

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Южно-Уральский государственный университет  
(Национальный исследовательский университет)»

Институт естественных и точных наук  
Факультет математики, механики и компьютерных технологий  
Кафедра математического анализа и МПМ

**РАБОТА ПРОВЕРЕНА**

**Рецензент**

к.ф.-м.н., доцент

\_\_\_\_\_/А.Б. Самаров/

“ \_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2020 г.

**ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ**

**Заведующий кафедрой,**

д.ф.-м.н., зав.каф.

\_\_\_\_\_/В.Л. Дильман/

“ \_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2020 г.

**ВЕКТОРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ  
СИСТЕМЫ ОДУ**

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

ЮУрГУ – 01.03.01–2020–306-01–141. ВКР

**Руководитель работы**

к.ф.-м.н., доцент

\_\_\_\_\_/В.И. Заляпин/

“ \_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2020 г.

**Автор**

Студент группы ИЕТН-415

\_\_\_\_\_/В.С. Шалгин/

“ \_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2020 г.

**Нормоконтролер**

к.ф.-м.н., доцент

\_\_\_\_\_/М.А. Корытова/

“ \_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2020 г.

Челябинск  
2020

УДК 519.642

**Шалгин В. С.**

Векторная обратная задача для линейной системы ОДУ / В. С. Шалгин. – Челябинск, 2020. – 29 с.

Дипломная работа посвящена решению обратной задачи теории динамических измерений. Предложен новый способ решения, основанный на регуляризации уравнения, определяющего решение задачи Коши, сводящегося к векторному интегральному уравнению Вольтерры первого рода. Приведены результаты работы алгоритма на примере модельной задачи, оценена его точность.

Список лит. – 13 назв., рисунков – 4, приложений – 1 на 5 листах.

# Содержание

Введение . . . . .	4
1. Постановка задачи . . . . .	5
2. Разрешимость системы косвенных измерений . . . . .	6
3. Корректность и регуляризация . . . . .	9
4. Основные интегральные соотношения . . . . .	11
4.1. Дискретизация и решение дискретной задачи . . . . .	11
4.2. Поиск фундаментальной матрицы . . . . .	14
5. Оценка точности решения . . . . .	16
5.1. Оценка точности начальных данных интегрального уравнения . . . . .	16
5.2. Априорная оценка точности . . . . .	18
5.3. Апостериорная оценка точности . . . . .	18
5.4. Эмпирическая оценка точности . . . . .	19
6. Вычислительный эксперимент . . . . .	20
Заключение . . . . .	23
Список литературы . . . . .	24
Приложение . . . . .	25

# Введение

Современный этап развития измерительной техники характеризуется переходом от измерения постоянных физических величин к измерению физических величин, меняющихся во времени, от наблюдений свойств, состояний объектов к наблюдению за изменениями этих свойств и состояний. Измерения меняющихся во времени физических величин называются динамическими измерениями.

Динамические измерения имеют большое значение в различных областях науки, техники и производства. Измерение быстроменяющихся физических величин требуется, во-первых, во многих областях научных исследований, связанных с анализом и синтезом новых веществ и материалов, изучением объектов в экстремальных условиях, исследованием структуры материи, и, во-вторых, в отраслях техники и производства, для которых особенно характерно создание и повышение эффективности технологических процессов и проведение испытаний при создании новых приборов и автоматов.

Во многих случаях вместо истинного сигнала, который воспринимается измерительным устройством, на выходе наблюдается искажённый сигнал, существенно отличающийся по структуре, величине и по временным параметрам от истинного. Подобные искажения порождаются принципами работы измерительного устройства, шумами или помехами, содержащимися во входном сигнале и искажениями, возникающими при работе самого устройства, порождённые дискретностью представления данных.

Имеющиеся на сегодняшний день методы решения обратной задачи теории динамических измерений — восстановления входного сигнала по имеющемуся выходному, — и оценивания точности получаемых решений не всегда отвечают потребностям техников и исследователей и нуждаются в совершенствовании. Это обуславливает актуальность рассмотрения новых постановок и методов решения обратной задачи теории динамических измерений.

В качестве изучаемой модели измерительного устройства будет выступать система связей

$$\begin{cases} \dot{x} + Ax = f, \\ y = Tx \end{cases}$$

со следующей трактовкой:  $x = x(t)$  — вектор-функция состояний измерительного устройства,  $f = f(t)$ ,  $y = y(t)$  — вектор-функции входного (измеряемого) и выходного сигнала, соответственно,  $A = A(t)$  — матрица измерительного устройства размера  $n \times n$  и  $T$  — матрица выхода, постоянная и имеет размер  $m \times n$ .

# 1. Постановка задачи

Рассматривается динамическая система, описываемая системой обыкновенных линейных дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка

$$\dot{x}(t) + A(t)x(t) = f(t), \quad t_0 \leq t \leq h. \quad (1)$$

Здесь  $A(t) = \|a_{ij}(t)\|$  — квадратная матрица  $n$ -го порядка с непрерывными коэффициентами,  $f(t) = \|f_i(t)\|_{i=1}^n$  — непрерывная вектор-функция,  $x(t) = \|x_i(t)\|_{i=1}^n$  — гладкая вектор-функция.

Предполагается, что исследователь располагает косвенными измерениями  $y(t) = \|y_j(t)\|_{j=1}^m$  такими, что

$$y(t) = Tx(t), \quad (2)$$

где постоянная матрица  $T = \|t_{ij}\|$  имеет размер  $m \times n$ . Задача состоит в определении правой части  $f(t)$  (входного сигнала) системы (1) по наблюдениям (2).

Решение  $x(t)$  системы (2) нельзя напрямую подставлять в уравнение (1) для нахождения функции  $f(t)$  ввиду того, что измерения  $y(t)$  на практике не являются точными и производная  $\dot{x}(t)$  решения системы (2) с неточной левой частью может сколь угодно сильно отличаться от истинной производной. Кроме того, у системы (2) может не быть решений вообще. Вследствие вышесказанного нужен иной подход к поиску  $f(t)$ .

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + A(t)x(t) = f(t), \quad t_0 \leq t \leq h, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Известно [8, 11], что при сделанных выше допущениях относительно коэффициентов системы (1) задача Коши однозначно разрешима для любых начальных условий и её решение даётся соотношением

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds, \quad (3)$$

где  $\Phi(t) = \|\varphi_{ij}(t)\|_{i,j=1}^n$  — фундаментальная матрица однородной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) + A(t)x(t) = 0.$$

В случае, когда матрица  $A$  системы дифференциальных уравнений (1) постоянна, то поиск фундаментальной матрицы  $\Phi(t)$  принципиально не вызывает проблем (хотя технически может оказаться довольно сложным) — в этом случае фундаментальную матрицу можно найти точно [10], как матрицу, столбцы которой есть произвольные линейно-независимые решения однородной системы. Если найденная таким способом матрица  $\Psi(t)$  не удовлетворяет условию  $\Psi(t_0) = I$ , где  $I$  — единичная матрица порядка

$n$ , то будем использовать в соотношении (3) матрицу  $\Phi(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)$ , которая так же является фундаментальной матрицей и удовлетворяет начальному условию  $\Phi(t_0) = I$ .

Если матрица системы (1) не является постоянной, то фундаментальную матрицу будем искать как решение матричной задачи Коши

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) + A(t) \cdot \Phi(t) = 0, \quad \Phi(t_0) = I. \quad (4)$$

Умножим обе части уравнения (4) на  $dt$  и проинтегрируем от  $t_0$  до  $t$ . Учитывая начальное условие, придём к следующему уравнению

$$\Phi(t) + \int_{t_0}^t A(s)\Phi(s)ds = I, \quad (5)$$

решение которого, очевидно, будет фундаментальной матрицей с начальным условием  $\Phi(t_0) = I$ .

Вернёмся к уравнению (3). Умножим его слева на  $\Phi^{-1}(t)$  и обозначим

$$\Phi^{-1}(t)x(t) - x(t_0) = u(t). \quad (6)$$

Получим матричное интегральное уравнение Вольтерры первого рода для функции  $f(t)$

$$\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds = u(t), \quad (7)$$

или в краткой форме

$$Vf = u.$$

Искать функцию  $f(t)$  будем как решение интегрального уравнения (7).

При решении уравнения (7) необходимо исследовать вопрос его разрешимости в случае неточной правой части  $u(t)$ ; оценить условия однозначной разрешимости системы (2) косвенных данных и рассмотреть задачу поиска фундаментальной матрицы  $\Phi(t)$  однородной задачи Коши с помощью уравнения (5).

