведем прямые параллельные сторонам и получим n^2 равных квадратов.
Тогда по (2) $S = n^2 \ S_1$, где S_1 – площадь 1 части квадрата.
С другой стороны по (3) S_1 = 1 кв. ед. => $n^2 \ S_1 = 1$ => $S_1 = \frac{1}{n^2}$ – а это площадь квадрата со стороной $\frac{1}{n}$.

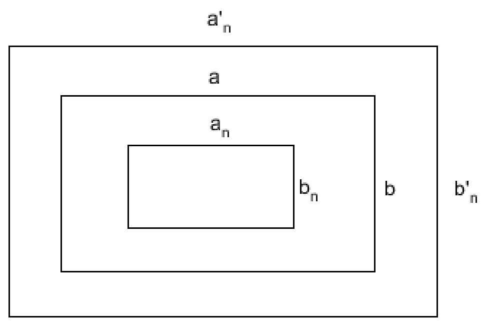
Теорема (Площадь прямоугольника): Площадь прямоугольника со сторонами a и b равна $a * b$.
Дано: a, b – стороны прямоугольника
Доказать: $S = a * b$
Доказательство:

1) Если a и b – рациональные числа, тогда $a = \frac{k}{n}$, $b = \frac{m}{n}$ (дроби всегда можно привести к общему знаменателю). Сторону a разделим на k равных частей, сторону b разделим на m равных частей. Получим k*m равных частей.
Проведем параллельные сторонам прямоугольника прямые и тогда образуются k*m равных квадратов со сторонами $\frac{1}{n}$.



Площадь каждого равна $\frac{1}{n^2}$, тогда площадь прямоугольника равна
$S = k * m * \frac{1}{n^2} = \frac{k}{n} * \frac{m}{n} = ab$

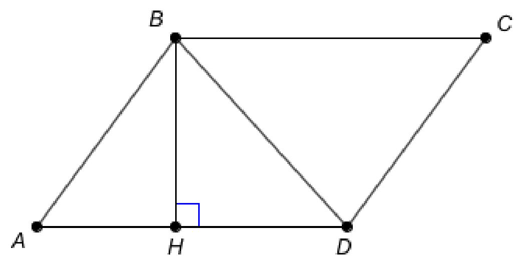
2) Если a и b – иррациональные числа (т.е. бесконечная десятичная непериодическая дробь)
Рассмотрим приближенные значения a и b, взятые по недостатку и по избытку с точностью до $\frac{1}{10^n}$, а десятичные знаки начиная с (n+1) отбросим.
Пусть a_n и b_n – это приближенные значения по недостатку, a'_n и b'_n по избытку.
Тогда ($a_n \leq a \leq a'_n$) * ($b_n \leq b \leq b'_n$) =>
$$a_n b_n \leq ab \leq a'_n b'_n \qquad (1)$$



Теперь рассмотрим площадь S трех прямоугольников.
Площадь S данного прямоугольника заключена между S_n и S'_n =>
$a_n b_n = S_n \leq S \leq S'_n = a'_n b'_n$ (т.к. a_n , b_n, a'_n, b'_n – рациональные) (2)

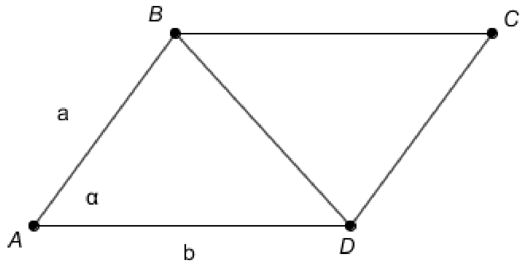
Теперь будем неограниченно увеличивать число n, значит $\frac{1}{10^n}$ – становится сколь угодно малым, а значит $a_n b_n$ – сколь угодно мало отличается от $a'_n b'_n$
(n → ∞ => $\frac{1}{10^n}$ → 0 => $a_n b_n \to a'_n b'_n$)
Поэтому из неравенства (1) и (2) площадь S сколь угодно мало отличается от ab, т.е. они равны.

Теорема: Площадь параллелограмма равна произведению высоты на его основание, к которому проведена эта высота.



Дано: ABCD – параллелограмм, BH⊥AD
Доказать: $S_{ABCD} = BH * AD$
Доказательство:

1) $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} BH * AD$
ΔABD = ΔCBD (по свойству параллелограмма) => $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta CBD}$
=> $S_{ABCD} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta CBD} = 2S_{\Delta ABD} = 2 * \left(\frac{1}{2} BH * AD\right) = BH * AD$



Теорема: Площадь параллелограмма равна произведению синусу его угла и сторон, заключающих этот угол.

Дано: a, b – стороны параллелограмма, $\angle BAD = \alpha$

Доказать: $S_{ABCD} = ab * \sin\alpha$

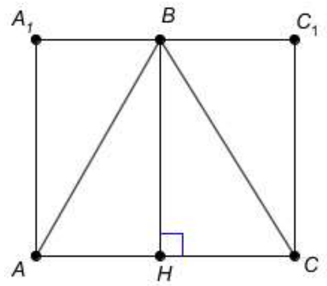
Доказательство: $S_{ABCD} = 2S_{\Delta \text{ABD}} = 2 * \frac{1}{2} * \sin\alpha * a * b = ab * \sin\alpha$

Теорема: Площадь треугольника равна полупроизведению высоты треугольника на его основание, к которому проведена эта высота.

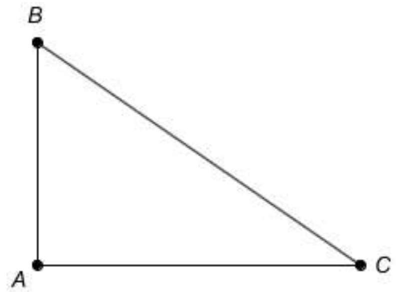
Дано: ΔABC, BH⊥AC

Доказать: $S_{\Delta \text{AB}C} = \frac{1}{2} BH * AC$

Доказательство:



1) Достроим ΔABH и ΔCBH до прямоугольников AA_1BH и CC_1BH
2) $S_{AA_1BH} = BH * AH, S_{CC_1BH} = BH * HC$ =>
   $S_{\Delta \text{AB}H} = \frac{BH*AH}{2}$,
   $S_{\Delta \text{CBH}} = \frac{1}{2} S_{CC_1BH} = \frac{1}{2} BH * HC$ (по свойству прямоугольника и определению площади) =>
   $S_{\Delta \text{AB}C} = \frac{1}{2} BH * AH + \frac{1}{2} BH * HC = \frac{1}{2} BH * (AH + HC) = \frac{1}{2} BH * AC$
   $S_{\Delta \text{AB}C} = S_{\Delta \text{AB}H} + S_{\Delta \text{CBH}}$ (по 2)



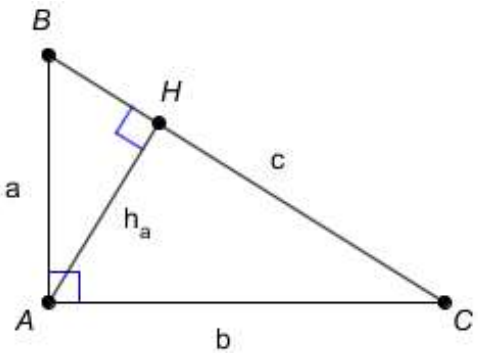
Следствие 1: Площадь прямоугольного треугольника равна полупроизведению его катетов.

Дано: ΔABC : ∠A = 90°

Доказать: $S_{\Delta \text{AB}C} = \frac{1}{2} AC * BC$

Доказательство: $S_{\Delta} = \frac{1}{2} h_a * a$, т.к. BC⊥AC => $S_{\Delta \text{AB}C} = \frac{1}{2} AC * BC$

Следствие 2: В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, равна произведению катетов деленному на гипотенузу.



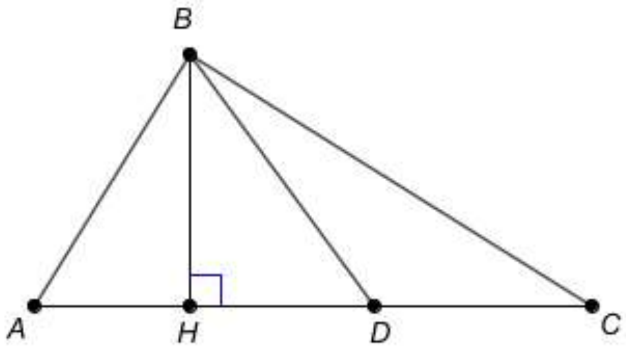
Дано: ΔABC : $\angle$A = 90°, AH$\perp$BC, AB = a, AC = b, BC = c, AH = h_a

Доказать: $h_a = \frac{ab}{c}$

Доказательство: $S_{\Delta \mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}ab,$

$S_{\Delta \mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}h_a * c \Rightarrow ab = h_a * c \Rightarrow$

$h_a = \frac{ab}{c}$

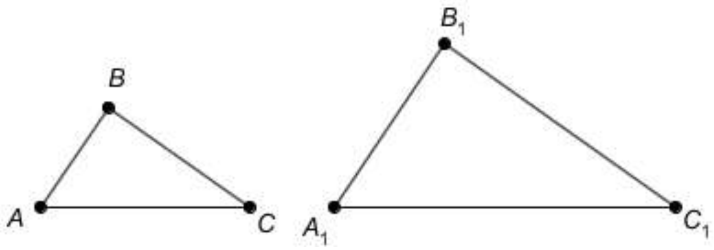


Следствие 3: Площади треугольников с равными высотами (основаниями) относятся так же, как и их основания (высоты).

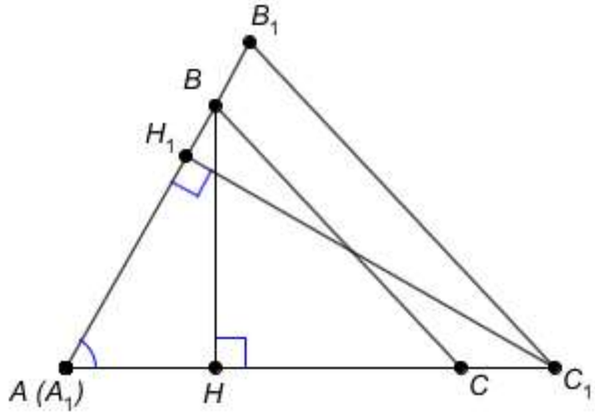
Дано: ΔABC, BH – высота, ΔABD, BH – высота

Доказать: $\frac{S_{\Delta \mathrm{ABC}}}{S_{\Delta \mathrm{ABD}}} = \frac{AC}{AD}$

Доказательство: $S_{\Delta \mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}BH * AC, S_{\Delta \mathrm{ABD}} = \frac{1}{2}BH * AD \Rightarrow \frac{S_{\Delta \mathrm{ABC}}}{S_{\Delta \mathrm{ABD}}} = \frac{BH*AC}{BH*AD} = \frac{AC}{AD}$



Следствие 4: Если угол одного треугольника соответственно равен углу другого треугольника, то площади таких треугольников относятся как произведение длин сторон, заключающих равные углы.



Дано: ΔABC, $\Delta \mathrm{A_1B_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$

Доказать: $\frac{S_{\Delta \mathrm{ABC}}}{S_{\Delta \mathrm{A_1B_1C_1}}} = \frac{AB*AC}{\mathrm{A_1B_1}*\mathrm{A_1C_1}}$

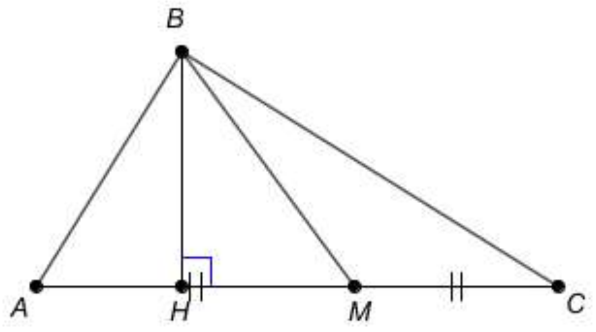
Доказательство:

1) ΔABC на $\Delta \mathrm{A_1B_1C_1}$,
   так $\angle A_1$ совпадает с $\angle$A
2) BH – общая высота ΔABC и $\Delta \mathrm{A_1B_1C_1} \Rightarrow \frac{S_{\Delta \mathrm{ABC}}}{S_{\Delta ABC_1}} = \frac{AC}{AC_1}$ (*)

3) C_1H_1 – общая высота $\Delta A_1B_1C_1$ и ΔABC_1 => $\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1,}}{S_{\Delta ABC_1}} = \frac{A_1B_1}{AB}$ (**)

4) Разделим (*) на (**)

$$\frac{\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABC_1}}}{\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1,}}{S_{\Delta ABC_1}}} = \frac{\frac{AC}{AC_1}}{\frac{A_1B_1}{AB}} \Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{AB * AC}{A_1B_1 * A_1C_1}$$



Следствие 5: Медиана треугольника делит его на 2 равновеликих треугольника.

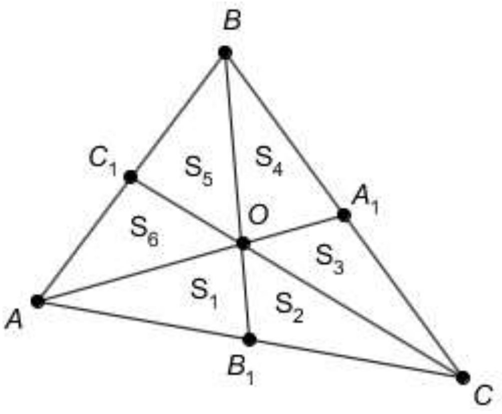
Дано: ΔABC, BM – медиана

Доказать: $S_{\Delta ABM} = S_{\Delta CBM}$

Доказательство: Пусть BM ⊥ AC, тогда $S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} BM * AM,$

$S_{\Delta CBM} = \frac{1}{2} BM * MC,$ AM = MC (BM – медиана) => $S_{\Delta ABM} = S_{\Delta CBM}$.

Следствие 6: При пересечении медиан треугольника образуется 6 равновеликих треугольников.



Дано: ΔABC, AA_1, BB_1, CC_1 – медианы

Доказать: $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6$

Доказательство:

1) Рассмотрим ΔAOC, OB_1 – медиана => $S_1 = S_2$. Аналогично $S_3 = S_4$, $S_5 = S_6$

2) $S_{\Delta ABB_1} = S_{\Delta CBB_1}$ (ΔABC, BB_1 – медиана) , $S_1 + S_6 + S_5 = S_2 + S_3 + S_4$, $S_1 = S_2$ => $S_6 + S_5 = S_3 + S_4$; $S_3 = S_4$, $S_5 = S_6$ => $S_3 = S_4 = S_5 = S_6$

3) Аналогично => $S_1 = S_6$

Таким образом все 6 треугольников равновеликие.

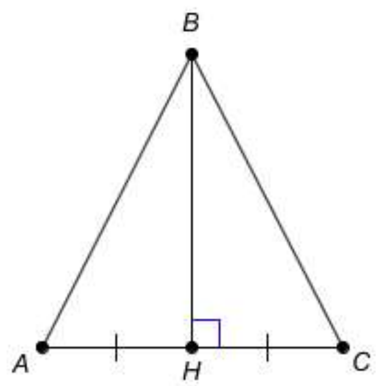
Следствие: (Площадь равностороннего треугольника)

Дано: ΔABC – равносторонний, AB = a

Доказать: $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Доказательство:

1) Пусть BH⊥AC, AH = HC = $\frac{a}{2}$

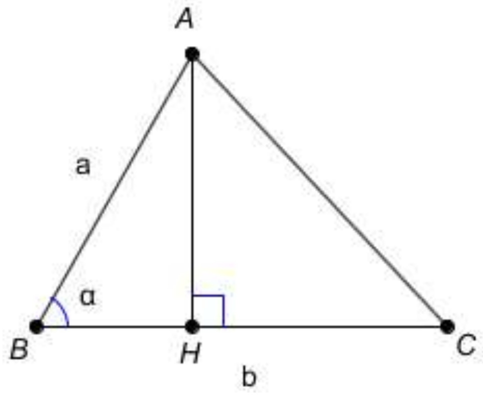


2) ΔABC : $\angle ABC = 90°$ => по теореме Пифагора $BH^2 = AB^2 - AH^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$ =>

BH = $\sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

3) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BH * AC = \frac{1}{2} * \frac{a\sqrt{3}}{2} * a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Таким образом площадь равностороннего треугольника равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$



Теорема: Площадь треугольника равна полупроизведению синуса угла треугольника на стороны, заключающие данный угол.