## 2. Разрешимость системы косвенных измерений

Рассмотрим систему линейных уравнений (2) для каждого фиксированного  $t$ . Если ранг  $r$  матрицы  $T$  равен рангу расширенной матрицы  $T|y$ , то система (2) по теореме Кронекера–Капелли [2] совместна и имеет либо одно решение, если  $r = n$ , либо имеет бесконечно много решений, если  $r < n$ . Если  $\text{rang}(T) \neq \text{rang}(T|y)$ , то система (2) несовместна и не имеет решений.

Пусть  $\text{rang}(T) = r$ , перенумеруем строки матрицы  $T$  и столбца  $y$  так, чтобы первые  $r$  строк матрицы  $T$  были линейно независимы. В этих допущениях существует [2] матрица

$\Lambda = \|\lambda_{ij}\|$  размера  $(m - r) \times r$  такая, что строки матрицы  $T$ , начиная с  $(r + 1)$ -ой по  $m$ -ую, будут связаны с первыми  $r$  строк соотношением

$$\begin{pmatrix} t_{r+1} \\ t_{r+2} \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix} = \Lambda \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_r \end{pmatrix},$$

где  $t_i$  —  $i$ -ая строка матрицы  $T$ . Тогда для равенства рангов матрицы  $T$  и расширенной матрицы  $T|y$  системы (2) и, соответственно, для её совместности необходимо и достаточно, чтобы для столбца измерений  $y$  выполнялось то же соотношение:

$$\begin{pmatrix} y_{r+1} \\ y_{r+2} \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \Lambda \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} \quad (8)$$

Если условие (8) не выполнено, то система (2) несовместна.

В случае, если система (2) несовместна или неопределённая, назовём её решением её нормальное псевдорешение  $x_n$ .

Нормальное псевдорешение (или просто нормальное решение) системы линейных уравнений  $y = Tx$  — это такой вектор  $x$  минимальной длины, для которого невязка  $\|y - Tx\|$  минимальна. Очевидно, что если у системы существует единственное обычное решение, то невязка для него равна нулю и нормальное решение будет совпадать с обычным. Аналогично, если у системы существует бесконечно много решений, то нормальное решение — одно из них, минимальное по норме, что следует из определения нормального решения.

Известно [1], что нормальное решение  $x_n$  всегда существует и единственно и оно есть линейная функция измерений  $y$  и представимо в виде  $x_n = T^+y$ , где  $T^+$  — псевдообратная матрица к матрице измерений  $T$ .

Для приложений важной является ситуация, когда матрица  $T$  — строка. Пусть  $T = (t_1 \ t_2 \ \dots \ t_n)$ , тогда  $y$  — скаляр, а псевдообратная матрица  $T^+$  будет иметь такой вид:

$$T^+ = \frac{1}{\sum_{i=1}^n t_i^2} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\|T\|^2} T^T$$

В чём легко убедиться, проверив выполнение требований, предъявляемых к псевдообратной матрице [1].

Нормальное решение системы (2) с такой матрицей  $T$  будет выглядеть так

$$x_n(t) = \frac{y(t)}{\|T\|^2} T^\top$$

Пусть теперь мы имеем приближённые измерения  $\tilde{y}(t)$  левой части системы (2) и известна оценка точности  $\|\tilde{y}(t) - y(t)\|_{L^2[t_0, h]} \leq \delta_0$ . Норму  $\|z(t)\|_{L^2[t_0, h]}$ , где  $z(t)$  — непрерывная вектор-функция с  $m$  компонентами будем вычислять так

$$\|z(t)\|_{L^2[t_0, h]} = \sqrt{\int_{t_0}^h \left( \sum_{i=1}^m z_i^2(t) \right) dt}.$$

Идентификатор данной нормы будем опускать, где это не вызовет неоднозначности толкования.

Пусть  $\tilde{x}_n(t)$  — нормальное решение системы (2) с произвольной матрицей  $T_{m \times n}$  и с неточной левой частью  $\tilde{y}(t)$ , а  $x_n(t)$  — нормальное решение той же системы с точной левой частью  $y(t)$ . Оценим точность приближённого нормального решения  $\tilde{x}_n(t)$ :

$$\|x_n - \tilde{x}_n\| = \|T^+ y - T^+ \tilde{y}\| \leq \|T^+\| \cdot \|y - \tilde{y}\| \leq \|T^+\| \delta_0 = \delta_1.$$

Здесь под нормой матрицы понимается норма Фробениуса, или евклидова норма, и для любой  $m$ -мерной вектор-функции  $y(t)$  с компонентами из пространства  $L^2[t_0, h]$  и с определённой выше нормой выполняется неравенство  $\|T^+ y(t)\| \leq \|T^+\| \cdot \|y(t)\|$ , что является следствием согласованности данных норм матрицы и вектор-функции.

Если  $T = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}$ , то  $\|T^+\| = \frac{1}{\|T\|^2} \|T^\top\| = \frac{1}{\|T\|^2} \|T\| = \frac{1}{\|T\|}$  и оценка точности  $\tilde{x}_n$  примет такой вид

$$\|x_n - \tilde{x}_n\| \leq \frac{\delta_0}{\|T\|}$$

Тогда, если хотя бы один элемент  $t_i$  матрицы-строки  $T$  не меньше единицы, то абсолютная ошибка  $\tilde{x}_n(t)$  не будет превышать абсолютной ошибки  $\tilde{y}(t)$ , то есть

$$\|x_n - \tilde{x}_n\| \leq \delta_0$$

В выражении (6) для  $u(t)$  функцию  $x(t)$  заменим на нормальное решение  $x_n(t)$  системы (2)

$$u(t) = \Phi^{-1}(t)x_n(t) - x_n(t_0).$$

И далее будем рассматривать интегральное уравнение (7) с такой правой частью.



### 3. Корректность и регуляризация

Рассмотрим операторное уравнение

$$Bf = u, \quad f \in F, \quad u \in U, \quad (9)$$

где  $F, U$  — метрические пространства. Задача (9) называется корректно поставленной, если выполнены три условия [12]:

- 1) уравнение (9) имеет решение для любого  $u \in U$ ,
- 2) это решение единственно,
- 3) решение непрерывно зависит от  $u$ , то есть решение устойчиво относительно возмущений правой части (9).

Эти три условия эквивалентны тому, что оператор  $B^{-1}$  определён на всём  $U$  и является непрерывным, то есть «малые» изменения правой части  $u$  порождают «малые» изменения решения  $f$ .

Примером корректной задачи является интегральное уравнение Вольтерры второго рода [6]

$$f(t) = u(t) + \int_a^t K(t, s)f(s)ds,$$

где  $u$  — заданная функция,  $f$  — искомая функция,  $K$  — ядро интегрального уравнения (оператора).

Примером же некорректно поставленной задачи может служить интегральное уравнение Вольтерры первого рода

$$\int_a^t K(t, s)f(s)ds = u(t).$$

Эта задача неустойчива по правой части  $u$  и решение существует не для всех функций  $u$  [6].

Таким образом, некорректно поставленные задачи нельзя непосредственно решать при неточно известном  $u$  — решения в таком случае может либо не существовать, либо решений может быть бесконечно много, либо решение будет сколь угодно сильно отличаться от истинного — соответствующего точному  $u$ . Даже в случае точно известного  $u$  поиск решения численными методами может далеко увести от точного решения ввиду внесения погрешностей метода и округления.

Проблему поиска решения некорректной задачи (9) можно трактовать как приближённое вычисление значения  $B^{-1}u$  при неточно заданном аргументе  $u$ . Приближённое к  $u$  данное будем понимать как пару  $(\tilde{u}, \delta)$ , притом  $\rho_U(\tilde{u}, u) \leq \delta$ , а элемент  $\tilde{u}$  может не принадлежать образу оператора  $B$ .

Основным понятием теории решения некорректно поставленных задач является понятие регуляризирующего оператора, или регуляризирующего алгоритма (РА), как спо-

соба нахождения приближённого решения некорректной задачи. Регуляризирующим оператором [12] в условиях задачи (9) называется отображение  $R : \{(\tilde{u}, \delta) \mid \tilde{u} \in U, \delta > 0\} \rightarrow F$ , удовлетворяющее условию  $\forall f \in F, \forall \tilde{u} \in U$  таких, что  $Bf = u, \rho_U(\tilde{u}, u) \leq \delta$ , выполнено  $\tilde{f} = R(\tilde{u}, \delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} f$ .