Дано: ΔABC, AB = a, AC = b, $\angle A = \alpha$

Доказать: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} * \sin\alpha * a * b$

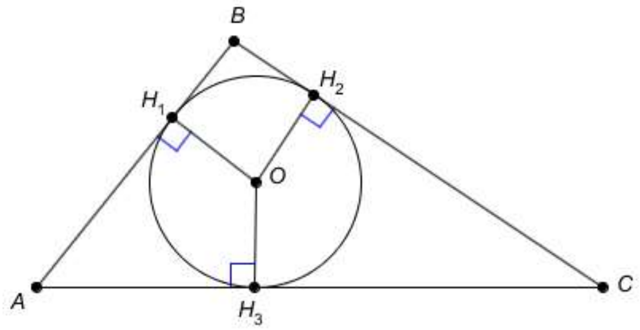
Доказательство:

1) BH⊥AC, BH = h

ΔABH : $\angle AHB = 90°$ => $\sin\alpha = \frac{h}{a}$ =>

h = a $* \sin\alpha$

2) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BH * AC = \frac{1}{2} * h * b = \frac{1}{2} * \sin\alpha * a * b$



Теорема: Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной в него окружности.

Дано: ΔABC, в него вписана окружность

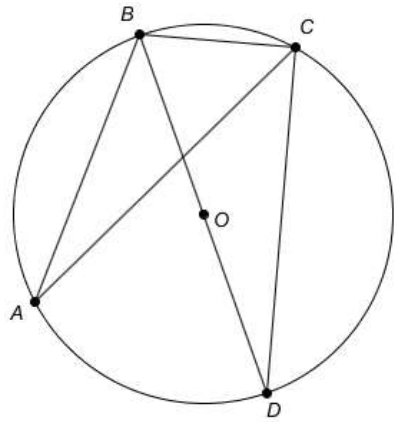
Доказать: $S_{\Delta ABC} = p * r$

Доказательство:

1) Т.к. O – центр вписанной окружности => $OH_1 = OH_2 = OH_3 = r$ (⊥AB, BC, AC)

2) $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} * r * AB + \frac{1}{2} * r * BC + \frac{1}{2} * r * AC = \frac{1}{2} * r(AB + BC + AC) = p * r$

Теорема: Площадь треугольника равна отношению произведения всех его сторон к четырем радиусам описанной окружности.



Дано: ΔABC

Доказать: $S_{\Delta ABC} = \frac{a*b*c}{4R}$

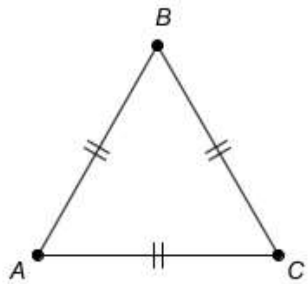
Доказательство:

1) Пусть AB = c, BC = a, AC = b, BD – диаметр
2) ΔBDC : ∠C = 90° (опирается на диаметр),

   BC = a, BD = 2R => sin ∠BDC = $\frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}$
3) Рассмотрим ΔABC: ∠BAC = ∠BDC = $\frac{1}{2}$ ◡BC => sin ∠BAC = $\frac{a}{2R}$

   $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} * b * c * \sin\angle BAC = \frac{abc}{4R}$

Следствие (Площади равностороннего треугольника):



- Через радиус описанной окружности

AB = a => R = $a\frac{\sqrt{3}}{3}$ => a = $\sqrt{3} * R$

$S_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2*3\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}*R^2}{4}$

Таким образом $S_{\text{равностороннего } \Delta} = \frac{3\sqrt{3}*R^2}{4}$

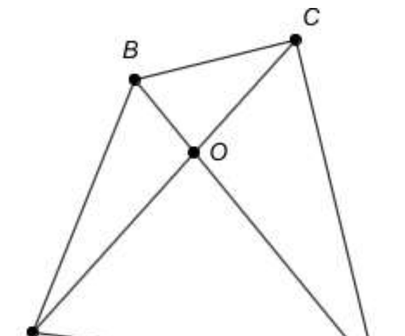
- Через радиус вписанной окружности

AB = a => r = $a\frac{\sqrt{3}}{6}$ => a = $2\sqrt{3} * r$

$S_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{12\sqrt{3}*r^2}{4} = 3\sqrt{3} * r^2$

Таким образом $S_{\text{равностороннего } \Delta} = 3\sqrt{3} * r^2$

Площадь четырехугольника



Теорема: Площадь выпуклого четырехугольника равно полупроизведению его диагоналей на синус угла между ними.

Дано: ABCD – четырехугольник

Доказать: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} * d_1 * d_2 * \sin\alpha$

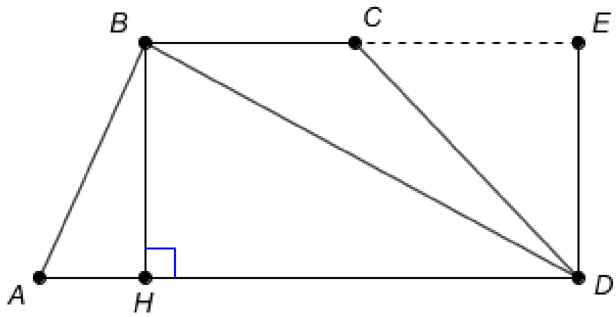
Доказательство:

1) Пусть AC = d_1, BD = d_2, ∠AOB = α

2) $S_{\text{ABCD}} = S_{\Delta\text{AOB}} + S_{\Delta\text{BOC}} + S_{\Delta\text{COD}} + S_{\Delta\text{AOD}} = \frac{1}{2} * \sin\alpha * AO * OB + \frac{1}{2} * \sin(180-\alpha) * BO * OC + \frac{1}{2} * \sin\alpha * OC * OD + \frac{1}{2} * \sin(180-\alpha) * AO * OD = \frac{1}{2} * \sin\alpha * (AO * OB + BO * OC + OC * OD + AO * OD) = \frac{1}{2} * \sin\alpha * \big(AO * (OB + OD) + OC * (OB + OD)\big) = \frac{1}{2} * \sin\alpha$

$S_{\text{ABCD}} = \frac{1}{2} * \sin\alpha * d_1 * d_2$

Площадь трапеции



Теорема: Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

Дано: ABCD – трапеция, BH⊥AD, DE⊥BC, BC = b, AD = a, BH = h

Доказать: $S_{\text{ABCD}} = \frac{a+b}{2} * h$

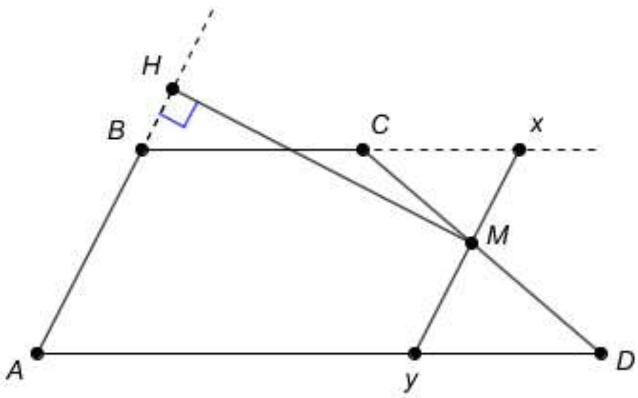
Доказательство:

$S_{\text{ABCD}} = S_{\Delta\text{ABD}} + S_{\Delta\text{BCD}}$

$S_{\Delta\text{ABD}} = \frac{1}{2} * BH * AD$, $S_{\Delta\text{BCD}} = \frac{1}{2} * DE * BC$, BH = DE = h

=> $S_{\text{ABCD}} = \frac{1}{2} * BH * AD + \frac{1}{2} * DE * BC = \frac{1}{2} * BH * (AD + BC) = \frac{AD+BC}{2} * BH = \frac{a+b}{2} * h$

Теорема: Площадь трапеции равна произведению боковой стороны и перпендикуляра, проведенного из середины другой стороны к первой.



Дано: ABCD – трапеция, CM = MD, MH⊥AB

Доказать: $S_{\text{ABCD}} = AB * MH$

Доказательство:

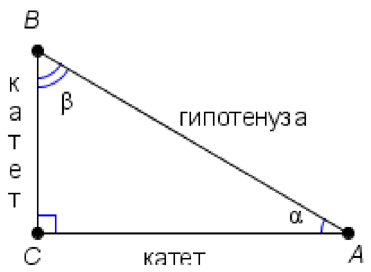
1) Дополнительное построение: XY || AB. Тогда BC || AD, XY || AB => ABXY – параллелограмм (по определению), таким образом $S_{\text{AB}XY} = MH * AB$. С другой стороны $S_{\text{AB}XY} = S_{\text{ABCMY}} + S_{\Delta\text{CMX}} = MH * AB$
2) Рассмотрим: ΔCMX и ΔDMY
   CM = MD (по условию), ∠CMX = ∠DMY (вертикальные), ∠XCM = ∠MDY (накрест лежащие при BC || AD и секущей – CD) => ΔCMX = ΔDMY (по II

признаку) =>

$S_{\Delta \mathrm{CMX}} = S_{\Delta \mathrm{DMY}}$

3) $S_{\mathrm{ABCMY}} + S_{\Delta \mathrm{CMX}} = MH * AB$, $S_{\mathrm{ABCMY}} + S_{\Delta \mathrm{DMY}} = S_{\mathrm{ABCD}}$, $S_{\Delta \mathrm{DMY}} = S_{\Delta \mathrm{CMX}}$ => $S_{\mathrm{ABCD}} = MH * AB$

Соотношение между элементами прямоугольного треугольника.



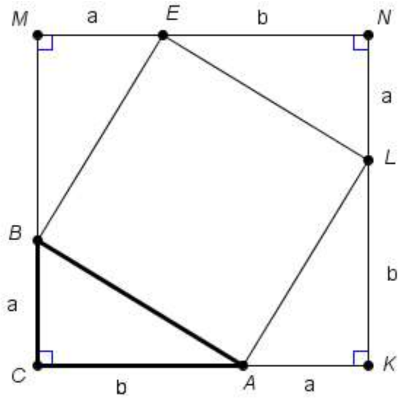
1) **Прямоугольный треугольник** – это треугольник у которого один угол прямой, а другие два острые.

Катетами называются стороны прямоугольного треугольника, прилежащие к прямому углу.

Гипотенуза – сторона прямоугольного треугольника, которая лежит напротив прямого угла.

2) Сумма острых углом прямоугольного треугольника равна 90°

$$\alpha + \beta = 90°$$



3) **Теорема Пифагора:** В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

Дано: ΔABC : AB = c, BC = a, AC = b, ∠C = 90°

Доказать: $a^2 + b^2 = c^2$

Доказательство:

Достроим ΔABC до квадрата CMNK со стороной (a + b). Тогда $S_{CMNK} = (\mathrm{a} + \mathrm{b})^2$

ΔABC = ΔBME = ΔENL = ΔLKA (по двум катетам) => их площади равны $S_{\Delta \mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}ab$

Пусть ∠CAB = α, ∠CBA = β= ∠LAK (в ΔLKA), $\alpha + \beta = 90°$ (по свойству прямоугольного треугольника) => ∠BAL = $180° - (\alpha + \beta) = 90°$

Аналогично в четырехугольнике все углы прямые и все стороны равны (из равенства треугольников) => BELA – квадрат => $S_{BELA} = \mathrm{c}^2$

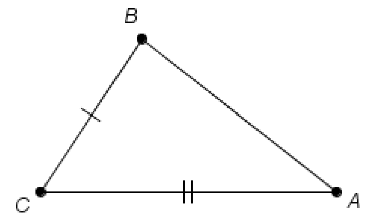
Таким образом $S_{CMNK} = 4 * S_{\Delta \mathrm{ABC}} + S_{BELA} = 4 * \frac{1}{2}ab + \mathrm{c}^2$ =>

$$(\mathrm{a} + \mathrm{b})^2 = 2ab + \mathrm{c}^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + \mathrm{c}^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Обратная теорема Пифагора: Если в треугольнике квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других сторон, то этот треугольник прямоугольный.



Дано: $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Доказать: ΔABC – прямоугольный.

Доказательство:

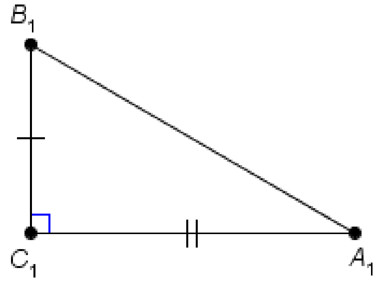
1) Построим $\Delta A_1B_1C_1$ такой, что $\angle C_1 = 90^0$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$.

   Тогда по теореме Пифагора в $\Delta\ A_1B_1C_1$: $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$

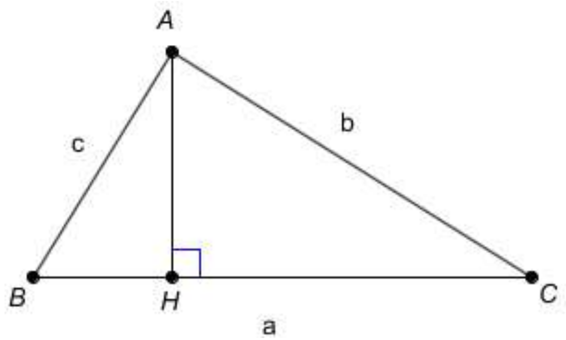
   $AB^2 = AC^2 + BC^2$

   $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ => $AB = A_1B_1$

2) $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ => $\angle C = \angle C_1 = 90^0$ =>
   ΔABC – прямоугольный.



Формула Герона



Дано: ΔABC : $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$

Найти: $S_{\Delta ABC}$

Решение:

1) Пусть $AH \perp BC$, $AH = h_a$, $BH = x$, $HC = a - x$

2) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH * BC = \frac{1}{2} * h_a * a$

3) В ΔABH : $\angle\ AHB = 90°$ => по теореме Пифагора ${h_a}^2 = c^2 - x^2$, в ΔAHC : $\angle\ AHC = 90°$ => по теореме Пифагора ${h_a}^2 = b^2 - (a - x)^2$ => $c^2 - x^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2$

   $2ax = a^2 + c^2 - b^2$ => $x = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$

   Тогда ${h_a}^2 = c^2 - x^2 = c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2 = c^2 - \frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2} = \frac{1}{4a^2}(2ac - a^2 - c^2 + b^2)(2ac + a^2 + c^2 - b^2) = \frac{1}{4a^2}(b^2 - (a-c)^2)((a+c)^2 - b^2) = \frac{1}{4a^2}(b - a + c)(b + a - c)(a + c - b)(a + c + b)$

4) $a + c + b = 2p$ (p – полупериметр)

   $a + c - b = a + c + b - 2b = 2p - 2b$

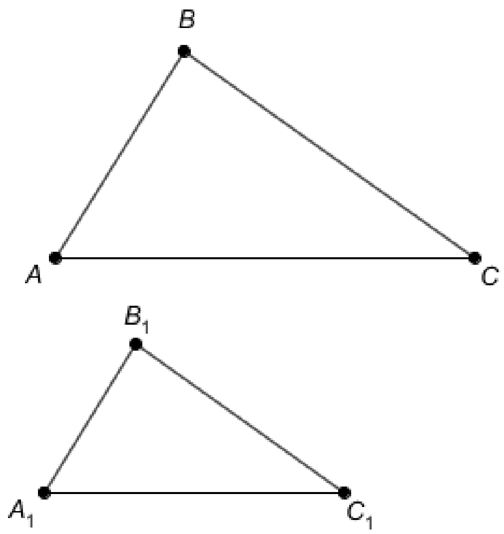
   $b + a - c = 2p - 2c$

   $b - a + c = 2p - 2a$

Тогда ${h_a}^2 = \frac{1}{4a^2} * 2^4 * p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{4}{a^2} * p(p-a)(p-b)(p-c)$

5) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} * h_a * a \Rightarrow {S_{\Delta ABC}}^2 = \frac{1}{4} * {h_a}^2 * a^2 = \frac{1}{4} * \frac{4}{a^2} * p(p-a)(p-b)(p-c) * a^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

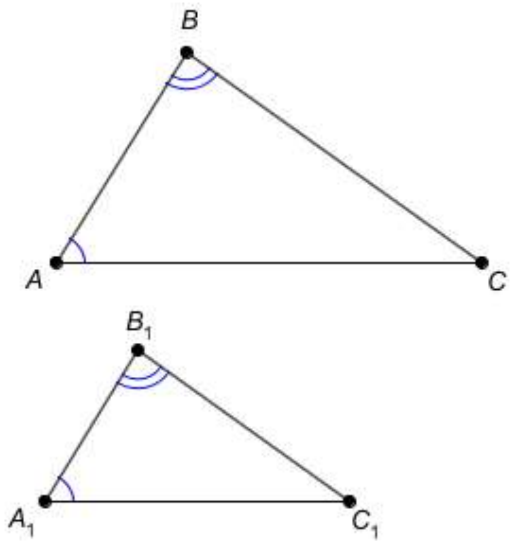
Подобие треугольников



Два треугольника называются подобными если их углы равны, а сходственные стороны пропорциональны (сходственные – лежащие против равных углов). Коэффициент пропорциональности называется коэффициентом подобия.
$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$
$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$, k – коэффициент подобия, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

Сформулируем и докажем признаки подобия треугольников:

Признак 1: Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то эти треугольники подобны.



Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$
Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$
Доказательство:

1) В ΔABC $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$, в $\Delta A_1B_1C_1$ $\angle C_1 = 180° - (\angle A_1 + \angle B_1)$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1 \Rightarrow \angle C = \angle C_1$
Таким образом в ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ – все углы равны соответственно.

2) Т.к. $\angle A = \angle A_1 \Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{AB*AC}{A_1B_1*A_1C_1}$, т.к. $\angle B = \angle B_1 \Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{AB*BC}{A_1B_1*B_1C_1} \Rightarrow \frac{AB*AC}{A_1B_1*A_1C_1} = \frac{AB*BC}{A_1B_1*B_1C_1} \Rightarrow \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$

3) Аналогично докажем $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$ (из ∠A = $\angle A_1$, ∠C = $\angle C_1$), таким образом в ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$: $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$

ΔABC ~ $\Delta A_1B_1C_1$ (по определению)

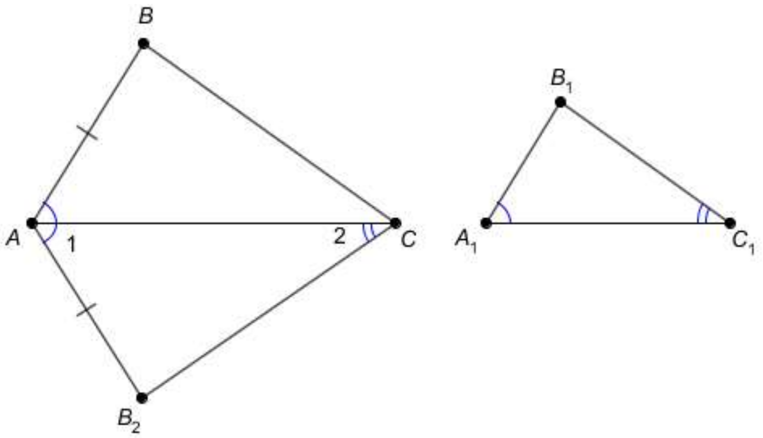
Признак 2: Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, заключенные между этими сторонами равны, то такие треугольники подобны.

Дано: : ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$,

$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, ∠A = $\angle A_1$

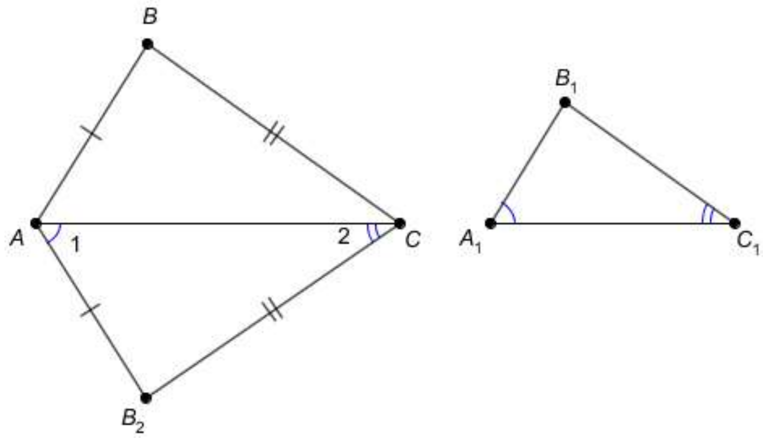
Доказать: ΔABC ~ $\Delta A_1B_1C_1$

Доказательство:



1) Построим ΔAB_2C:
   ∠1 = $\angle A_1$, ∠2 = $\angle C_1$.
   Тогда $\Delta AB_2C \sim \Delta A_1B_1C_1$ (по I признаку) =>
   $\frac{AB_2}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ (по определению), $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ (по условию) => $\frac{AB_2}{A_1B_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$ => $AB = AB_2$
2) Рассмотрим ΔABC и ΔAB_2C: ∠A = $\angle A_1 = \angle 1$, AC – общая, $AB = AB_2$ => ΔABC = ΔAB_2C (по I признаку) => $\angle C = \angle 2$ => $\angle C_1 = \angle 2$
   Таким образом в ΔABC и ΔAB_2C: ∠A = $\angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ => ΔABC ~ $\Delta A_1B_1C_1$ (по I признаку).

Признак 3: Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то эти треугольники подобны.



Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$,

$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$

Доказать: ΔABC ~ $\Delta A_1B_1C_1$

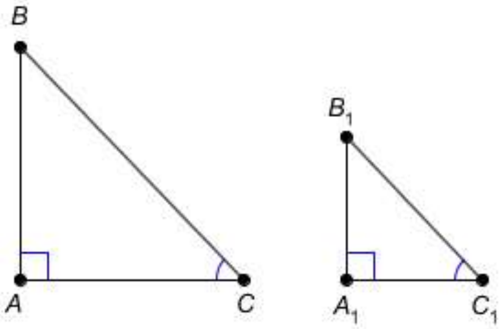
Доказательство:

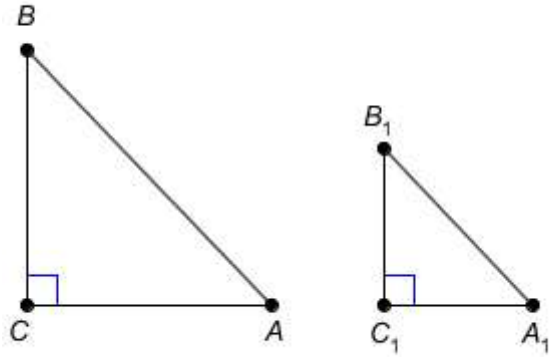
1) Построим ΔAB_2C:
   ∠1 = $\angle A_1$, ∠2 = $\angle C_1$. Тогда $\Delta AB_2C \sim \Delta A_1B_1C_1$ (по I признаку) => $\frac{AB_2}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{B_2C}{B_1C_1}$ (по определению), $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ (по условию) => $AB = AB_2$, $BC = B_2C$

2) Рассмотрим ΔABC и ΔAB_2C: $AB = AB_2$, $BC = B_2C$, AC – общая => ΔABC = ΔAB_2C (по III признаку).
3) Таким образом ∠A = $\angle A_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ => ΔABC ~ $\Delta A_1B_1C_1$ (по II признаку)

Признаки подобия прямоугольных треугольников

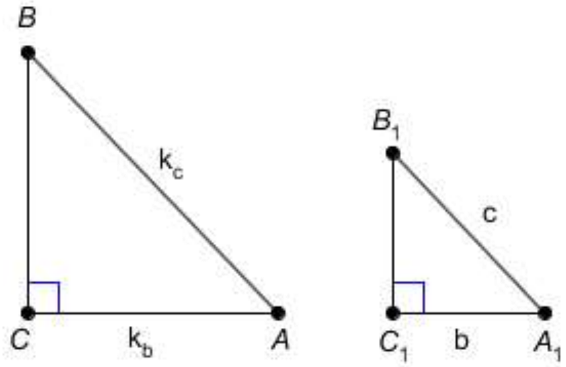
Признак 1: Если острый угол одного прямоугольного треугольника равен строму углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны.
∠A = $\angle A_1 = 90°$, $\angle C = \angle C_1$ =>
ΔABC ~ $\Delta A_1B_1C_1$ (по I признаку).





Признак 2: Если катеты одного прямоугольного треугольника пропорциональны катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны.
$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$ =>
ΔABC ~ $\Delta A_1B_1C_1$ (по II признаку).

Признак 3: Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны.



1) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$
2) В $\Delta A_1B_1C_1$ по теореме Пифагора $B_1C_1{}^2 = c^2 - b^2$, в ΔABC по теореме Пифагора
$BC^2 = (kc)^2 - (kb)^2$ =>

$\frac{B_1C_1{}^2}{BC^2} = \frac{c^2-b^2}{k(c-b)^2} = \frac{1}{k}$ => $\frac{BC}{B_1C_1} = k$

3) Таким образом $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$ => ΔABC ~ $\Delta A_1B_1C_1$ (по III признаку).

Теорема о соотношении линейных элементов подобных треугольников.

Высоты: Соответствующие высоты подобных треугольников пропорциональны с коэффициентом подобия k.

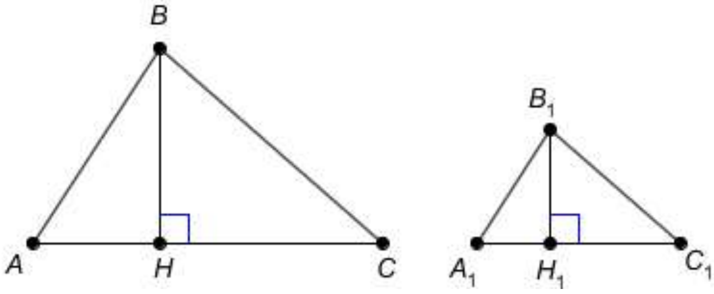
Дано: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$,

k – коэффициент подобия,

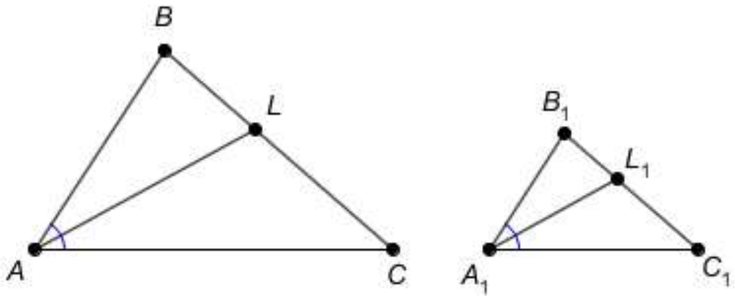
$BH \perp AC$, $B_1H_1 \perp A_1C_1$

Доказать: $\frac{BH}{B_1H_1} = k$

Доказательство:



1) $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$=> $\angle A = \angle A_1, \frac{AB}{A_1B_1} = k$
2) Рассмотрим ΔABH и $\Delta A_1B_1H_1$: $\angle AHB = \angle A_1H_1B_1 = 90°$, $\angle A = \angle A_1$ => $\Delta ABH \sim \Delta A_1B_1H_1$ => $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BH}{B_1H_1} = k$

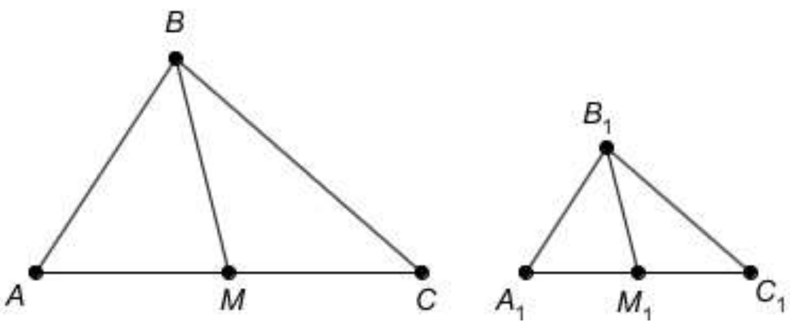


Биссектрисы: В подобных треугольниках соответственные биссектрисы пропорциональны с коэффициентом подобия.

1) $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, k – коэффициент подобия => $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$=> $\angle BAL = \angle B_1A_1L_1, \frac{AB}{A_1B_1} = k$
2) В ΔBAL и $\Delta B_1A_1L_1$: $\angle BAL = \angle B_1A_1L_1$, $\angle B = \angle B_1$ => $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ и т.к. $\frac{AB}{A_1B_1} = k$=>

   k – коэффициент подобия => $\frac{AL}{A_1L_1} = k$

Медианы: Соответственные медианы в подобных треугольниках пропорциональны с коэффициентом подобия.



1) $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$=> $\angle A = \angle A_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = k$

$\frac{AM}{A_1M_1} = \frac{\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{2}A_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$ => $\frac{AM}{A_1M_1} = k$ => $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AM}{A_1M_1} = k$

2) В ΔABM и $\Delta A_1B_1M_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AM}{A_1M_1} = k => \Delta ABM \sim \Delta A_1B_1M_1$ (по II признаку) $=> \frac{BM}{B_1M_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = k$, то $\frac{BM}{B_1M_1} = k$

Радиусы: Радиусы вписанных в подобные треугольники окружностей пропорциональны с коэффициентом подобия равным коэффициенту подобия.

Пусть $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, где k – коэффициент подобия

$r = \frac{S}{P}$, $r_1 = \frac{S_1}{P_1}$, $\frac{S}{S_1} = k^2$, $\frac{p}{p_1} = k$ => $\frac{r}{r_1} = \frac{S}{S_1} * \frac{p_1}{p} = k^2 * \frac{1}{k} = k$

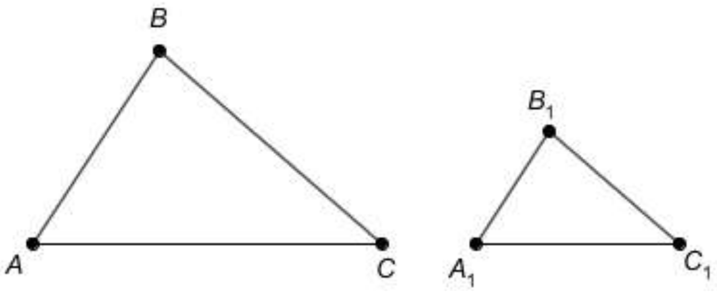
Теорема (О соотношении площадей подобных треугольников): Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия.

Дано: $\boldsymbol{\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1}$,

k – коэффициент подобия

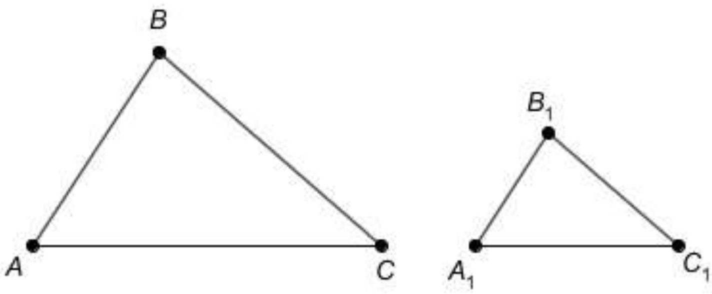
Доказать: $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = k^2$

Доказательство:



1) $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ => $\angle A = \angle A_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$
2) $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{AB*AC}{A_1B_1*A_1C_1} = k^2$

Периметр: Периметры подобных треугольников пропорциональны с коэффициентом равным коэффициенту подобия.



Дано: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$,

k – коэффициент подобия

Доказать: $\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = k$

Доказательство:

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$,

k – коэффициент подобия =>

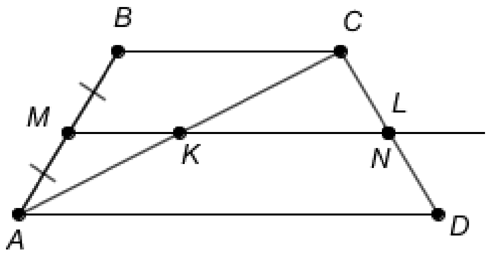
$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$ => $P_{\Delta A_1B_1C_1} = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1$

$P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = k * A_1B_1 + k * B_1C_1 + k * A_1C_1 =$

$k * (A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1)$ => $\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{k*(A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1)}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = k$

Средняя линия трапеции – это отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции.

Теорема (Свойства средней линии трапеции): средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.



Дано: ABCD – трапеция, MN – средняя линия

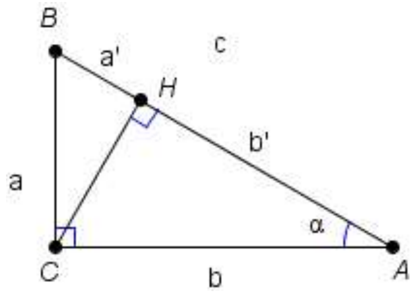
Доказать: MN||AD||BC, MN = $\frac{BC+AD}{2}$

Доказательство:

1) Дополнительное построение: через т. M проведем ML (ML||BC||AD)
2) В ΔABC: AM = MB, MK||BC => AK = KC => MK – средняя линия (по определению) => MK =$\frac{1}{2}$ BC (по свойству средней линии)
3) В ΔACD: AK = KC, KL||AP => CL = LD => L и N – совпадают, KN – средняя линия (по определению) => KN = $\frac{1}{2}$ AD
4) MN ∈ ℓ, ℓ||BC||AD => MN||BC||AD
5) MN = MK + KN = $\frac{1}{2}$ BC + $\frac{1}{2}$ AD = $\frac{BC+AD}{2}$

Теорема (Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике):

Пусть BC = *a,* AC = b, AB = c, CH = h, AH = b', BH = a', ∠A = α



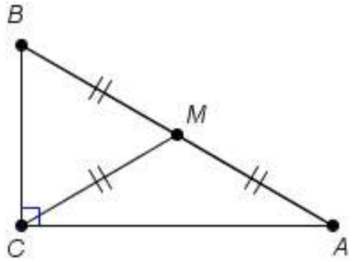
1) ΔACH ~ ΔABC (∠A – общий) => $\frac{b}{c} = \frac{b'}{b}$ => $b^2 = b' \cdot c$ => $b = \sqrt{b' \cdot c}$

2) ΔCBH ~ ΔAHB ($\angle BCH = \angle A =$ α) => $\frac{h}{b'} = \frac{a'}{h}$ => $h^2 = a'\,b'$ => $h=\sqrt{a' \cdot b'}$

Таким образом катет прямоугольного треугольника равен среднему геометрическому гипотенузы м проекции этого катета на гипотенузу.

Таким образом высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна среднему геометрическому проекций катетов на гипотенузу.

Свойство медианы, проведенной к гипотенузе.

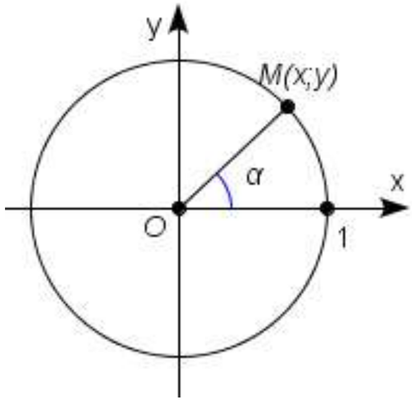


CH – медиана, CM = BM = AM

Теорема: в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы (доказать самостоятельно).

Тригонометрические функции на единичной полуокружности

Рассмотрим прямоугольную систему координат и окружность с центром в начале координат с радиусом равным 1. На окружности отметим точку M с координатами (x; y) и рассмотрим угол α между OM и положительным направлением оси 0x (абсцисс).



Отношение $\frac{x}{R};\frac{y}{R};\frac{x}{y};\frac{y}{x}$ не зависят от расположения точки M на луче OM, а зависят лишь от величины угла α.

Косинусом угла α называется абсцисса точки M – конца радиуса единичной окружности, образующего угол α с осью абсцисс.

$$\cos\alpha = \frac{OK}{OM} = \frac{x}{R}(R = 1) = x => \cos\alpha = x$$

Синусом угла α называется ордината точки M – конца радиуса единичной окружности, образующего угол α с осью абсцисс.

$$\sin\alpha = \frac{MK}{OM} = \frac{y}{R}(R = 1) = y => sin\,\alpha = y$$

Тангенсом угла α называется отношение ординаты y к абсциссе x точки M – конца радиуса единичной окружности, образующего угол α с осью абсцисс.

$$tg\,\alpha = \frac{y}{x} \text{ или } tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Котангенсом угла α называется отношение абсциссы x к ординате y точки M – конца радиуса единичной окружности, образующего угол α с осью абсцисс.

$$ctg\,\alpha = \frac{x}{y} \text{ или } ctg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Т.к. каждому углу α на единичной окружности соответствует единственная точка $M(x;y)$, то равенства: $\cos\alpha = x; \sin\alpha = y; ctg \ = \frac{x}{y}; tg = \frac{y}{x};$ определяют тригонометрические функции угла α.

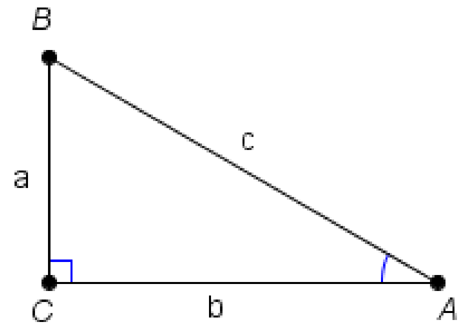
Данные определения совпадают с определениями даваемыми в прямоугольном треугольнике.

Синусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к прилежащему.

Котангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение прилежащего катета к противолежащему.



$sin\angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$

$cos\angle A = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$

$tg\angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$

$ctg\angle A = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$

Тогда $a = c * sin\angle A = b * tg\angle A = \frac{b}{ctg\angle A}$

$a \ = \ c * \cos\angle B = b * ctg\angle B = \frac{b}{tg\angle B}$

$b = c * \cos\angle A = a * ctg\angle A = \frac{a}{tg\angle A}$

$b = c * \sin\angle B = a * tg\angle B = \frac{a}{ctg\angle B}$

$c = \frac{b}{cos\angle A} = \frac{a}{sin\angle A} = \frac{b}{sin\angle B} = \frac{a}{cos\angle B}$

Запишем теорему Пифагора для ΔABC :

$AC^2 + BC^2 = AB^2 \ \Big| : AB^2$

$\left(\frac{AC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = 1$

$\cos^2\angle A + \sin^2\angle A = 1$ – **основное тригонометрическое тождество**.

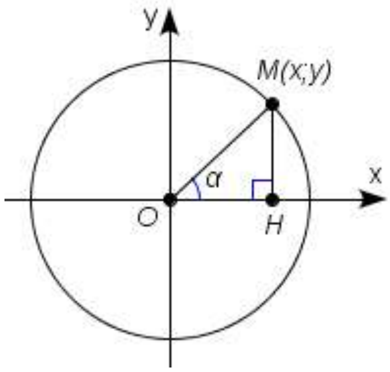
Синус угла и его свойства

Рассмотрим прямоугольную систему координат и окружность с центром в начале координат с радиусом равным 1. На окружности отметим точку М с координатами (х; у) и рассмотрим угол α между ОМ и положительным направлением оси 0х (абсцисс).

Синусом этого угла α называется ордината точки М.

$$\sin\alpha = y$$

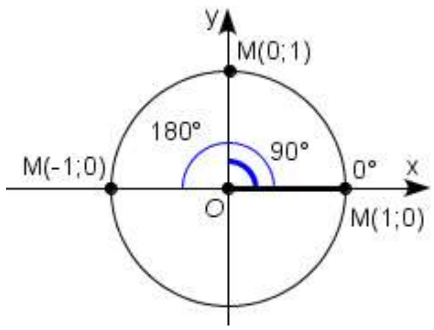
Частный случай синуса острого угла в прямоугольном треугольнике.



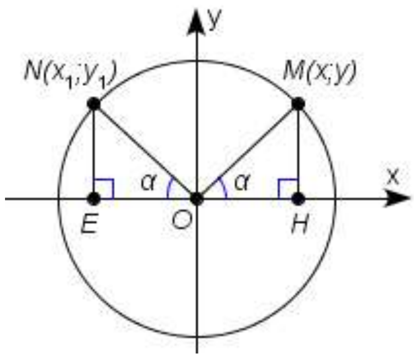
Если из точки М провести перпендикуляр к 0х, получим ΔMOH : $\angle$OHM = 90°, OM=R = 1. Т.к. $\sin\alpha = y = MH = \frac{MH}{1} = \frac{MH}{OM}$.

Таким образом синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противоположного катета к гипотенузе.

Свойства синуса:



1) $\sin 0° = 0$ ($\alpha = 0°$ => M(1; 0))
   $\sin 90° = 1$ ($\alpha = 90°$ => M(0; 1))
   $\sin 180° = 0$ ($\alpha = 180°$ => M(1; 0))
2) Синусы смежных углов равны
   Пусть $\angle$MOH $= \alpha, \sin\alpha = y$ и $\angle$NOH $=$ $180° - \alpha, \sin(180° - \alpha) = y_1$
   Докажем что $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$
   $\angle$NOE = 180° – $(180° - \alpha) = \alpha$
   ΔMOH = ΔNOE (по гипотенузе OM = ON = R и $\angle\alpha$) => MH = NE => $y = y_1$ => $\sin\alpha =$ $\sin(180° - \alpha)$



3) При возрастании угла от 0° до 90° синус угла возрастает от 0 до 1.
   При возрастании угла от 90° до 180° синус угла убывает от 1 до 0.
   Таким образом синус любого угла не превосходит 1 и больше или равен нуля.

$$0 \leq \sin\alpha \leq 1$$

4) Синусы смежных углов равны.
   Дано: $\angle MOH = \alpha, \angle EOM = 180° - \alpha$
   Доказать: $sin\,\angle MOH = sin\,\angle EOM$

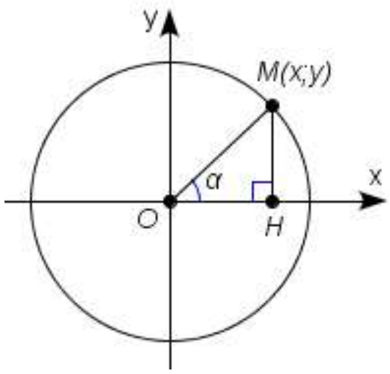
Доказательство:
$\angle EON = 180° - \angle NOM = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$
$MH \perp Ox; NE \perp Ox$
$\Delta OMH = \Delta ONE(ON = OM = R; \angle NOE = \angle MOH = \alpha) => MH = NE =>$ $y_M = y_N => \sin\angle NOE = \sin\angle EOM = \sin\angle NOH =>$ синусы смежных углов равны.

Косинус угла и его свойства.

Рассмотрим прямоугольную систему координат и окружность с центром в начале координат с радиусом равным 1. На окружности отметим точку М с координатами (x; y) и рассмотрим угол α между ОМ и положительным направлением оси 0x (абсцисс).
Косинусом угла α называется абсцисса точки М.

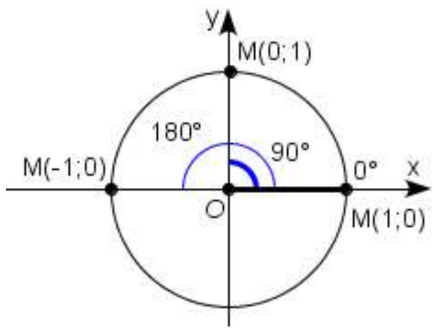
$$\cos\alpha = x$$

Частный случай косинуса острого угла в прямоугольном треугольнике.

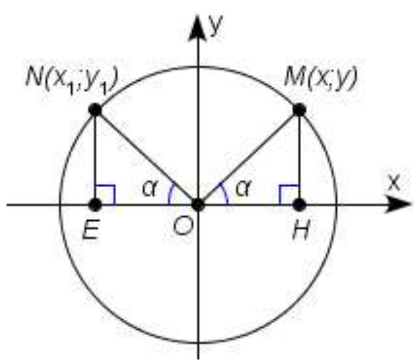


Проведем перпендикуляр из точки М к Ох => получим ΔMOH : $\angle$OHM = 90°, OM=R = 1. Т.к. $\cos\alpha = x = OH = \frac{OH}{1} = \frac{OH}{OM}$.
Таким образом косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Свойства косинуса:



1) $\cos 0° = 1$ ($\alpha = 0°$ => M(1; 0))
   $\cos 90° = 0$ ($\alpha = 90°$ => M(0; 1))
   $\cos 180° = -1$ ($\alpha = 180°$ => M(-1; 0))
2) Косинусы смежных углов отличаются только знаком (противоположны)
   Пусть $\angle$MOH $= \alpha$, $\cos\alpha = x$ и $\angle$NOH $= 180° - \alpha$, $\cos(180° - \alpha) = x_1$
   Докажем что $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$
   $\angle$NOE = 180° – $(180° - \alpha) = \alpha$
   ΔMOH = ΔNOE (по гипотенузе OM = ON = R и $\angle\alpha$) => OH = OE => $|x| = |x_1|$, а знаки x и x_1 различны



Т.к. $x > 0$ ($\angle\alpha$ – острый), $x_1 < 0$ ($180°$ – $\angle\alpha$ – тупой) => $x = -x_1$ => $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$

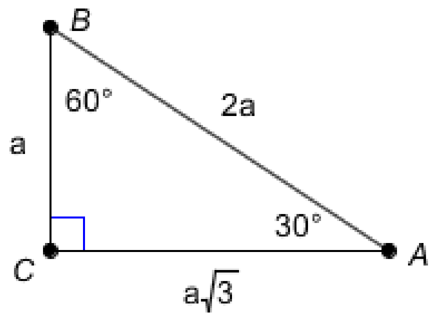
3) При возрастании угла от 0° до 90° косинус убывает от 1 до 0.
При возрастании угла от 90° до 180° значение косинуса убывает от 0 до –1.
Таким образом косинус острого угла больше 0, косинус тупого угла меньше 0 (по определению).
Таким образом косинус любого угла по модулю не превосходит 1

$$-1 \leq cos\,\alpha \leq 1$$

4) Косинусы смежных углов противоположны по знаку.
Дано: $\angle MOH = \alpha, \angle EOM = 180° - \alpha$
Доказать: $cos\,\angle MOH = -\,cos\,\angle EOM$ ($cos\,\alpha = -\,cos(180° - \alpha)$)
Доказательство:
$\angle EOM = 180° - \alpha, \angle MOH = \alpha => \angle NOM$ – общая часть
$\angle EOM$ и $\angle MOH => \angle EON = \angle MOH = \alpha$
$\Delta OME = \Delta ONH (ON = OM = R; \angle NOH = \angle MOE = \alpha) => MO = OE =>$
$|x_N| = |x_M|$

$$\begin{matrix}\text{т.}M\in I\text{ четверти}=>x_M>0\\ \text{т.}N\in II\text{ четверти}=>x_N<0\end{matrix} => x_N = -x_M => cos(180° - \alpha) = -\,cos\,\alpha$$

Значения тригонометрических функций для некоторых углов



1) Пусть ΔABC : ∠A = 30°, ∠B = 60°, ∠C = 90°, BC = a, AB = $2a$, AC = $a\sqrt{3}$ =>

$\sin 30° = \frac{CB}{BA} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} => \sin(180° - 30°) = \sin 150° = \frac{1}{2}$

$\cos 30° = \frac{CA}{BA} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} => \cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\mathrm{tg}\, 30° = \frac{CB}{CA} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} => \mathrm{tg}\, 150° = \frac{\sin 150°}{\cos 150°} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

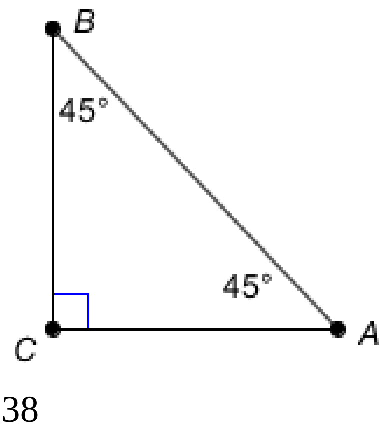
$\mathrm{ctg}\, 30° = \frac{CA}{CB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} => \mathrm{ctg}\, 150° = -\sqrt{3}$

$\sin 60° = \frac{CA}{BA} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} => \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60° = \frac{CB}{BA} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} => \cos 120° = -\frac{1}{2}$

$\mathrm{tg}\, 60° = \frac{CA}{CB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} => \mathrm{tg}\, 120° = -\sqrt{3}$

$\mathrm{ctg}\, 60° = \frac{CB}{CA} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} => \mathrm{ctg}\, 120° = \frac{\sqrt{3}}{3}$



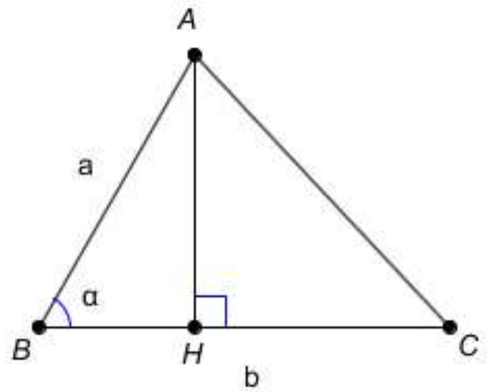
2) ΔABC : $\angle$A = $\angle$B = 45°, $\angle$C = 90°, BC = AC = a, AB = $a\sqrt{2}$ =>

$\sin 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} => \sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} => \cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\mathrm{tg}\, 45° = \mathrm{ctg}\, 45° = \frac{a}{a} = 1 => \mathrm{tg}\, 135° = -1, \mathrm{ctg}\, 135° = -1$

Теорема: Площадь треугольника равна полупроизведению синуса угла треугольника на стороны, заключающие данный угол.