Если задача регуляризуема — существует регуляризирующий оператор для данной задачи, — то её решением называется результат применения РА к исходным данным. В случае, если оператор  $B$  — линейный ограниченный, действующий в нормированных пространствах, — известен с точностью  $\varepsilon$ , то есть известен ограниченный линейный оператор  $\tilde{B}$  такой, что  $\|\tilde{B} - B\| \leq \varepsilon$ , то определение регуляризирующего оператора соответствующим образом может быть расширено [12].

Пусть теперь дано уравнение

$$Bf = u, \quad (10)$$

где линейный ограниченный оператор  $B$  действует из нормированного пространства  $F$  в нормированное пространство  $U$ . Пусть нам известны  $\tilde{B}$  и  $\tilde{u}$  такие, что  $\|\tilde{u} - u\|_U \leq \delta, \|\tilde{B} - B\| \leq \varepsilon, \eta = (\delta, \varepsilon)$ . Для решения задачи построения приближённого решения  $\tilde{f}$ , сходящегося к точному решению  $f$  при стремлении  $\delta$  и  $\varepsilon$  к нулю, широко применяется следующий регуляризирующий алгоритм [9]. Рассмотрим сглаживающий функционал

$$M_\alpha[f] = \|\tilde{B}f - \tilde{u}\|_U^2 + \alpha\Omega[f], \quad (11)$$

где стабилизатор  $\Omega[f] = \|f\|_F^2$ . Пусть  $\tilde{f}$  — элемент, минимизирующий  $M_\alpha[f]$  на  $F$ . Если параметр регуляризации  $\alpha = \alpha(\eta)$  определённым образом согласован с  $\eta$ , то элемент  $\tilde{f}$  будет результатом применения РА и являться приближённым решением задачи (10).

Вернёмся теперь к уравнению (7)

$$Vf \equiv \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds = u(t),$$

Как уже было сказано, это интегральное уравнение Вольтерры первого рода, и задача его решения является некорректно поставленной. Кроме того, оператор  $V$  линеен, непрерывен и инъективен, и если положить, что функции  $f$  и  $u$  принадлежат гильбертовым пространствам, то задача (7) регуляризуема [12] и мы можем воспользоваться схемой (11).

Запишем сглаживающий функционал

$$M_\alpha[f] = \|Vf - u\|_{L^2[t_0, h]}^2 + \alpha\Omega[f]. \quad (12)$$

Стабилизатор  $\Omega[f]$  положим равным квадрату взвешенной  $L^2$ -нормы с весами  $p_i(t) \geq 0$ :

$$\Omega[f] = \int_{t_0}^h \sum_{i=1}^n (p_i(s)f_i^2(s))ds.$$

Решение интегрального уравнения (7) будем искать как вектор-функцию  $f$ , доставляющую минимум функционалу (12).

Другая задача, требующая решения, это задача поиска фундаментальной матрицы однородной системы (1) с помощью интегрального уравнения (5)

$$\Phi(t) + \int_{t_0}^t A(s)\Phi(s)ds = I.$$

Данная задача представляет собой поиск решения неоднородного интегрального уравнения Вольтерры второго рода, являющаяся корректно поставленной задачей [6] и, следовательно, всегда имеет единственное решение для любой неоднородности (в нашем случае неоднородность постоянная и равна единичной матрице  $I$ ). К решению данного уравнения мы вернёмся позднее.

## 4. Основные интегральные соотношения

Перепишем сглаживающий функционал (12) в развёрнутом виде. Введём обозначения

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

Функционал (12) перепишется в виде:

$$M^\alpha[f] = \int_{t_0}^h \left[ \sum_{i=1}^n \left( u_i(t) - \int_{t_0}^t \left( \sum_{j=1}^n g_{ij}(s)f_j(s) \right) ds \right)^2 + \alpha \sum_{i=1}^n p_i(t)f_i^2(t) \right] dt \quad (13)$$

### 4.1. Дискретизация и решение дискретной задачи

Для отработки алгоритмов численного решения задачи минимизации функционала (13) будем считать  $n = 2$  и  $t_0 = 0$ .

Разобьём отрезок  $[0; h]$  на  $N$  частей так, что

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = h,$$

и положим для кусочно-линейных функций  $\Lambda_k(t)$

$$\Lambda_k(t) = \begin{cases} \frac{t-t_{k-1}}{t_k-t_{k-1}}, & t \in [t_{k-1}; t_k], \\ \frac{t-t_{k+1}}{t_k-t_{k+1}}, & t \in [t_k; t_{k+1}], \\ 0, & t \notin [t_{k-1}; t_{k+1}], \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \quad (14)$$

$$\Lambda_0(t) = \begin{cases} \frac{t-t_1}{t_0-t_1}, & t \in [t_0; t_1], \\ 0, & t \notin [t_0; t_1], \end{cases} \quad \Lambda_N(t) = \begin{cases} \frac{t-t_{N-1}}{t_N-t_{N-1}}, & t \in [t_{N-1}; t_N], \\ 0, & t \notin [t_{N-1}; t_N]. \end{cases} \quad (15)$$

Функции (14), (15) образуют базис Лагранжа [4], позволяющий строить сплайны первого порядка дефекта 1, то есть кусочно-линейные приближения для функций определённых на отрезке  $[0; h]$ . Если  $x(t)$  определена на  $[0; h]$  и её значения в узлах  $x(t_k) = x_k$ , то её кусочно-линейное приближение можно записать так:

$$\hat{x}(t) = x_0 \cdot \Lambda_0(t) + x_1 \cdot \Lambda_1(t) + \dots + x_N \cdot \Lambda_N(t).$$

Положим в функционале (13)

$$\hat{f}_1(t) = \sum_{k=0}^N f_{1k} \cdot \Lambda_k(t), \quad \hat{f}_2(t) = \sum_{k=0}^N f_{2k} \cdot \Lambda_k(t),$$

и подставим в функционал (13) тем самым преобразовав его в функцию  $2N + 2$  переменных  $f_{1k}, f_{2k}, k = 0, 1, \dots, N$ :

$$\begin{aligned} \hat{M} = \int_0^h & \left[ \left( u_1(t) - \sum_{k=0}^N f_{1k} A_{11k} - \sum_{k=0}^N f_{2k} A_{12k} \right)^2 + \left( u_2(t) - \sum_{k=0}^N f_{1k} A_{21k} - \sum_{k=0}^N f_{2k} A_{22k} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \alpha \cdot p_1(t) \left( \sum_{k=0}^N f_{1k} \Lambda_k(t) \right)^2 + \alpha \cdot p_2(t) \left( \sum_{k=0}^N f_{2k} \Lambda_k(t) \right)^2 \right] dt. \end{aligned}$$

Здесь  $A_{ijk}(t) = \int_0^t g_{ij}(s) \Lambda_k(s) ds$

Для поиска минимума функционала  $\hat{M}$  воспользуемся необходимым условием экстремума [3]. Для этого следует сформировать систему линейных уравнений:

$$\frac{\partial \hat{M}}{\partial f_{1k}} = 0, \quad \frac{\partial \hat{M}}{\partial f_{2k}} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Данные уравнения выглядят так ( $i = 1, 2; k = 0, 1, \dots, N$ ):

$$\frac{\partial \hat{M}}{\partial f_{ik}} = \int_0^h \left[ \left( u_i(t) - \sum_{l=0}^N f_{1l} A_{1il}(t) - \sum_{l=0}^N f_{2l} A_{2il}(t) \right) \cdot (-A_{1ik}(t)) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left( u_2(t) - \sum_{l=0}^N f_{1l} A_{21l}(t) - \sum_{l=0}^N f_{2l} A_{22l}(t) \right) \cdot (-A_{2ik}(t)) + \\
& + \alpha \cdot p_i(t) \left( \sum_{l=0}^N f_{il} \Lambda_l(t) \right) \Lambda_k(t) \Big] dt = 0
\end{aligned}$$

После приведения подобных относительно переменных  $f_{1k}, f_{2k}$  получаем систему:

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^N (a_{kl}^{11} f_{1l} + a_{kl}^{12} f_{2l}) = b_k^1, \\ \sum_{l=0}^N (a_{kl}^{21} f_{1l} + a_{kl}^{22} f_{2l}) = b_k^2; \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (16)$$

Коэффициенты даются соотношениями:

$$a_{kl}^{ij} = \int_0^h [A_{1ik}(t) A_{1jl}(t) + A_{2ik}(t) A_{2jl}(t) + \alpha \cdot p_i(t) \Lambda_k(t) \Lambda_l(t)] dt, \quad \text{если } i = j,$$

$$a_{kl}^{ij} = \int_0^h [A_{1ik}(t) A_{1jl}(t) + A_{2ik}(t) A_{2jl}(t)] dt, \quad \text{если } i \neq j,$$

$$b_k^i = \int_0^h [u_1(t) A_{1ik}(t) + u_2(t) A_{2ik}(t)] dt.$$

При заполнении матрицы системы (16) нам потребуется многократное вычисление интегралов

$$I = \int_0^h Q(s) ds.$$

Наиболее естественной в рассматриваемом случае будет формула трапеций, возникающая при кусочно-линейной интерполяции интегрируемой функции. Будем считать, что сетка переменной  $t$  равномерная.

$$I \approx \delta_t \left( \frac{1}{2} Q(t_0) + \frac{1}{2} Q(t_N) + \sum_{m=1}^{N-1} Q(t_m) \right), \quad \delta_t = \frac{h}{N}.$$

Для вычисления внутренних интегралов будем использовать ту же сетку. При этом вычисление коэффициентов  $A_{ijk}$  в точке  $t_m$  будет выглядеть так:

$$A_{ijk}(t_m) = \int_0^{t_m} g_{ij}(s) \Lambda_k(s) ds \approx \frac{\delta_t}{2} \left[ g_{ij}(0) \Lambda_k(0) + g_{ij}(t_m) \Lambda_k(t_m) + 2 \sum_{l=1}^{m-1} g_{ij}(t_l) \Lambda_k(t_l) \right].$$

Притом  $\Lambda_k(t_l) = 0$ , если  $k \neq l$ , и  $\Lambda_k(t_l) = 1$ , если  $k = l$ . Таким образом, вычисление

значений  $A_{ijk}(t_m)$  упрощается:

$$A_{ijk}(t_m) = \begin{cases} 0, & m = 0 \mid m < k, \\ \frac{\delta_t}{2} g_{ij}(t_k), & m > 0 \ \& \ (k = 0 \mid k = m), \\ \delta_t g_{ij}(t_k), & 0 < k < m. \end{cases}$$

Представляется полезным отдельно вычислить интеграл  $\int_0^h \alpha \cdot p_i(t) \Lambda_k(t) \Lambda_l(t) dt$ , входящий в выражение  $a_{kl}^{ij}$ , ввиду наличия в нём нулевых на большей части отрезка функций. На ненулевом промежутке будем использовать формулу трапеций.

$$\int_0^h \alpha \cdot p_i(t) \Lambda_k(t) \Lambda_l(t) dt = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ \alpha \delta_t p_i(t_l), & k = l \ \& \ 0 < k < N, \\ \alpha \frac{\delta_t}{2} p_i(t_l), & k = l = 0 \mid k = l = N. \end{cases}$$

Задача минимизации сглаживающего функционала (12) для любых  $\alpha > 0$  и  $u(t)$  устойчива и всегда имеет решение и притом единственное [12]. Следовательно, построенная конечномерная задача также имеет единственное решение, которое сходится к точной экстремали при  $N \rightarrow +\infty$ . Решив систему (16) мы найдём приближённые значения  $f_1(t), f_2(t)$  в узлах  $t_k, k = 0, 1, \dots, N$ .

## 4.2. Поиск фундаментальной матрицы

Как было сказано нами ранее, в случае, когда матрица  $A(t)$  системы дифференциальных уравнений (1) не является постоянной фундаментальную матрицу  $\Phi(t)$  мы будем искать как решение уравнения (5)

$$\Phi(t) = I - \int_{t_0}^t A(s) \Phi(s) ds.$$

Будем искать её приближённо, используя кусочно-линейную интерполяцию. Разобьём отрезок  $[0; h]$  на  $N$  частей так, что

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = h,$$

Положим  $\Phi_k = \Phi(t_k), k = 0, 1, \dots, N$ . Тогда, используя уже упоминавшиеся линейные интерполяционные функции Лагранжа в (14), (15), получим приближение для  $\Phi(t)$

$$\hat{\Phi}(t) = \sum_{k=0}^N \Phi_k \Lambda_k(t). \quad (17)$$

Подставим данное приближение в интегральное уравнение (5)

$$\sum_{k=0}^N \Phi_k \Lambda_k(t) = I - \sum_{k=0}^N \int_{t_0}^t A(s) \Phi_k \Lambda_k(s) ds$$

Полагая  $t = t_i, i = 0, 1, \dots, N$  и учитывая, что  $\Lambda_k(t_i) = 0$ , если  $k \neq i$ , и  $\Lambda_k(t_i) = 1$ , если  $k = i$ , получим систему  $N+1$  линейных уравнений относительно матриц  $\Phi_i, i = 0, 1, \dots, N$

$$\Phi_i = I - \sum_{k=0}^i \int_{t_0}^{t_i} A(s) \Phi_k \Lambda_k(s) ds, \quad (18)$$

преобразуем её следующим образом

$$\Phi_i = I - M_i - \int_{t_0}^{t_i} A(s) \Phi_i \Lambda_i(s) ds = I - M_i - \frac{\delta_t}{2} A(t_i) \Phi_i,$$

где интеграл вычислен по формуле трапеций на равномерной сетке  $t_i, i = 0, 1, \dots, N, \delta_t = \frac{h - t_0}{N}$ , а матрица  $M_i$  равна

$$M_i = \sum_{k=0}^{i-1} \int_{t_0}^{t_i} A(s) \Phi_k \Lambda_k(s) ds,$$

Дальнейшие преобразования системы (18) дадут следующее рекуррентное соотношение для неизвестных матриц  $\Phi_i$

$$\Phi_i = \left( I + \frac{\delta_t}{2} A(t_i) \right)^{-1} (I - M_i), \quad \Phi_0 = I, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (19)$$

Поскольку задача решения уравнения Вольтерры второго рода корректна и исходное интегральное уравнение (5) всегда разрешимо, то для любого значения  $N$  соответствующая дискретная задача однозначно разрешима. При этом конечномерные решения сходятся к точному решению.

Пусть  $\Phi^N(t) = \sum_{k=0}^N \Phi_k^N \Lambda_k(t)$  — решение уравнения (5), полученное при разбиении отрезка  $[0; h]$  на  $N$  равных частей. Тогда точность нахождения фундаментальной матрицы  $\Phi(t)$  может быть оценена [5] разностью двух приближений  $\Phi^N(t)$  и  $\Phi^{2N}(t)$  для достаточно больших значений  $N$ :

$$\|\Delta\Phi\| = \|\Phi^N(t) - \Phi^{2N}(t)\|.$$

Числа  $N$  и  $2N$  выбраны в связи с удобством аналитического выражения разности кусочно-линейных матриц-функций, заданных на двух разных базисах Лагранжа. В

этом случае  $\Delta\Phi$  будет выглядеть так

$$\Delta\Phi = \sum_{k=0}^N (\Phi_k^N - \Phi_{2k}^{2N}) \Lambda_{2k}^{2N}(t) + \sum_{k=0}^{N-1} \left( \frac{1}{2} (\Phi_k^N + \Phi_{k+1}^N) - \Phi_{2k+1}^{2N} \right) \Lambda_{2k+1}^{2N}(t),$$

где  $\Lambda_i^{2N}(t)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  — базис Лагранжа на сетке с  $2N$  интервалов.

Для вычисления нормы  $\|\Delta\Phi\|$  можно использовать норму Фробениуса, или евклидову норму, ассоциированную с нормой пространства  $L^2$ :

$$\|\Delta\Phi\| = \sqrt{\int_{t_0}^h \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |(\Delta\Phi)_{ij}|^2 dt},$$

где  $(\Delta\Phi)_{ij}$  — элемент матрицы  $\Delta\Phi$ , стоящий на месте  $i, j$ .