Дано: ΔABC, AB = a, AC = b, $\angle$ A = α

Доказать: $S_{\Delta \mathrm{ABC}} = \frac{1}{2} * a * b * \sin\alpha$

Доказательство:

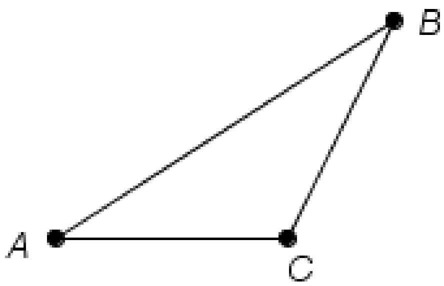
1) BH⊥AC, BH = h

   ΔABH : $\angle$ AHB = 90° => $\sin\alpha = \frac{h}{a}$ =>

   $\mathrm{h} = \mathrm{a} * \sin\alpha$

2) $S_{\Delta \mathrm{ABC}} = \frac{1}{2} BH * AC = \frac{1}{2} * h * b = \frac{1}{2} * \sin\alpha * a * b$

Теорема (Синусов): Стороны треугольника пропорциональны синусам соответственно противолежащих углов. Это отношение равно двум радиусам описанной около этого треугольника окружности.



Дано: ΔABC

Доказать: $\frac{AB}{\sin\angle \mathrm{C}} = \frac{AC}{\sin\angle \mathrm{B}} = \frac{BC}{\sin\angle \mathrm{A}} = 2R$

Доказательство:

1)$S_{\Delta \mathrm{ABC}} = \frac{1}{2} AB * AC * \sin\angle \mathrm{A}$, $S_{\Delta \mathrm{ABC}} = \frac{1}{2} AB * BC * \sin\angle \mathrm{B}$ => $AC * \sin\angle \mathrm{A} = BC * \sin\angle \mathrm{B}$ =>

$\frac{AC}{\sin\angle \mathrm{B}} = \frac{BC}{\sin\angle \mathrm{A}}$

2) Аналогично $\frac{AC}{\sin\angle \mathrm{B}} = \frac{AB}{\sin\angle \mathrm{C}}$

   Таким образом $\frac{AB}{\sin\angle \mathrm{C}} = \frac{AC}{\sin\angle \mathrm{B}} = \frac{BC}{\sin\angle \mathrm{A}}$

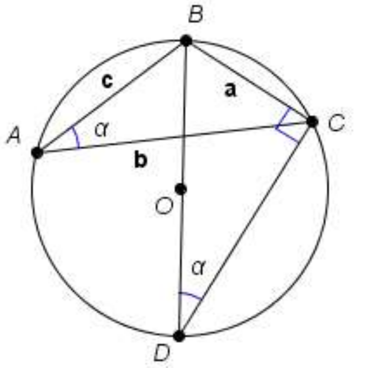
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

3) Всегда можно описать окружность и провести диаметр BD

$\angle$BAC = $\angle$BDC = $\frac{1}{2}\smile BC = \alpha$

В ΔBDC : $\angle$C = 90° (опирается на диаметр)

$\sin\alpha = \frac{a}{2R}$

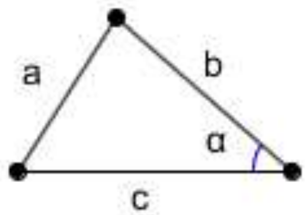


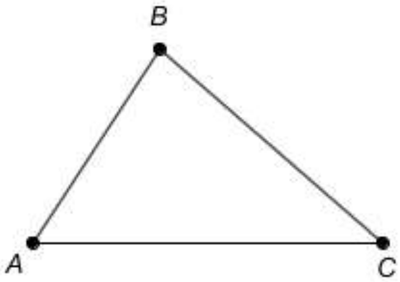
4) В ΔABC : $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Теорема (Косинусов): в произвольном треугольнике квадрат любой стороны равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на cos угла между ними.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$





Дано: ΔABC : AB = c, BC = a, AC = b, $\angle$C = γ

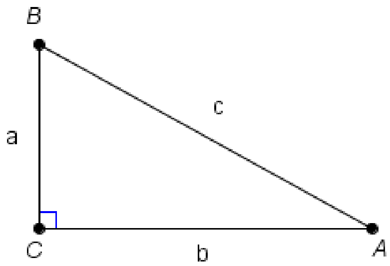
Доказать: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

I. **$\angle$C = 90°**

По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$

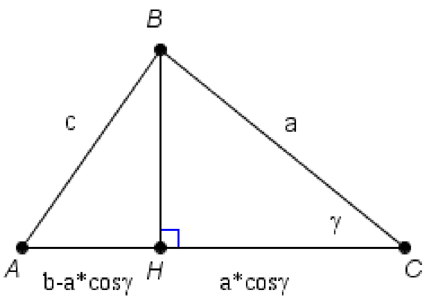
$-2ab\cos 90° = 0$, т.к. $\cos 90° = 0$

Таким образом $c^2 = a^2 + b^2 + 0 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$



II. **$\angle$C < 90°**

Тогда в ΔABC еще хотя бы один угол острый. Пусть $\angle$A – острый. Тогда проведем высоту BH ⊥ AC (BH внутри ΔABC)



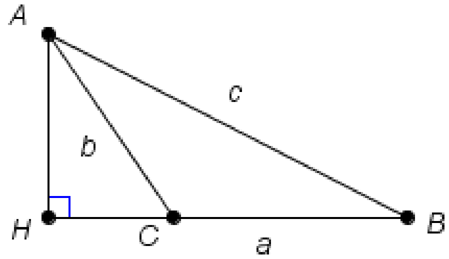
Рассмотрим ΔBHC : $\angle$BHC = 90°, BC = a, $\angle$C = γ => HC = $a\cos\gamma$. По теореме Пифагора $BH^2 = a^2 - a^2(\cos\gamma)^2$

Рассмотрим ΔABH : $\angle$AHB = 90°, AB = c, $AH = b - a\cos\gamma$ => $AB^2 = AH^2 + BH^2$ =>

$$c^2 = (b - a\cos\gamma)^2 + a^2 - a^2(\cos\gamma)^2$$

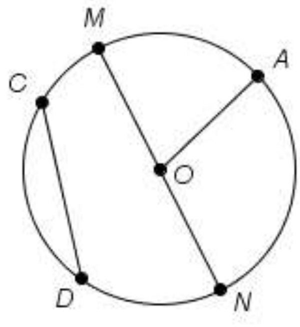
$$c^2 = b^2 - 2ab\cos\gamma + a^2(\cos\gamma)^2 + a^2 - a^2(\cos\gamma)^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

III. **∠C > 90°**



Т.к. ∠C – тупой => ∠A и ∠B – острые
Высота AD находится вне ΔABC.
Докажем, что $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$
∠ACB и ∠ACD – смежные => $\cos\angle ACD = -\cos\angle C$, $\sin\angle ACD = \sin\angle C$
Значит $AH = b\sin\angle C$, $BH = a - b\cos\angle C$
$$c^2 = (b\sin\angle C)^2 + (a - b\cos\angle C)^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$$

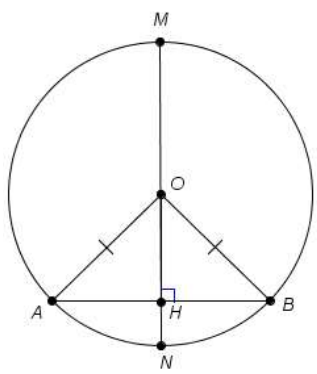
Окружность. Диаметр и хорды. Свойства равных хорд и окружностей.



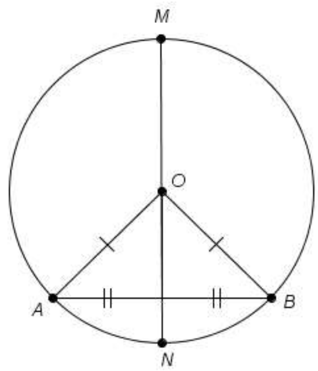
Окружностью называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром. Расстояние от центра до точки на окружности называется радиусом.
O – центр окружности
OA = R, M – диаметр
CD – хорда

Отрезок, соединяющий две точки на окружности, называется **хордой**. Хорда, проходящая через центр окружности, называется **диаметром**. Диаметр – самая большая хорда (d = 2R).

Теорема (Свойство диаметра, перпендикулярного хорде): Диаметр перпендикулярен хорде, не являющейся диаметром, тогда и только тогда, когда он проходит через середину хорды.



- Дано: MN – диаметр, AB – хорда, MN ⊥ AB
  Доказать: AH = HB
  Доказательство:
  ΔAOB: AO = OB = R => OH – высота и медиана (по свойству равнобедренного треугольника) => AH = HB
  Таким образом диаметр перпендикулярный хорде (не являющейся диаметром), делит ее пополам.



- Дано:MN – диаметр, AB – хорда, AH = HB

Доказать: MN ⊥ AB

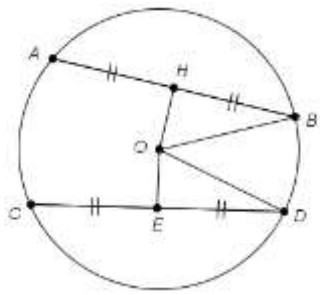
Доказательство:

ΔAOB: AO = OB = R => OH – высота и медиана (по свойству равнобедренного треугольника) => OH ⊥ AB => MN ⊥ AB

Таким образом если диаметр делит хорду (не являющейся диаметром) пополам, то он ей перпендикулярен.

Теорема: Расстояние от центра окружности до хорды равно расстоянию от диаметра окружности до середины этой хорды.

Теорема (Свойства равных хорд): Хорды одной окружности равны тогда и только тогда, когда они равноудалены от центра.



- Дано: AB и CD – хорды, AB = CD

Доказать: $\rho(O;AB) = \rho(O;CD)$

Доказательство:

1)Пусть AH = BH => $\rho(O;AB) = OH$

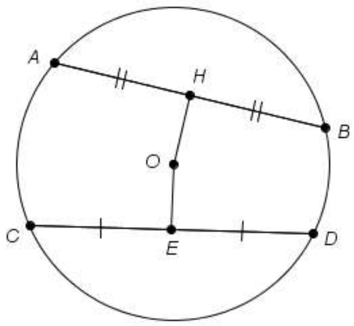
Пусть CD = DE => $\rho(O;CD) = OE$

2)OH ⊥ AB и OE ⊥ CD (по свойству диаметра перпендикулярного хорде)

3) $\Delta OBH =$ ΔODE (по катету и гипотенузе) => OH = OE =>

$$\rho(O;AB) = \rho(O;CD)$$

Таким образом равные хорды равноудалены от центра.



- Дано: AB и CD – хорды, $\rho(O;AB) = \rho(O;CD)$

Доказать: AB = CD

Доказательство:

1) Пусть AH = BH => $\rho(O;AB) = OH$

Пусть CD = DE => $\rho(O;CD) = OE$

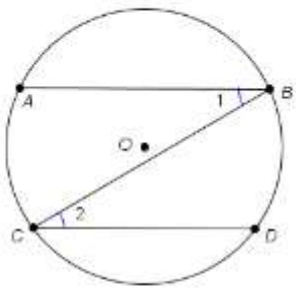
=> OH = OE

2) OH ⊥ AB и OE ⊥ CD (по свойству диаметра перпендикулярного хорде)

3) $\Delta OBH =$ ΔODE (по катету и гипотенузе) => BH = DE => 2BH = 2DE,

AB = CD

Таким образом равноудаленные от центра хорды равны.



Теорема (Свойства дуг, заключенных между параллельными хордами): дуги, заключенные между параллельными хордами равны.

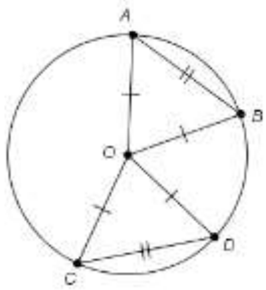
Дано: AB, CD – хорды, $AB \parallel CD$

Доказать: $\smile AC = \smile BD$

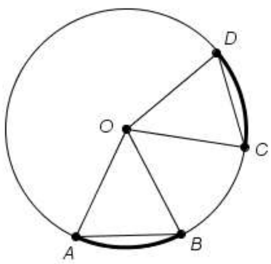
Доказательство:

$\angle 1 = \angle 2$ (накрест лежащие) => $\frac{1}{2}\smile AC = \frac{1}{2}\smile BD$ => $\smile AC = \smile BD$

Теорема: хорды одной окружности равны тогда и только тогда, когда они стягивают равные центральные углы (или опираются на равные дуги).



- Дано: $\Delta AOB, \Delta COD, AB = CD$
  Доказать: $\smile AB = \smile CD$
  Доказательство:
  AB = CD => ΔAOB = ΔCOD (III признак) => cAOB = ∠COD => $\smile AB = \smile CD$



- Дано: $\Delta AOB, \Delta COD, \smile AB = \smile CD$
  Доказать: AB = CD
  Доказательство:
  $\smile$AB = $\smile$CD => ∠AOB = ∠COD => ΔAOB = ΔCOD (по I признаку) => AB = CD

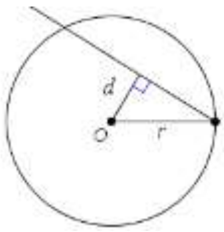
Взаимное расположение прямой и окружности. Касательная и ее свойства. Построение касательной.

Взаимное расположение прямой и окружности

d – расстояние от центра окружности до прямой

R – радиус окружности

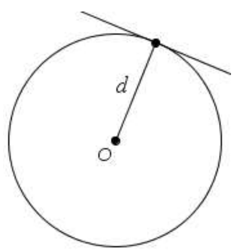
Возможны три случая:



1. $d < R$

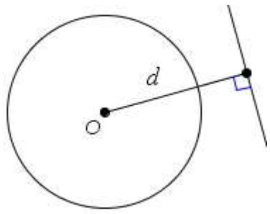
В этом случае прямая и окружность имеют две общие точки и прямая является секущей (по определению)

2. $d = R$



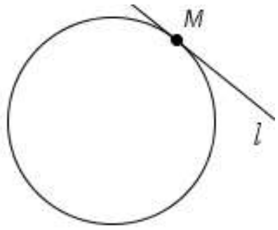
В этом случае прямая и окружность имеют одну общую точку, т.е. прямая – касательная

3. $d > R$
   В этом случае прямая и окружность не имеют общих точек, при этом окружность располагается по одну сторону от прямой

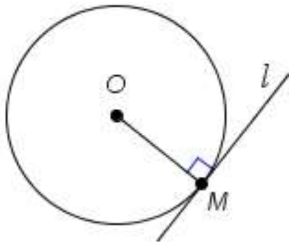


Касательная. Ее свойства и признаки.

Касательная – прямая, имеющая единственную общую точку с окружностью. Точка называется точкой касания.
M – точка касания
l – касательная

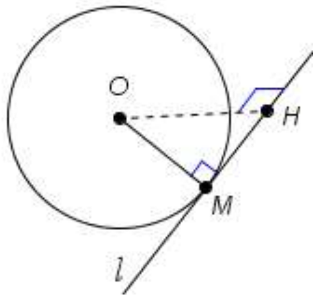


Теорема (Признак касательной): Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности и перпендикулярна ему, то она является касательной.



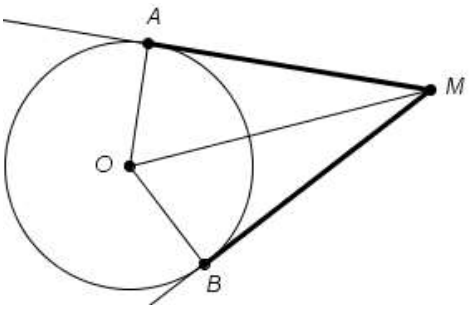
Дано: окружность, OM = R, OM $\perp l$
Доказать: l – касательная
Доказательство:
Т.к. OM $\perp l$, OM = R => OM = d => R = d =>
M – единственная общая очка => l – касательная

Свойство 1: Касательная к окружности перпендикулярная радиусу, проведенному в точку касания.
Дано: окружность, M – точка касания, l – касательная
Доказать: OM $\perp l$
Доказательство:



1. Т.к. M – точка касания => OM = R
   Т.к. l – касательная => R = d => OM = d =>
   OM $\perp l$
2. OM не перпендикулярно l => OH $\perp l$
   OH = d, OM = R тогда R > d, а так как l – касательная => $r = d$

Свойство 2: Отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности равны.