Как уже было сказано, конечномерные решения  $\Phi^N(t)$  уравнения (5) сходятся к её точному решению  $\Phi(t)$ . Тогда и обратные приближённые фундаментальные матрицы  $(\Phi^N(t))^{-1}$  сходятся к точной обратной фундаментальной матрице  $\Phi^{-1}(t)$ . Так как нам для решения уравнения (7) понадобятся только значения в узлах  $t_k, k = 0, 1, \dots, N$  матрицы  $(\Phi^N(t))^{-1}$ , то для их поиска можно воспользоваться соотношением (19), обратив  $\Phi_i, i = 0, 1, \dots, N$ :

$$\Phi_i^{-1} = (I - M_i)^{-1} \left( I + \frac{\delta_t}{2} A(t_i) \right), \quad \Phi_0^{-1} = I, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Кусочно-линейная аппроксимация  $\Phi^{-1}(t)$  будет иметь аналогичный (17) вид

$$\hat{\Phi}^{-1}(t) = \sum_{k=0}^N \Phi_k^{-1} \Lambda_k(t),$$

оценку точности  $\|\Delta\Phi^{-1}\|$  которой можно провести по вышеизложенной схеме. Имея оценку точности ядра интегрального оператора  $V$  в (7), мы можем оценить точность  $\varepsilon$  самого оператора [5, 12]:

$$\|\Delta V\| = \|\tilde{V} - V\| = \|\Delta\Phi^{-1}\| \leq \varepsilon.$$

## 5. Оценка точности решения

### 5.1. Оценка точности начальных данных интегрального уравнения

Для проведения оценки точности регуляризованного решения задачи (7) необходимо провести оценку точности оператора  $V$  и правой части  $u$ . Первая из них проведена в предыдущем разделе и мы будем считать, что она известна. Притом оценка точно-



сти ядра  $\tilde{\Phi}^{-1}(s)$  интегрального оператора  $\tilde{V}$  считается равной оценке точности самого оператора

$$\|V - \tilde{V}\| = \|\Phi^{-1} - \tilde{\Phi}^{-1}\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon \geq 0.$$

Рассмотрим правую часть  $u(t)$  уравнения (7), она равна

$$u(t) = \Phi^{-1}(t)x_n(t) - x_n(t_0). \quad (20)$$

Нормальное псевдорешение  $x_n$  рассчитывается как функция от  $y(t)$  — исходных данных задачи (1)–(2). На практике  $y(t)$  неизвестно, а известно только его приближение  $\tilde{y}(t)$ , такое что  $\|y - \tilde{y}\| \leq \delta_0$ . В связи с этим вместо  $x_n$  мы имеем  $\tilde{x}_n$ .

Произведём оценку точности  $\tilde{x}_n$ , которую будем проводить относительно точного  $x_n$

$$\|x_n - \tilde{x}_n\| = \|T^+y - T^+\tilde{y}\| \leq \|T^+\| \cdot \|y - \tilde{y}\| \leq \|T^+\| \delta_0 = \delta_1.$$

В связи с вышесказанным вместо точного  $u$  мы также имеем его приближение  $\tilde{u}$ . Оценим его точность

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{u}\| &= \left\| \Phi^{-1}x_n - x_n(t_0) - \tilde{\Phi}^{-1}\tilde{x}_n + \tilde{x}_n(t_0) \right\| = \\ &= \left\| \Phi^{-1}x_n - \tilde{\Phi}^{-1}x_n + \tilde{\Phi}^{-1}x_n - \tilde{\Phi}^{-1}\tilde{x}_n + \tilde{x}_n(t_0) - x_n(t_0) \right\| = \\ &= \left\| \left( \Phi^{-1} - \tilde{\Phi}^{-1} \right) x_n + \tilde{\Phi}^{-1} (x_n - \tilde{x}_n) + \tilde{x}_n(t_0) - x_n(t_0) \right\| \leq \\ &\leq \varepsilon \|x_n\| + \left\| \tilde{\Phi}^{-1} \right\| \delta_1 + \delta_1 = \varepsilon \|x_n\| + \delta_1 \left( \left\| \tilde{\Phi}^{-1} \right\| + 1 \right). \end{aligned}$$

Так как значение  $\|x_n\|$  нам неизвестно, то необходимо оценить его значение для возможности расчёта оценки точности  $\tilde{u}$ . Если

$$\|x_n\| \leq \|\tilde{x}_n\|, \quad (21)$$

то оценка для  $\|x_n\|$  получена. Если  $\|\tilde{x}_n\| \leq \|x_n\|$ , то  $0 \leq \|x_n\| - \|\tilde{x}_n\|$ , пользуясь свойствами нормы, получим, что

$$0 \leq \|x_n\| - \|\tilde{x}_n\| \leq \|x_n - \tilde{x}_n\| \leq \delta_1.$$

Окончательно получим, что

$$\|x_n\| \leq \|\tilde{x}_n\| + \delta_1. \quad (22)$$

Будем использовать максимаальную из полученных оценок (21), (22).

Таким образом, общий вид оценки точности  $\tilde{u}(t)$  таков:

$$\|u - \tilde{u}\| \leq \varepsilon (\|\tilde{x}_n\| + \delta_1) + \delta_1 \left( \left\| \tilde{\Phi}^{-1} \right\| + 1 \right) = \delta.$$

Далее будем считать, что нам известны точности данных операторного уравнения (7),

а именно, что

$$\|u - \tilde{u}\| \leq \delta, \quad \|V - \tilde{V}\| \leq \varepsilon,$$

где  $\tilde{V}$  и  $\tilde{u}$  — приближённо известные оператор и правая часть уравнения (7) и  $\delta > 0$ ,  $\varepsilon \geq 0$ . Для краткости будем полагать  $\eta = (\varepsilon, \delta)$ .

## 5.2. Априорная оценка точности

Метод априорной оценки точности решения, полученного регуляризирующим алгоритмом с параметром регуляризации  $\alpha$ , описан в [5].

Пусть  $G = \tilde{V}^* \tilde{V}$ ,  $G^+$  — псевдообратный оператор к оператору  $G$ ,  $f$  — решение точного операторного уравнения (7),  $f_n$  — его нормальное решение,  $f_\eta = R(\tilde{V}, \tilde{u}, \eta)$  — результат применения регуляризирующего алгоритма, то есть функция, минимизирующая функционал (12). Тогда

$$\|\Delta f\| = \|f_\eta - f_n\| \leq \frac{\Delta}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{\alpha \|f_n\|}{\alpha + \frac{1}{\|G^+\|}}, \quad (23)$$

где  $\Delta = \delta + \varepsilon \|f\|$ . Относительная точность решения имеет вид:

$$\frac{\|\Delta f\|}{\|f\|} \leq \frac{\|\tilde{V}\| (\delta_{\text{отн}} + \varepsilon_{\text{отн}})}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{p\alpha}{1 + p\alpha}, \quad (24)$$

где

$$p = \|G^*\| = \|\tilde{V}^*\|^2, \quad \delta_{\text{отн}} = \frac{\delta}{\|u\|}, \quad \varepsilon_{\text{отн}} = \frac{\varepsilon}{\|\tilde{V}\|}.$$

$\|\Delta f\| \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} 0$ , если  $\alpha(\Delta) = O(\Delta^2)$ . В [5] получен способ нахождения оптимального значения параметра регуляризации  $\alpha_{\text{опт}}$  из соотношения

$$\alpha = \left( \frac{\|\tilde{V}\| (\delta_{\text{отн}} + \varepsilon_{\text{отн}})}{4p} \right)^{\frac{2}{3}} (1 + p\alpha)^{\frac{4}{3}}. \quad (25)$$

Соотношения (23)–(25) мало пригодны для практической оценки точности регуляризованного решения. Практически полезными будут апостериорные и эмпирические оценки точности.

## 5.3. Апостериорная оценка точности

Апостериорные оценки точности отличаются от априорных тем, что они проводятся после получения регуляризованного решения, которое само участвует в расчётах оценки его точности. Один из способов апостериорной оценки точности описан в [7].

Алгоритм вычисления оценки состоит в следующем. Пусть  $f_\eta = R(\tilde{V}, \tilde{u}, \eta)$ , — регуляризованное решение уравнения (7) с неточными данными,  $\bar{f}$  — решение неискажённой задачи (7). После применения регуляризирующего алгоритма нам известны

числа  $\|\tilde{V}f_\eta - \tilde{u}\|$  и  $\Omega[f_\eta]$ . Фиксируем некоторое число  $C > 1$  и вычисляем числа  $\Delta_\eta = C\|\tilde{V}f_\eta - \tilde{u}\|$ ,  $R_\eta = C\Omega[f_\eta]$ . Тогда оценка точности приближения  $f_\eta$  имеет такой вид:

$$\|f_\eta - \bar{f}\| \leq \sup \left\{ \|f_\eta - f\| : \Omega[f] \leq R_\eta, \|\tilde{V}f - \tilde{u}\| \leq \Delta_\eta \right\} = \epsilon(\eta), \quad (26)$$

При переходе от бесконечномерной задачи (7) к некоторой конечномерной вариационную задачу (26) можно решать с помощью метода множителей Лагранжа. Обозначим через  $E[f] = \|f_\eta - f\|^2$ ,  $P[f] = \|\tilde{V}f - \tilde{u}\|^2$ , тогда задачу (26) можно переписать так:

$$L[f, \lambda_1, \lambda_2] = E[f] + \lambda_1(\Omega[f] - R_\eta) + \lambda_2(P[f] - \Delta_\eta^2) \longrightarrow \max, \quad (27)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ .

После нахождения точки максимума  $\tilde{f}_\eta$  задачи (27), оценка (26) будет иметь вид

$$\|f_\eta - \bar{f}\| \leq \|f_\eta - \tilde{f}_\eta\|.$$

## 5.4. Эмпирическая оценка точности

Эмпирическая оценка точности решения задачи способна дать оценку снизу для наилучшей точности алгоритма поиска решения и даёт представление о вычислительной точности алгоритмов  $\Delta_C$  и точности метода решения  $\Delta_R$ . Для их нахождения необходимо решить две модельные задачи. Пример построения эмпирической оценки точности приведён в [5].

Значение  $\Delta_C$  можно определить по следующей схеме. Зададим гладкую вектор-функцию  $x(t)$  и по уравнению (1) вычислим  $f_{mod} = x' + Ax$ , получив тем самым точное решение неискажённой задачи (7) для некоторой правой части  $u_{mod}(t)$ .

Для вычисления точной правой части  $u_{mod}(t)$  уравнения (7) необходимо нормальное псевдорешение  $x_n$  системы (2), которое записывается как  $x_n = T^+y$ . Так как исходными данными задачи (1), (2) является вектор-функция  $y(t) = Tx(t)$ , то приходим к такому выражению для нормального псевдорешения  $x_n = T^+y = T^+Tx$ . Подставим полученное  $x_n$  в (20), получив выражение для точной правой части  $u_{mod}(t) = \Phi^{-1}(t)x_n(t) - x_n(t_0)$ . Таким образом, мы построили модельную задачу с точными исходными данными

$$Vf = u_{mod}. \quad (28)$$

Пусть  $\tilde{f}_{mod}$  — решение модельного уравнения (28), полученное методом регуляризации. Тогда вычислительная точность алгоритма оценивается величиной  $\Delta_C = \|f_{mod} - \tilde{f}_{mod}\|$ .

Построим теперь модельную задачу с неточными исходными данными, для оценки точности  $\Delta_R$  метода регуляризации. Как и выше, вычислим точное решение  $f_{mod}$  по заданной гладкой вектор-функции  $x(t)$ . Исходными данными является вектор-функция  $y(t)$ , возмутим её, положив  $y_{pert}(t) = y(t) + \xi(t)$ , где  $\xi(t)$  — функция погрешности. То-

гда, считая, что нам известна только  $y_{pert}$ , вычислим  $\tilde{x}_n = T^+ y_{pert}$  и подставим в формулу (20). Получим  $\tilde{u}_{mod}(t) = \Phi^{-1}(t)\tilde{x}_n(t) - \tilde{x}_n(t_0)$ . Получили возмущённую модельную задачу

$$Vf = \tilde{u}_{mod}. \quad (29)$$

Пусть  $\tilde{f}_{pert}$  — решение уравнения (29), полученное методом регуляризации. Тогда точность регуляризирующего алгоритма можно оценить величиной  $\Delta_R = \|f_{mod} - \tilde{f}_{pert}\|$ .

## 6. Вычислительный эксперимент

Напомним читателю исходную задачу, которую мы решаем. Определению подлежит непрерывная вектор-функция  $f(t) = \|f_i(t)\|_{i=1}^n$  по известной (приблизённо) вектор-функции  $y(t) = \|y_j(t)\|_{j=1}^m$ .  $f$  и  $y$  связаны следующими соотношениями

$$\dot{x}(t) + A(t)x(t) = f(t), \quad t_0 \leq t \leq h, \quad (30)$$

$$y(t) = Tx(t), \quad (31)$$

где  $A(t) = \|a_{ij}(t)\|_{i,j=1}^n$  — квадратная непрерывная матриц-функция,  $x(t) = \|x_i(t)\|_{i=1}^n$  — гладкая вектор-функция,  $T = \|t_{ij}\|$  — постоянная матрица, имеющая размеры  $m \times n$

Построение примера будем проводить по схеме построения модельной задачи в предыдущем разделе.

Положим в задаче (30), (31)

$$t_0 = 0, \quad h = 3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} 5 \cos 2t \\ 3 \sin 3t \end{pmatrix}.$$

По матрице  $A$  найдём фундаментальную матрицу  $\Phi(t)$  системы, равную единичной матрице при  $t = 0$ , и обратную к ней  $\Phi^{-1}(t)$ .

По  $x(t)$  построим точное значение неоднородности  $\bar{f}_{mod}(t)$  системы линейных ОДУ:  $\bar{f}_{mod}(t) = \dot{x}(t) + Ax(t)$ . Измеренный сигнал  $y(t)$  вычислим по соотношению (31):  $y(t) = Tx(t)$ . Вычислим точное нормальное псевдорешение системы (2)  $x_n(t) = T^+ y(t)$  и подставим его в (20), получив точное значение правой части  $u(t)$  интегрального уравнения (7):

$$\int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds = u(t)$$

Дискретизацию задачи проведём на равномерных сетках  $\left\{ t_i = i \cdot \delta_t, \delta_t = \frac{h}{N}, i = \overline{0, N} \right\}$  для  $t$  и  $s$  с  $N = 100$ . Параметр регуляризации выберем эмпирически (можно при выборе также пользоваться обобщённым принципом невязки, описанном в [12]), руководствуясь минимальностью абсолютной и относительной ошибки регуляризованного решения. На рис. 1 показано точное решение  $\bar{f}_{mod}$  и вычисленное приближённое решение  $\tilde{f}_{mod}$ . Аб-

солотная точность полученного приближения составляет  $\Delta_1 f = \|\bar{f}_{mod} - \tilde{f}_{mod}\| = 8.75$ , относительная точность  $\delta_1 f = \frac{\Delta_1 f}{\|\bar{f}_{mod}\|} = 0.376$ .

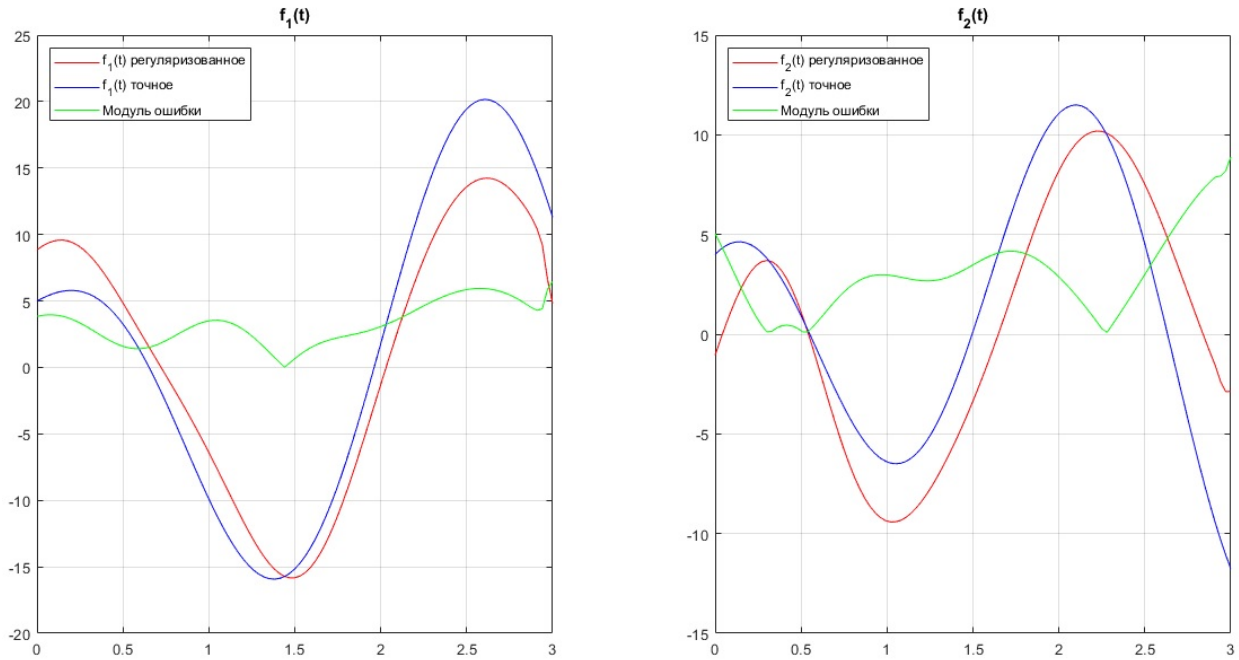


Рис. 1: Решение точной модельной задачи.

Наложим теперь на вычисленное  $y(t)$  аддитивную нормально распределённую помеху с нулевым средним так, чтобы приближённое значение  $\tilde{y}(t)$  имело относительную ошибку  $\frac{\|\tilde{y} - y\|}{\|y\|} = \delta_0 = 0.01$ . Это возможно осуществить, например, так  $\tilde{y}(t) = y(t) + \delta_0 \frac{\|y\|}{\sqrt{h}} \xi(t)$ , где  $\xi(t)$  в каждый момент времени  $t$  — нормально распределённая случайная величина с нулевым матожиданием и единичной дисперсией.

По значению  $\tilde{y}$  вычислим нормальное псевдорешение системы (2):  $\tilde{x}_n = T^+ \tilde{y}$ , и подставим в (20), получив искаженное значение правой части  $\tilde{u}(t)$  интегрального уравнения:

$$\int_0^t \Phi^{-1}(s) f(s) ds = \tilde{u}(t)$$

Решение  $\tilde{f}_{pert}$  возмущённой модельной задачи с той же дискретизацией изображено на рис. 2. Абсолютная точность полученного приближения составляет  $\Delta_2 f = \|\bar{f}_{mod} - \tilde{f}_{pert}\| = 8.84$ , относительная точность  $\delta_2 f = \frac{\Delta_2 f}{\|\bar{f}_{mod}\|} = 0.380$ .

Хорошо видно, что относительная точность решения искаженной модельной задачи почти не изменилась по сравнению с точной модельной задачей, не считая того, что  $\delta_1 f$  и  $\delta_2 f$  несколько велики. Это связано с тем, что решением интегрального уравнения (7) на самом деле является вектор-функция  $\bar{f}_{norm}$ , которая вычислена не по  $x(t)$ , задаваемое нами в модельной задаче, а по  $x_n(t)$ , то есть

$$\bar{f}_{norm} = \dot{x}_n + Ax_n.$$

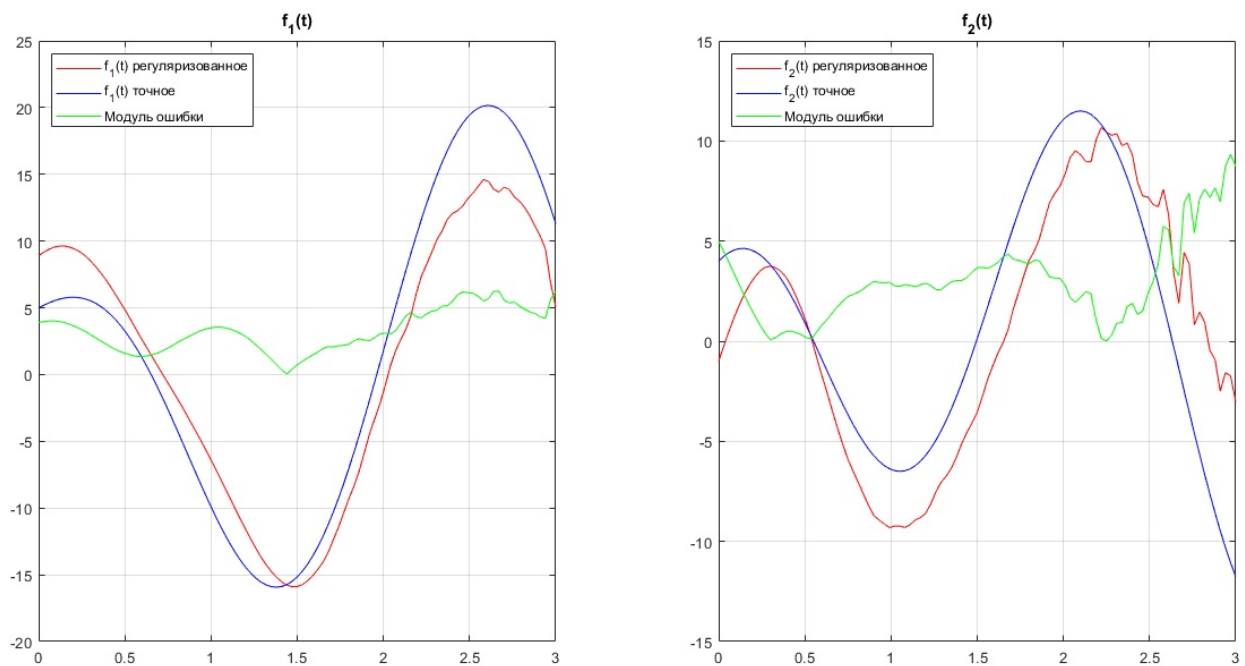


Рис. 2: Решение вомущённой модельной задачи.

Это следует из того, что в выражении (3) решения задачи Коши  $x(t)$  заменяется на  $x_n(t)$  из чего следует соответствие между неоднородностью  $f(t)$  и  $x_n(t)$ .

Данные теоретические соображения подтверждаются численным экспериментом. На рис. 3 изображено решение  $\tilde{f}_{norm}$  той же точной модельной задачи в сравнении с  $\bar{f}_{norm}(t)$ . Абсолютная точность полученного приближения составила  $\Delta_1 f_{norm} = \|\bar{f}_{norm} - \tilde{f}_{norm}\| = 0.036$ , относительная точность  $\delta_1 f_{norm} = \frac{\Delta_1 f_{norm}}{\|\bar{f}_{norm}\|} = 0.0015$ .

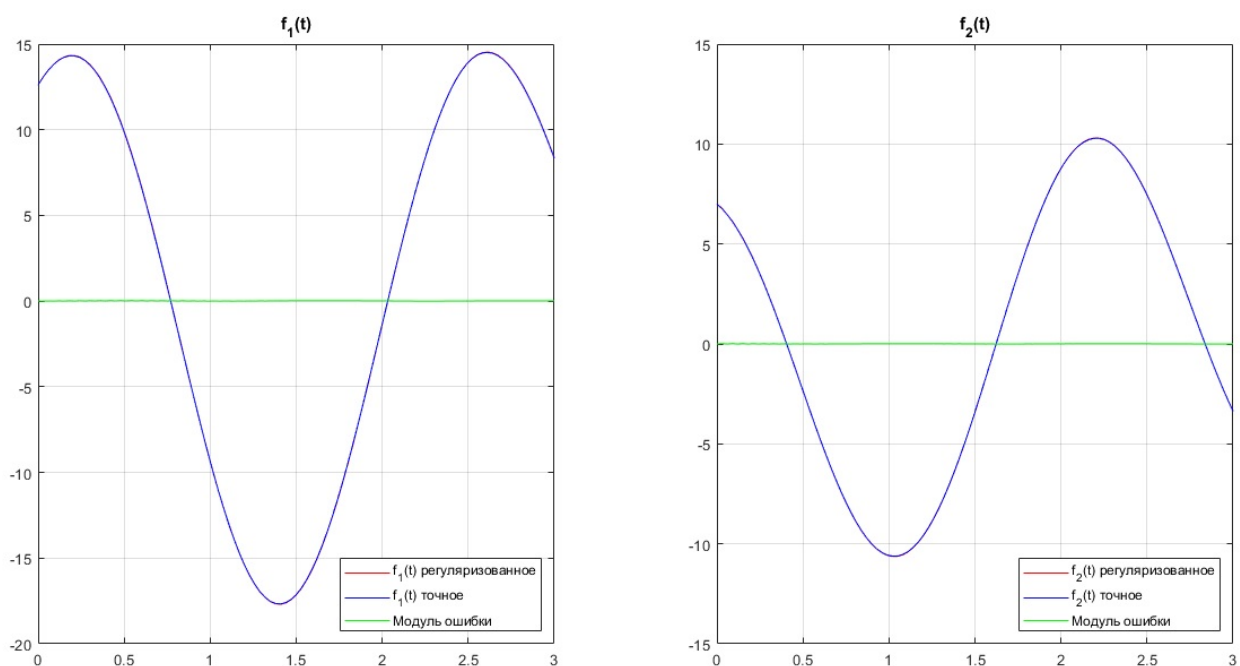


Рис. 3: Решение точной модельной задачи в сравнении с  $\bar{f}_{norm}(t)$ .