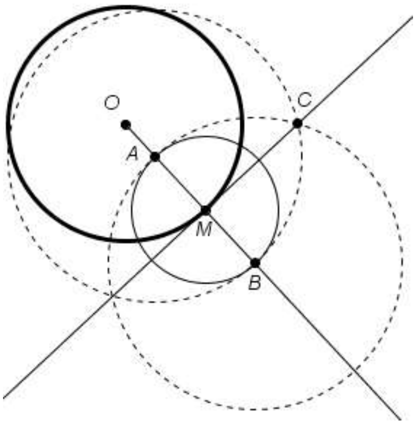


Дано: окружность, MA, MB – касательные
Доказать: MA = MB
Доказательство:
Рассмотрим ΔAOM и ΔMOB – прямоугольные (по свойству касательной)

ОН – общая, ОА = ОВ = R => ΔAOM = $\Delta M OB$ (по катету и гипотенузе) => МА = МВ

Построение касательной к окружности.

Случай 1: через точку, лежащую на окружности

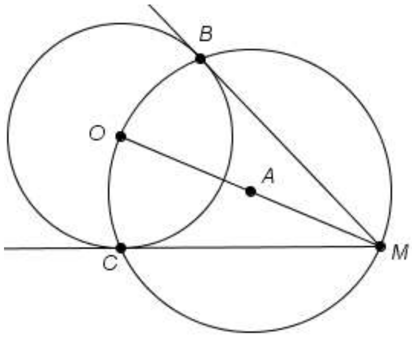


1. Строим луч ОМ
2. $\omega_1(M; R_1) \cap OM = A$ и B
3. $\omega_2(A; R_2)$, $\omega_3(B; R_2)$, $R_2 > AM$
4. $\omega_2 \cap \omega_3 = l$
5. СМ – касательная

Доказательство:

ОМ ⊥ СМ (по построению) => СМ – касательная (по теореме: признак касательной)

Случай 2: построить касательную через точку, лежащую не на окружности.



1. Соединим ОМ
2. Строим точку А – середина ОМ (ОА = АМ)
3. $\omega_1(A; OA)$

   $\omega_1 \cap \omega = B$ и C

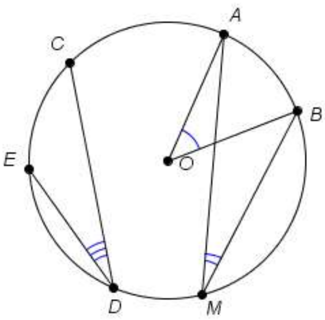
   МВ и МС – касательные

   Доказательство:

   $\angle OBM = 90°, \angle OCM = 90°, OB = OC = R$ =>

   МВ и МС – касательные (по признаку).

Углы в окружности. Центральные и вписанные углы. Углы, образованные касательными, хордами, секущими.



О – центр окружности

АО = ОВ = R

∠AOB – центральный угол

◡AB = ∠AOB

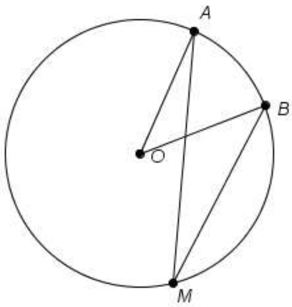
∠AMB, ∠CDE – вписанные углы

Угол, вершина которого лежит в центре окружности, называется **центральным**.

Градусная мера дуги окружности определяется градусной мерой соответствующего этой дуге центрального угла.

Две дуги одной окружности называются равными если их градусные меры равны.

Вписанным углом называется угол, вершина которого лежит на окружности, а обе его стороны пересекают ее (окружность).



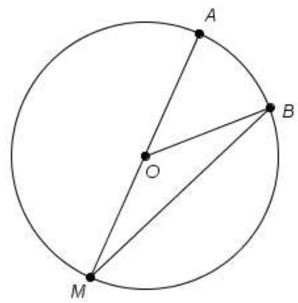
Теорема (О вписанном угле): Вписанный в окружность угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается

Дано: $\angle AMB$ – вписанный

Доказать: $\angle AMB = \frac{1}{2}\smile AB$

Доказательство: Т.к. центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается, то докажем, что вписанный угол равен половине центрального, опирающегося на ту же дугу.

Рассмотрим три случая:



I. Центр окружности лежит на стороне вписанного угла

Дано: $\angle AMB$ – вписанный

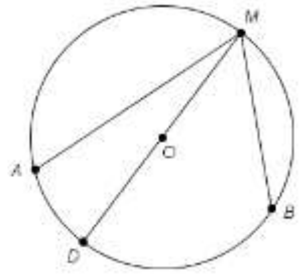
Доказать: $\angle AMB = \frac{1}{2}\smile AB$

Доказательство:

ΔOMB: OM = OB = R => $\angle OMB = \angle OBM = \alpha$ (по свойству равнобедренного треугольника)

$\angle AOB$ – вписанный угол ΔOMB => $\angle OMB = 2\alpha$ (по свойству вписанного угла)

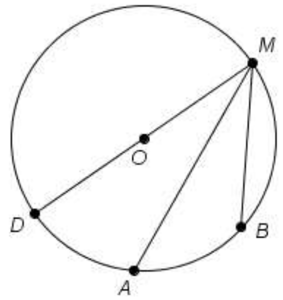
$\angle AMB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}\smile AB$



II. O – внутренний $\angle AMB$

Проведем вспомогательный диаметр MD =>

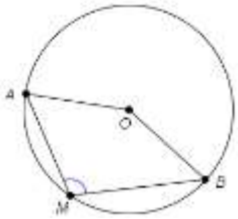
$\angle AMB = \angle AMD + \angle DMB = \frac{1}{2}\smile AD + \frac{1}{2}\smile DB = \frac{1}{2}(\smile AD + \smile DB) = \frac{1}{2}\smile AB$



III. O – вне угла $\angle AMB$

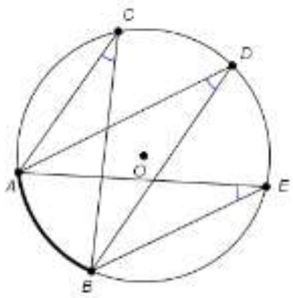
Проведем вспомогательный диаметр MD =>

$\angle AMB = \angle DMB - \angle AMD = \frac{1}{2}\smile DB - \frac{1}{2}\smile DA = \frac{1}{2}(\smile DB - \smile DA) = \frac{1}{2}\smile AB$



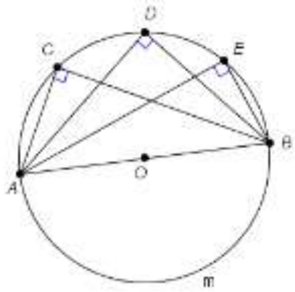
Замечание: если вписанный угол острый, то он равен половине соответствующего ему центрального угла, а если вписанный угол тупой, то она дополняет центральный до 180°

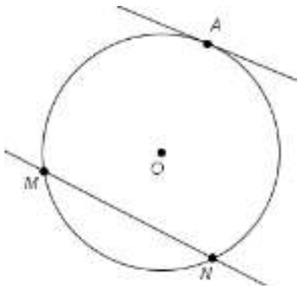
Следствия:



1. Вписанный углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны (каждый из них равен половине дуги).
$\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB$
2. Вписанные углы, опирающиеся на равные дуги, равны.
3. Угол, опирающийся на диаметр – прямой.

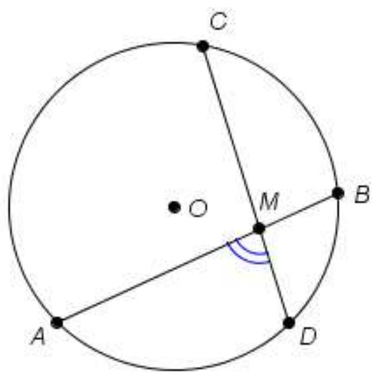
$\angle ACB = \frac{1}{2} \smile A_m B = \frac{1}{2} * 180° = 90°$





Секущей называется прямая, имеющая две общие точки (MN) с окружностью.

Теорема (Углы между пересекающимися хордами): Угол между пересекающимися хордами равен полусумме дуг, одна из которых заключена между сторонами угла, а вторая между их продолжениями.



Дано: AB, CD – хорды

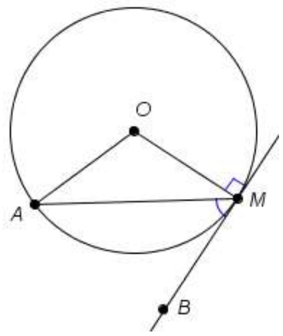
Доказать: $\angle AMD = \frac{1}{2}(\smile AD + \smile BC)$

Доказательство:

1. ∠ABD – вписанный => $\angle ABD = \frac{1}{2} \smile AD$
   ∠CDB – вписанный => $\angle CDB = \frac{1}{2} \smile CB$
2. ∠AMD –вписанный ΔBMD =>
   $\angle AMD = \angle ABD + \angle CDB = \frac{1}{2}(\smile AD + \smile CB)$
   $\angle AMD = \frac{1}{2}(\smile AD + \smile CB)$

Теорема (Угол между касательной и хордой): Угол между касательной и хордой, проведенной через точку касания равен половине градусной меры дуги, заключенной внутри угла.

Дано: AM – хорда, MB – касательная



Доказать: $\angle AMB = \frac{1}{2} \smile AM$

Доказательство:

Рассмотрим ΔAOM :

$AO = OM = R$

$\angle AOM = \smile AM$ (по свойству центрального угла)

$\angle OMA = \angle OAM = \frac{1}{2}(180° - \angle AOM) = 90° - \frac{\angle AOM}{2} = 90° - \frac{\smile AM}{2}$

OM ⊥ MB (по свойству касательной) =>

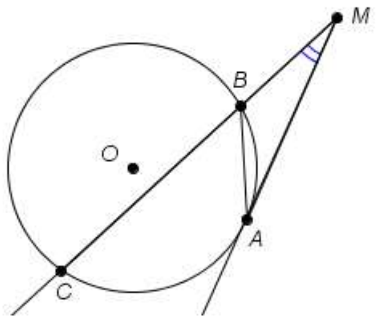
$\angle AMB = 90° - \angle OMA = 90° - (90° - \frac{\smile AM}{2}) = \frac{1}{2} \smile AM$

$\angle AMB = \frac{1}{2} \smile AM$

Теорема: Угол между касательной и секущей, проходящей через точку вне окружности: угол между касательной и секущей, проведенной из той же точки, равен полу разности дуг, заключенных внутри угла.

Дано: MA – касательная, MC – секущая

Доказать: $\angle M = \frac{1}{2}(\smile AC - \smile AB)$



Доказательство:

$\angle BAM = \frac{1}{2} \smile AB$ (угол между хордой и касательной)

$\angle CBA = \frac{1}{2} \smile AC$ (вписанный угол)

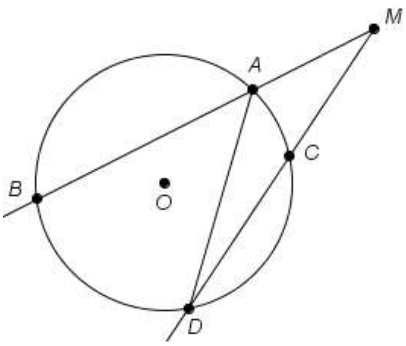
$\angle CBA$ – внешний угол ΔBAM =>

$\angle CBA = \angle BAM + \angle M$ =>

$\angle M = \angle CBA - \angle BAM = \frac{1}{2} \smile AC - \frac{1}{2} \smile AB = \frac{1}{2}(\smile AC - \smile AB)$

Угол между двумя секущими.

Теорема: угол между двумя секущими, вершина которого вне окружности, равен полу разности дуг, заключенных внутри угла.



Дано: MB и MD – секущие

Доказать: $\angle M = \frac{1}{2}(\smile BD - \smile AC)$

Доказательство:

$\angle BAD = \frac{1}{2} \smile BD$ (вписанный угол)

$\angle ADC = \frac{1}{2} \smile AC$ (вписанный угол)

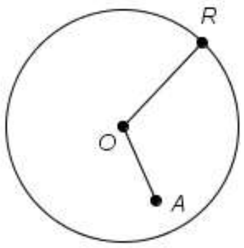
$\angle BAD$ – внешний угол ΔADM =>

$\angle BAD = \angle ADC + \angle M =>$

$\angle M = \angle BAD - \angle ADC = \frac{1}{2}\smile BD - \frac{1}{2}\smile AC = \frac{1}{2}(\smile BD - \smile AC)$

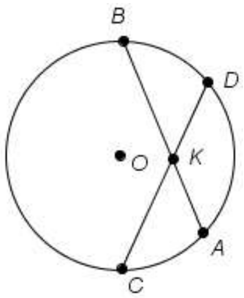
Пропорциональные линии в круге.

Круг – множество точек плоскости, удаленных от данной точки (центра) на расстоянии не более данного радиуса



Круг
OR – радиус
OR = R
OA < R

Теорема (Свойство хорд): Произведения отрезков пересекающихся хорд равны.



Дано: окружность, AB, CD – хорды

Доказать: $CK * KD = AK * KB$

Доказательство:

Рассмотрим ΔAKC и ΔBKD

$\angle AKC = \angle BKD$ (вертикальные), $\angle DCA = \angle DBA = \frac{1}{2}\smile AD$ (вписанные углы) => $\Delta AKC \sim \Delta BKD$ (по I признаку) =>

$\frac{CK}{BK} = \frac{AK}{KD} => CK * KD = AK * KB$

Теорема (О касательной и секущей): Квадрат отрезка касательной равен произведению отрезка секущей, проведенной из той же точки, на ее вписанную часть.

Дано: окружность, AD – секущая, DB – касательная

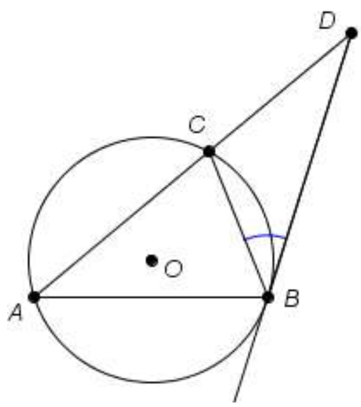
Доказать: $DB^2 = AD * DC$

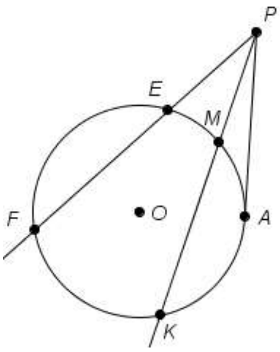
Доказательство:

Рассмотрим ΔCBD и ΔABD

$\angle D$ – общий, $\angle CBD = \frac{1}{2}\smile BC$ => $\Delta CBD \sim \Delta ABD$ (по I признаку) =>

$\frac{DB}{AD} = \frac{DC}{DB} => DB^2 = AD * DC$





Теорема (Свойство секущих, проходящих через одну точку): Произведение отрезков секущих, проведенных из одной точки, на их внешние части равны.

Дано: окружность; PF, PK – секущие, PA – касательная

Доказать: $PE * PF = PM * PK$

Доказательство:

$PA^2 = PK * PM, PA^2 = PE * PF => PE * PF = PM * PK$

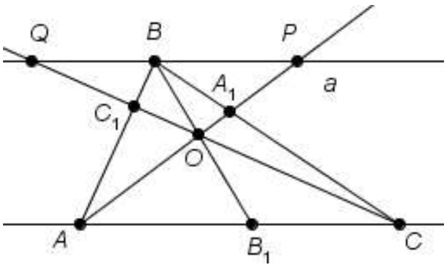
Замечательные точки в треугольнике. Теорема Чевы

В геометрии существует 4 замечательные точки в треугольнике:

1. Центр вписанной окружности
2. Центр описанной окружности
3. Точка пересечения медиан
4. Точка пересечения высот (или их продолжений)

Итальянский математик Чева нашел необходимое и достаточное условие пересечения в одной точке трех отрезков, исходящих из вершин треугольника.

Теорема: Пусть на сторонах ΔABC выбраны точки $A_1 \in BC; B_1 \in AC;$ $C_1 \in AB$. Тогда отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\frac{AB_1}{B_1C} * \frac{CA_1}{A_1B} * \frac{BC_1}{C_1A} = 1$ (1)



Докажем, что если $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = 0$, то выполняется равенство (1).

Доказательство:

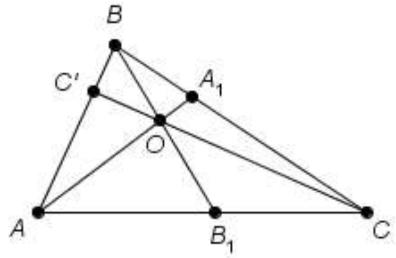
1. Проведем прямую a: точка $B \in a; a \parallel AC$
$CC_1 \cap a = Q, AA_1 \cap a = P$
2. $\Delta AA_1C \sim \Delta PA_1B$ (по двум углам) => $\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{AC}{PB}$ (2)
3. $\Delta AC_1C \sim \Delta BC_1Q$ (по двум углам) => $\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BQ}{AC}$ (3)
4. $\Delta OAC \sim \Delta OPQ => \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{PB}{BQ}$ (4)

Перемножим левые и правые части равенств (2), (3), (4)

$\frac{AB_1}{B_1C} * \frac{CA_1}{A_1B} * \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{PB}{BQ} * \frac{AC}{PB} * \frac{BQ}{AC}$

Таким образом $\frac{AB_1}{B_1C} * \frac{CA_1}{A_1B} * \frac{BC_1}{C_1A} = 1$

Теорема (Обратная): Пусть выполняется равенство (1). Докажем, что AA_1, BB_1, CC_1 проходит через одну точку.



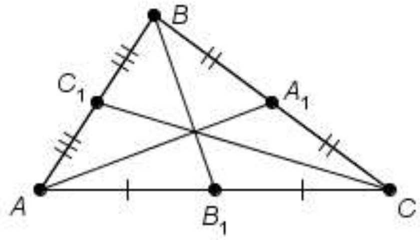
Доказательство:

$AA_1 \cap BB_1 = 0$

Проведем луч CO: $CO \cap AB = C'$

Тогда для $AA_1 \cap BB_1 \cap CC'$ справедливо равенство $\frac{AB_1}{B_1C} * \frac{CA_1}{A_1B} * \frac{BC'}{C'A} = 1$

Но по условию $\frac{AB_1}{B_1C} * \frac{CA_1}{A_1B} * \frac{BC_1}{C_1A} = 1 => \frac{BC'}{C'A} = \frac{BC_1}{C_1A} =>$ точка C' и точка C_1 делят отрезок АВ в одном и том же отношении считая от одной вершины => А значит C_1и C' совпадают. Таким образом AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке O.



Следствие 1 (Теорема о точке пересечения медиан): 3 медианы треугольника пересекаются в одной точке.

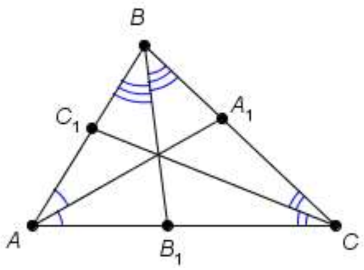
$AB_1 = B_1C$

$BA_1 = A_1C$

$B_1C = AC_1$

$\frac{AB_1}{B_1C} * \frac{CA_1}{A_1B} * \frac{BC_1}{C_1A} = 1 * 1 * 1 = 1 =>$ по Теореме Чевы медианы пересекаются в одной точке.

Следствие 2 (Теорема о точке пересечения биссектрис): Докажем, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.



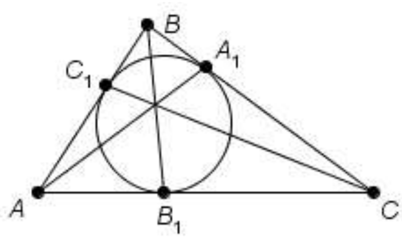
По свойству биссектрисы треугольника: $\begin{matrix} \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB}{BC} \\ \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{AC}{AB} \\ \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BC}{AC} \end{matrix} =>$

$\frac{AB_1}{B_1C} * \frac{CA_1}{A_1B} * \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{AB*AC*BC}{BC*AB*AC} = 1 =>$ А следовательно по теореме Чевы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

Следствие 3: Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанного круга пересекаются в одной точке (точке Жергонна).

$\begin{matrix} AB_1 = C_1A \\ BC_1 = A_1B \\ B_1C = CA_1 \end{matrix} => \frac{AB_1}{B_1C} * \frac{CA_1}{A_1B} * \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{AB_1}{CA_1} * \frac{CA_1}{BC_1} * \frac{BC_1}{AB_1} = 1$

А следовательно по обратной теореме Чевы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

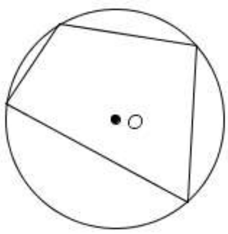


Обобщенная теорема Чевы.

Пусть прямые a, b, c проходит через вершины A, B, C в ΔABC и пересекают прямые BC, CA и AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно.

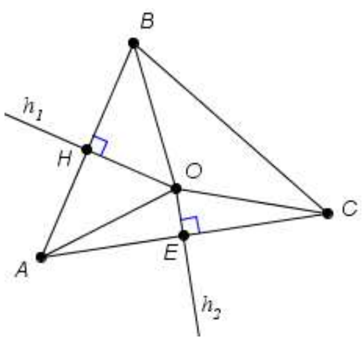
Тогда прямые a, b, c пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\frac{AB_1}{B_1C} * \frac{CA_1}{A_1B} * \frac{BC_1}{C_1A} = 1$

Окружность, описанная около треугольника и четырехугольника.



Окружность называется описанной около выпуклого многоугольника, если она проходит через все вершины. В этом случае многоугольник называют вписанным в окружность.

Теорема: Около любого треугольника можно описать окружность, причем единственную. Ее центр будет лежать на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.



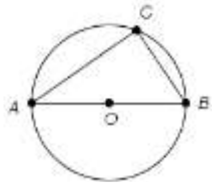
Дано: ΔABC

Доказать: существует единственная окружность

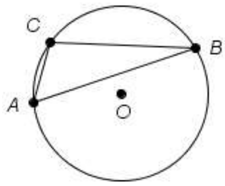
Доказательство:

1. Доказать, что около треугольника можно описать окружность, значит доказать, что найдется точка, равноудаленная от вершин этого треугольника
2. Проведем h_1 и h_2 $(h_1 \cap h_2 = 0)$ – серединные перпендикуляры к AB и AC
3. В ΔAOB: OH – высота и медианы => ΔAOB: $OA = OB$ (по признаку)
   В ΔAOC: OE – высота и медианы => ΔAOC: $OA = OC$ (по признаку)
   Таким образом AO = OB, AO = OC => AO = OB = OC =>
   т. O – равноудалена от вершин ΔABC => является центром описанной окружности (доказано существование окружности)
4. Точка O: BO = OC => O ∈ серединному перпендикуляру к BC.
   Значит т. O – центр описанной окружности является точкой пересечения трех серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.
5. Окружность, описанная около треугольника единственна, в силу единственности ее центра – точки пересечения серединных перпендикуляров.

Положение центра вписанной окружности в зависимости от вида треугольника.

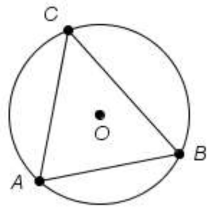


I. Прямоугольный треугольник
ΔABC: $\angle C = 90°$ => AB – диаметр => O – центр описанной окружности, причем OA = OB
Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы.



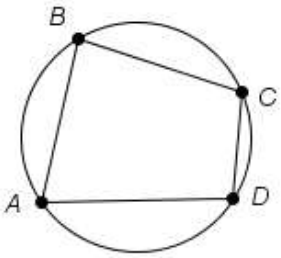
II. Тупоугольный треугольник
$\angle C > 90°$ => $\smile AB > 180°$

III. ΔABC – остроугольный



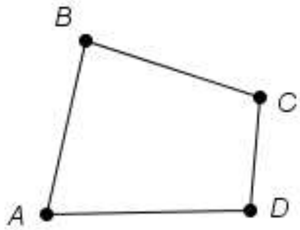
В отличие от треугольника, около четырехугольника окружность можно описать не всегда.

Теорема: Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов равна $180°$.



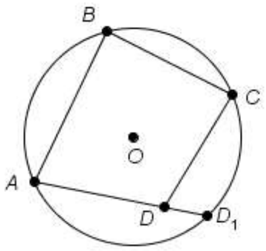
Дано: около ABCD описана окружность
Доказать: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$
Доказательство:
$\angle A = \frac{1}{2}\smile BcD, \angle C = \frac{1}{2}\smile BaD =>$
$\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\smile BcD + \smile BaD) = \frac{1}{2} * 360° = 180°$ сумма углов равна полу сумме дуг, дополняющих друг друга до окружности.
Аналогично $\angle B + \angle D = 180°$.
Таким образом если около четырехугольника описана окружность, то сумма противоположных углов равна $180°$.

Дано: ABCD – четырехугольник, $\angle A + \angle C = 180°$,
$\angle B + \angle D = 180°$
Доказать: около ABCD можно описать окружность
Доказательство:



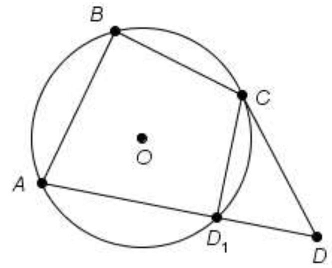
Доказать, что можно описать окружность, значит доказать, что все четыре вершины лежат на окружности. Проведем окружность через точки A, B и C и докажем, что D не лежит внутри и вне окружности.

I случай



1. Продолжим AD до пересечения с окружностью в точке D_1 => около $ABCD_1$ описана окружность => $\angle\text{B} + \angle D_1 = 180°$ (по условию $\angle\text{B} + \angle\text{D} = 180°$) => $\angle\text{D} = \angle D_1$
2. $\angle$D – внешний ΔDCD_1 => $\angle\text{D} = \angle DCD_1 + \angle D_1$, а значит $\angle\text{D} \neq \angle D_1$ => D – не лежит внутри окружности.

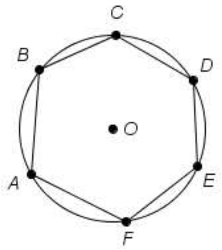
II случай



1. Пусть D_1 – точка пересечения с окружностью => около $ABCD_1$описана окружность => $\angle\text{B} + \angle D_1 = 180°$ (по условию $\angle\text{B} + \angle\text{D} = 180°$) => $\angle\text{D} = \angle D_1$
2. $\angle D_1$ – внешний $\Delta\text{CD}D_1$ => $\angle D_1 = \angle D_1\text{CD} + \angle\text{D}$, а значит $\angle D_1 \neq \angle\text{D}$ => D – не лежит вне окружности.

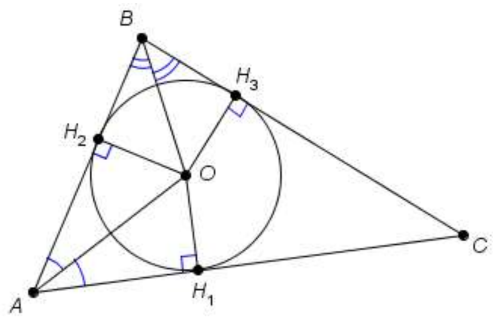
Таким образом точка D может лежать только на окружности => окружность проходит через все вершины четырехугольника => является описанной около ABCD.
Таким образом если сумма противоположных углов равна 180°, то около четырехугольника можно описать окружность.

Окружность, вписанная в треугольник и четырехугольник.



Окружность называется вписанной в многоугольник, если она касается всех его сторон; при этом многоугольник называется описанным около этой окружности.

Теорема: В любой треугольник можно вписать окружность, причем единственную. Центр этой окружности – есть точка пересечения биссектрис треугольника.

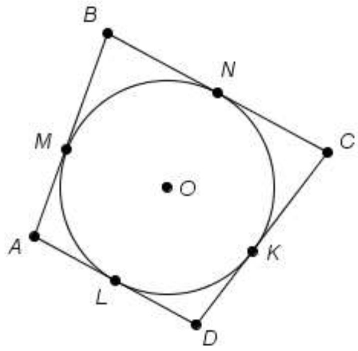


Дано: ΔABC
Доказать: в ΔABC вписать окружность
Доказательство:
Доказать, что в треугольник можно вписать окружность, значит доказать, что найдется точка, равноудаленная от всех сторон.

1. Проведем биссектрисы $\angle A$ и ∠B, которые пересекаются в точке O.
   Т.к. O ∈ биссектрисе $\angle A$ => $OH_1 = OH_2$ (по свойству биссектрисы угла).
   Т.к. O ∈ биссектрисе ∠B => $OH_2 = OH_3$ (по свойству биссектрисы угла)
   => $OH_1 = OH_2 = OH_3$ => точка O равноудалена от всех сторон треугольника => в ΔABC можно вписать окружность, с центром в этой точке. (Докажем существование)
2. Т.к. $OH_1 = OH_3$ => O ∈ биссектрисе ∠C (по признаку биссектрисы)
   => точка O – центр вписанной окружности, является точкой пересечения биссектрис треугольника.
3. Окружность, вписанная в треугольник единственна, в силу единственности ее центра – точки пересечения биссектрис треугольника.

В отличие от треугольника в четырехугольник можно вписать окружность не всегда.

Теорема: В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны между собой.

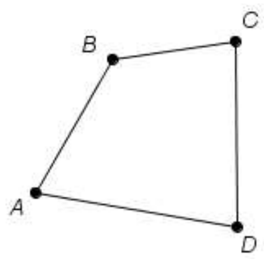


Дано: в ABCD вписана окружность

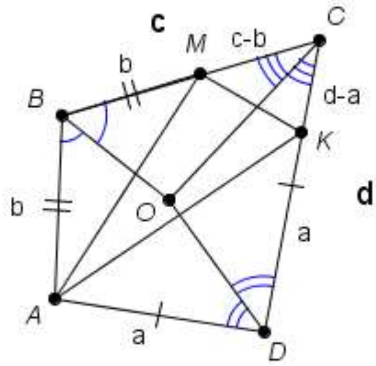
Доказать: $AB + CD = AD + BC$

Доказательство:

1. Т.к. AM и AL – касательные к окружности => AM = AL (по свойству отрезков касательной)
Аналогично BM = BN, CN = CK, DL = DK
2. $AB + CD = AM + MB + CK + DK$
$AD + BC = AL + LD + BN + NC$
=> $AB + CD = AD + BC$
Таким образом мы доказали, что если в четырехугольник вписана окружность, то сумма его противоположных сторон равна.



Дано: ABCD – четырехугольник, AB + CD = BC + AD
Доказать: в ABCD можно вписать окружность
Доказательство:
В четырехугольник можно вписать окружность, если найдется точка, равноудаленная от всех его сторон.
Обозначим $\mathrm{AD} = \mathrm{a}, \mathrm{AB} = \mathrm{b}, \mathrm{BC} = \mathrm{c}, \mathrm{CD} = \mathrm{d}$.
По условию $a + c = b + d$, $d - a = c - b$



Рассмотрим I случай: $d > a$ (=> $c > b$)

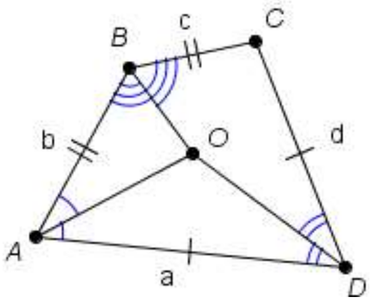
1. Отложим на CD: KD = AD = a, тогда KD = d − a

Отложим на BC: BM = AB = b, тогда MC = c − b

2. $\Delta ADK, \Delta ABM, \Delta MCK$ – равнобедренные (по определению)

3. Проведем биссектрисы $\angle B, \angle C, \angle D$. Т.к. треугольники равнобедренные, то биссектрисы будут медианами и высотами, а для ΔAMK они будут серединными перпендикулярами => пересекутся в одной точке O.

Таким образом точка O равноудаленная от AB, BC, CD, AD (по свойству биссектрис угла) => в четырехугольник ABCD можно вписать окружность



Рассмотрим II случай: $d = a$ (=> $c = b$)

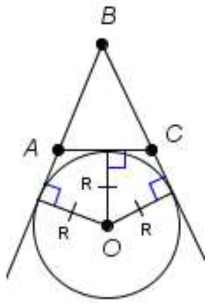
1. Т.к. $\Delta ADC: AD = CD, \Delta ABC: AB = BC$ => биссектрисы $\angle B$ и $\angle C$ будут высотами и медианами => серединными перпендикулярами к AC, т.е. лежат на одной прямой BD

2. Проведем биссектрису $\angle A$, которая пересекает BD в точке O

Таким образом мы доказали, что если в четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, то в него можно вписать окружность.

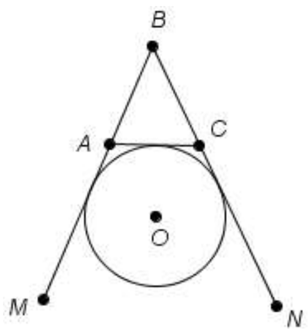
Окружность можно вписать в квадрат, в ромб.

Вневписанная окружность



Окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжения двух других сторон, называется вневписанной.

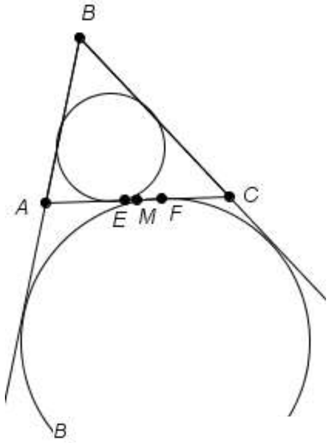
У треугольника три вневписанных окружности.



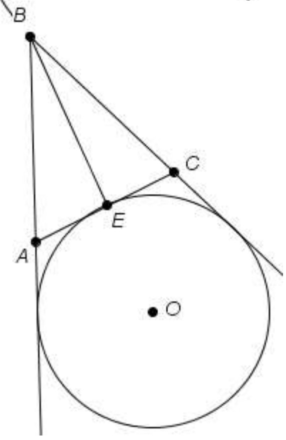
1. Т.к. O – равноудалена от сторон $\angle MAC$ и $\angle NCA$ => точка O лежит на пересечении биссектрис $\angle MAC$ и $\angle NCA$
2. Заметим, что точка O равноудалена от сторон $\angle ABC$ => O ∈ биссектрисе $\angle ABC$

Таким образом биссектриса угла треугольника пересекается с биссектрисами вписанных углов, при двух других вершинах в одной точке – центре вневписанной окружности.

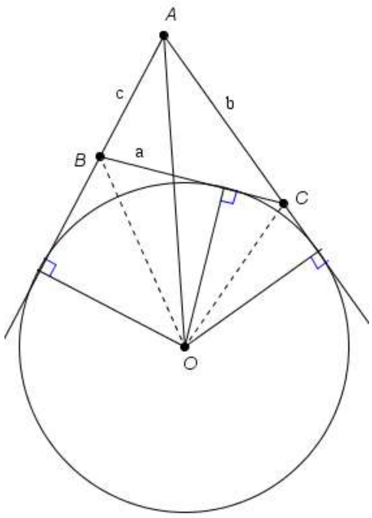
Свойства вневписанных окружностей



1. Точки, в которых вписанная и вневписанная окружности касаются стороны треугольника, симметричны относительно середины этой стороны.
   E – точка касания вписанной окружности
   F – точка касания вневписанной окружности
   M – середина AC
   ME = MF



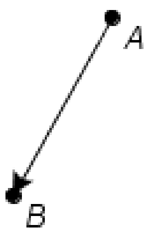
2. Прямая, проведенная через вершину треугольника и точку касания вневписанной окружности с противоположной стороной, делит периметр треугольника пополам.
   E – точка касания
   $\mathrm{AB} + \mathrm{AE} = \mathrm{BC} + \mathrm{EC} = \frac{P_\Delta}{2}$



3. Радиус вневписанной окружности, касающийся стороны a, равен отношению площади треугольника к разности полупериметра и этой стороны: $R_a = \frac{S_\Delta}{p-a}$.

$S_{\Delta\mathrm{ABC}} = S_{\Delta\mathrm{AOC}} + S_{\Delta\mathrm{BAO}} - S_{\Delta\mathrm{BOC}} =$
$\frac{1}{2}R_a * b + \frac{1}{2}R_a * c - \frac{1}{2}R_a * a = \frac{1}{2}R_a(b + c - a) =$
$\frac{1}{2}R_a(P_\Delta - 2a) = R_a(p - 2a) => R_a = \frac{S_\Delta}{p-a}$

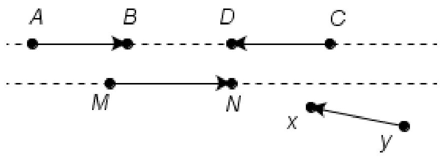
Векторы.
Основные понятия: коллинеарность, сонаправленность, равенство векторов. Сложение и вычитание векторов. Свойства сложения.



Вектор – это направленный отрезок.
$\overrightarrow{AB}$ – вектор: А – начало вектора $\overrightarrow{AB}$, В – конец вектора $\overrightarrow{AB}$.

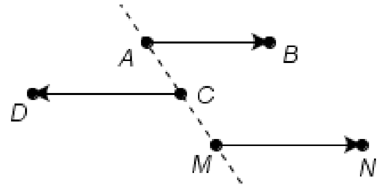
Модуль вектора – это длина направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ ($|\overrightarrow{AB}|$)

Векторы называются коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых или одной прямой.



$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{yx}$

Коллинеарные векторы называются **сонаправлеными**, если они направленны в одну и ту же сторону, т.е. концы вектором находятся в одной полуплоскости относительно прямой, проведенной через их начало.

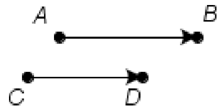


$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AB} \downarrow\uparrow \overrightarrow{CD}$

Противоположно направленными называются коллинеарные векторы, которые не являются сонаправлеными (т.е. имеют разные направления).

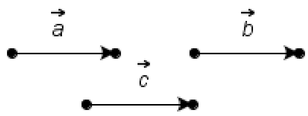
Признаки сонаправленых векторов:

1. Вектор $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправленые, если существует прямая а: векторы перпендикулярны ей и лучи AB и CD лежат в одной полуплоскости относительно этой прямой.

   $\overrightarrow{AB} \perp a,\ \overrightarrow{CD} \perp a => \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ лучи AB и CD лежат в одной полуплоскости => $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$
2. Два вектора сонаправленые с третьим, сонаправлены между собой

   $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}, \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{c} => \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

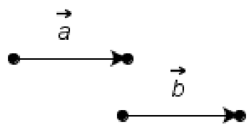
   Доказательство:

   $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c} =>$ существует прямая $l: l \perp \vec{a};\ l \perp \vec{c}$, лучи а и с лежат по одну сторону

   $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{c} =>$ существует прямая $d: d \perp \vec{b};\ d \perp \vec{c}$, лучи b и с лежат по одну сторону

   => если l и d не совпадают => $l \| d => \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ перпендикулярны одной прямой

Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их модули равны.



$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}, |\vec{a}| = |\vec{b}| => \vec{a} = \vec{b}$

Свойства равных векторов:

1. Каждый вектор равен самому себе $\vec{a} = \vec{a}$
2. Если $\vec{a}$ равен $\vec{b}$, значит вектор $\vec{b}$ равен $\vec{a}$ ($\vec{a} = \vec{b} => \vec{b} = \vec{a}$)

3. Два вектора равные третьему равны между собой ($\vec{a} = \vec{b}, \vec{c} = \vec{b} => \vec{a} = \vec{c}$)
   Доказательство:
   $\vec{a} = \vec{b} => |\vec{a}| = |\vec{b}|, \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; $\vec{c} = \vec{b} => |\vec{c}| = |\vec{b}|, \vec{c} \uparrow\uparrow \vec{b} =>$
   $|\vec{a}| = |\vec{c}|, \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$ (по 2 признаку) => $\vec{a} = \vec{c}$ (по определению)

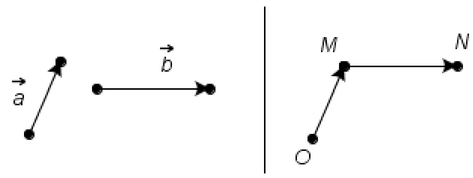
Теорема об откладывании вектора: От любой точку можно отложить вектор, равный данному и притом только один.

Нулевой вектор – вектор, модуль которого равен нулю, а направление произвольное ($\vec{0}$).

Линейные операции над векторами.

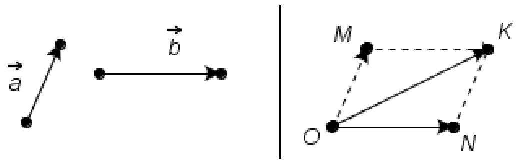
Сложение векторов

Правило треугольника



Дано: $\vec{a}, \vec{b}$
От точки O отложим $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$. От точки M отложим $\overrightarrow{MN} = \vec{b}$
$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON}$

Правило параллелограмма



Дано: $\vec{a}, \vec{b}$
От точки O отложим $\overrightarrow{OM} = \vec{a}, \overrightarrow{ON} = \vec{b}$.
Достроим до параллелограмма.
$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OK}$

Суммой двух векторов называется вектор, полученный по правилу треугольника или параллелограмма.

Свойства сложения векторов:

Свойство 1: Коммутативность $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

1) если $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ => от точки A $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ достроим до параллелограмма =>
   $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} => \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} => \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC} => \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2) если $\vec{a} \parallel \vec{b}$ => $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ лежат на одной прямой; здесь же лежат $\overrightarrow{B_1C_1} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AB_1} = \vec{a}$
   Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} => |\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{b}| + |\vec{a}| => |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{AC_1}| => C$ и C_1

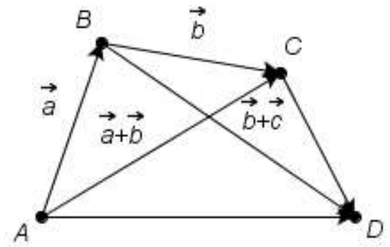
совпадают $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

Если $\vec{a}\ \uparrow\downarrow\ \vec{b}$ => $|\overrightarrow{AC}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|, |\overrightarrow{AC_1}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$ =>

$|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{AC_1}|$ => C и C_1 совпадают $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

Свойство 2: Ассоциативность $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}\ =\ \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

Доказательство:



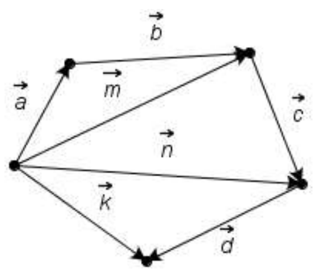
1) Пусть $\overrightarrow{AB}=\vec{a}\,, \overrightarrow{BC}=\vec{b}, \overrightarrow{CD}=\vec{c}$
2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\ \overrightarrow{BC})+\ \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$

   $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$ => $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}\ =\ \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

Свойство 3: $\vec{a}+0=\vec{a}$

Доказательство: $|\vec{a}|+|\vec{0}|=|\vec{a}|, \vec{a}\ \uparrow\uparrow\ \vec{0}$ => $\vec{a}+0=\vec{a}$

Сложение нескольких векторов



$\vec{a}+\vec{b}=\vec{m}$

$\vec{m}+\vec{c}=\vec{n}$

$\vec{n}+\vec{d}=\vec{k}$ => $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{k}$

Вывод: если расположить векторы та, что начало следующего совпадает с концом предыдущего, то сумму этих векторов можно найти последовательно по правилу треугольника.

Таким образом суммой последовательно расположенных векторов является вектор, начало совпадает с началом, а конец с концом последнего.

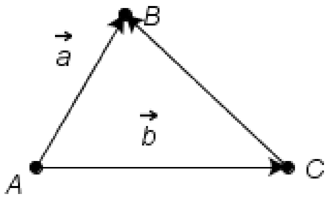
Два коллинеарных вектора называются **противоположными**, если их модули равны, а они противоположно направлены

$\vec{a}$ и $-\vec{a}$ противоположные

Суммой двух противоположных векторов будет нулевой вектор

$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

Вычитание векторов



$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

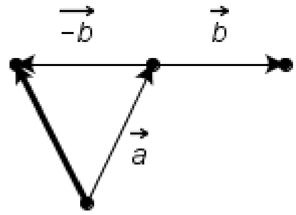
Разностью двух векторов называется вектор, в сумме с вычитаемым вектором дает уменьшаемый вектор

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c} : \ \vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$

от точки А отложим $\overrightarrow{AB} = \vec{a}\,, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$

Разность двух векторов можно найти как сумму уменьшаемого с вектором, противоположным вычитаемому

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



Умножение вектора на число. Свойства умножения.

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число $x \neq 0$ называется такой вектор $x \neq \vec{a}$, для которого выполняются следующие условия:

1. Его модуль равен произведению модуля $\vec{a}$ и модуля x
2. Он сонаправлен с $\vec{a}$, если $x > 0$ и противоположно направлен, если $x < 0$
   $x * \vec{a} = x\vec{a} : \ |x| * |\vec{a}| = |x\vec{a}|$
   $x\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}, x > 0$
   $x\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}, x < 0$

Следствия:

1. $1 * \vec{a} = \vec{a}$
2. $-1 * \vec{a} = -\vec{a}$
3. $x\vec{a} = x\vec{b}\ (x \neq 0) <=> \vec{a} = \vec{b}$
4. $x\vec{a} = y\vec{a}\ \left(\vec{a}\ \neq \vec{0}\ \right) <=> x = y$

Характеристическое свойство коллинеарных векторов.

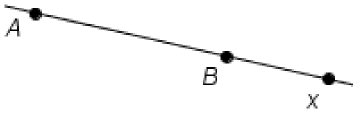
Теорема: вектор $\vec{b}$ коллинеарен ненулевому $\vec{a}$, тогда и только тогда, когда его можно представить в виде $\vec{b} = x * \vec{a}$

Прямая теорема: Если $\vec{a} \parallel \vec{b} => \vec{b} = x * \vec{a}$

1. Если $\vec{b} = \vec{0} => x = 0\ \ \vec{0} = 0 * \vec{a}$
2. Если $\vec{b} \neq \vec{0} : \ \vec{b}\ \uparrow\uparrow\ \vec{a} => x > 0, x = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\ ;\ \vec{b}\ \uparrow\downarrow \vec{a} => x < 0, x = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$

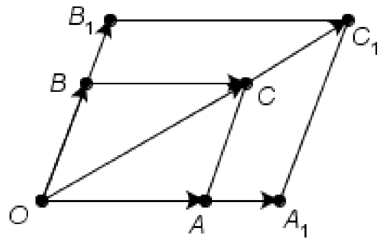
Обратная теорема: Если $\vec{b} = x * \vec{a} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

Следствие (Критерий принадлежности двух векторов одной прямой): Два вектора отложенные от одной точки лежат на одной прямой, тогда и только тогда, когда один из них получается из другого умножением на число.



$$x \in AB \Leftrightarrow \overrightarrow{Ax} = k * \overrightarrow{AB}$$

Свойства умножения:



1. $\alpha * (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha * \vec{a} + \alpha * \vec{b}$

   Приложим вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ к точке O и построим на них параллелограмм OACB.

   Диагональ – $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{\vec{a}+\vec{b}}$. При «растяжении» сторон параллелограмма в α раз в силу свойства подобия диагональ также «растягивается» в α раз. Это означает, что $\alpha * (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha * \vec{a} + \alpha * \vec{b}$
2. $(\alpha + \beta) * \vec{a} = \alpha * \vec{a} + \beta * \vec{a}$

   При «растяжении» вектора $\vec{a}$ в $(\alpha + \beta)$ раз получается такой же вектор, как при сложении вектора $\vec{a}$ «растянутого» в α раз и β раз.
3. $\alpha(\beta * \vec{a}) = (\alpha\beta) * \vec{a}$

Заключение

Изучение геометрии позволяет учащимся, во-первых, развивать мышление, учиться рассуждать, аргументировать, делать выводы, доказывать, а во-вторых, формулировать геометрические представления, необходимые каждому человеку.

Список литературы

1. Мехтиев, М.Г. Проблемы обучения геометрии в общеобразовательной школе на современном этапе / М.Г. Мехтиев // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. – 2012. – № 1 (18). – С. 92–95.
2. Смирнова, И.М. Педагогика геометрии: Монография / И.М. Смирнова. – М.:Прометей, 2004. – 336 с.
3. Геометрия. 7 – 9 классы: учебник для общеобразовательных учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 20-е изд. – М. : Просвещение, 2010.–384 с.
4. Мерзляк, А.Г. Геометрия : учеб. для 8 кл. общеобразоват. учеб. заведений с обуч. На рус. Яз. : пер с укр. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – Х. : Гимназия, 2016. – 224 с.
5. Апостолова, Г.В. Геометрия : 8 : двухуровн. Учеб. для общеобразоват. учеб. завед. / Пер с укр. Г. В. Апостолова. – К. : Гнеза, 2008. – 272 с.
6. Жохов В. И. Геометрия. Поурочные разработки. 7–9 классы : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / В. И. Жохов, Г. Д. Карташёва, Л. Б. Крайнева. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 2017. – 240 с.
7. Шлыков, В. В. Геометрия : учеб. пособие для 8-го класса общеобразовательных учреждений с рус. яз. обучения / В. В. Шлыков. – 3-е изд., перераб. – Минск : Нар. Асвета, 2011. – 166 с.
8. Казаков, В. В. Геометрия : учеб. пособие для 8-го кл. учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / В. В. Казаков. – Минск : Народная асвета, 2018. – 199 с.
9. Шарыгин, И. Ф. Геометрия 7–9 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений / И.Ф. Шарыгин. – М. : Дрофа, 2012. – 462, [2] с.
10. Истер А.С. Геометрия : учебн. Для 8 кл. общеобразоват. учебн. завед. / А.С. Истер. – Киев : Генеза, 2016. – 216 с.
11. Вернер А.Л. Геометрия. Методические рекомендации. 8 класс: учеб. пособие для общеобразоват. организаций / А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2017. – 92 с.