Для сравнения точностей решим ту же искажённую модельную задачу и сравним её

решение с  $\bar{f}_{norm}$ . На рис. 4 изображено приближённое решение  $\hat{f}_{norm}$  и  $\bar{f}_{norm}$ . Абсолютная точность приближения составила  $\Delta_2 f_{norm} = \|\bar{f}_{norm} - \hat{f}_{norm}\| = 2.63$ , относительная точность  $\delta_2 f_{norm} = \frac{\Delta_2 f_{norm}}{\|\bar{f}_{norm}\|} = 0.112$ .

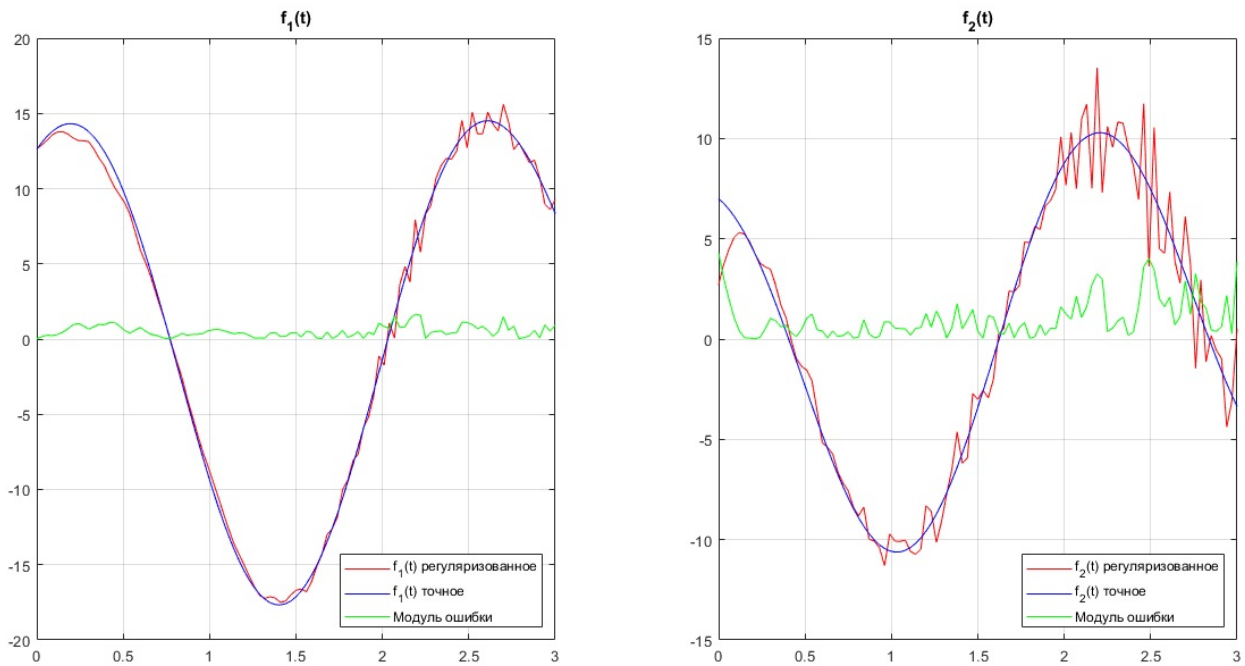


Рис. 4: Решение искажённой модельной задачи в сравнении с  $\bar{f}_{norm}(t)$ .

Таким образом, при решении задачи появляется неустранимая ошибка решения, связанная с разницей между измеряемым параметром  $x(t)$  и нормальным псевдорешением  $x_n(t)$  системы (31). Очевидно, что в случае, если система линейных уравнений (2), имеет единственное обычное решение, то регуляризованное решение задачи (30), (31) ведёт себя аналогично изображённому на рис. 4 приближённое решение в сравнении с точным решением.

## Заключение

Итак, нами успешно решена обратная задача теории измерений. Найден ответ на вопрос о проблеме разрешимости системы измерений; построен эффективный метод восстановления входного сигнала, основанный на регуляризации уравнения, определяющего решение задачи Коши, которое свелось к интегральному уравнению Вольтерры первого рода; рассмотрена и решена проблема численного поиска фундаментальной матрицы, необходимой при построении интегрального уравнения.

Алгоритмы численного решения интегрального уравнения на примере модельной задачи показали весьма приемлемые результаты и точность решения. В дальнейшей перспективе возможно исследование освещённой проблемы в ситуации, когда ошибки измерений описываются стохастическими процессами с известными параметрами.

## Список литературы

- [1] Беклемишев, Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. — 386 с.
- [2] Вся высшая математика: учебник / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — Т. 1. — 328 с.
- [3] Вся высшая математика: учебник / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — Т. 2. — 192 с.
- [4] Вся высшая математика: учебник / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — Т. 6. — 326 с.
- [5] Заляпин, В. И. Оценка погрешности численного метода решения одной обратной задачи / В. И. Заляпин, Ю. С. Попенко, Е. В. Харитоновна // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». — 2013. — Т. 6, № 3. — С. 51–58.
- [6] Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. — М.: Наука, 1978. — 512 с.
- [7] Леонов, А. С. Об апостериорных оценках точности решения линейных некорректно поставленных задач и экстраоптимальных регуляризующих алгоритмах / А. С. Леонов // Вычислительные методы и программирование. — 2010. — Т. 11. — С. 14–24.
- [8] Степанов, В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — 7-е изд. — М.: ГИФМЛ, 1958. — 470 с.
- [9] Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я Арсенин. — 2-е изд. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. — 288 с.
- [10] Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика», 2000, — 176 с.
- [11] Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман — М.: МИР, 1970. — 720 с.
- [12] Численные методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1990. — 232 с.
- [13] Шестаков, А. Л. Методы теории автоматического управления в динамических измерениях / А. Л. Шестаков. — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2013. — 257 с.



## Приложение

Приводятся листинги программ, реализующих численное решение задачи. Для моделирования численного эксперимента использовалась среда MATLAB.

```
% Главная программа: исходные данные, моделирование задачи,  
% построение графиков решений.  
function main  
clear all  
syms t s;  
n=2;  
h=3;  
N=100;  
delta0=0.01; % точность исходных данных y(t)  
T=[2.0 3.0];  
A=[-1 -3; % -1+sqrt(3)i  
    1 -1];  
dt=h/N;  
ti=0:dt:h;  
% Фундаментальная матрица и обратная  
[V, L]=eig(A);  
lam=[real(L(1,1)), imag(L(1,1))];  
v=[real(V(1,1)), imag(V(1,1));  
   real(V(2,1)), imag(V(2,1))];  
Psi=[exp(lam(1)*t)*(v(1,1)*cos(lam(2)*t)-v(1,2)*sin(lam(2)*t)),  
      exp(lam(1)*t)*(v(1,2)*cos(lam(2)*t)+v(1,1)*sin(lam(2)*t));  
      exp(lam(1)*t)*(v(2,1)*cos(lam(2)*t)-v(2,2)*sin(lam(2)*t)),  
      exp(lam(1)*t)*(v(2,2)*cos(lam(2)*t)+v(2,1)*sin(lam(2)*t))];  
Psi1=simplify(subs(inv(Psi),t,s));  
Phi=simplify(Psi*subs(Psi1,s,0));  
Phi1=simplify(subs(inv(Phi),t,s));  
f_Phi=matlabFunction(Phi);  
f_Phi1=matlabFunction(Phi1);  
% Вычисление точного f_exact  
x_exact=[5*cos(2*t);  
         3*sin(3*t)];  
f_x_exact=matlabFunction(x_exact);  
x_norm_exact=pinv(T)*T*x_exact; % нормальное псевдорешение точное  
f_x_norm_exact=matlabFunction(x_norm_exact);  
f_exact=diff(x_exact)-A*x_exact; % f, отвечающее x_exact  
f_f_exact=matlabFunction(f_exact);  
norma_f_exact=double(sqrt(vpaintegral(f_exact(1,1)^2+f_exact(2,1)^2,t,  
[0 h])));  
  
f_norm=diff(x_norm_exact)-A*x_norm_exact; % f, отвечающее x_norm  
f_f_norm=matlabFunction(f_norm);  
norma_f_norm=double(sqrt(vpaintegral(f_norm(1,1)^2+f_norm(2,1)^2,t,[0  
h])));  
  
% Вычисление точной правой части u_exact для точной модельной задачи  
u_exact=subs(Phi1,s,t)*x_norm_exact-f_x_norm_exact(0); % u, отвечающее  
x_norm  
f_u_exact=matlabFunction(u_exact);  
ui_exact=zeros(n,N+1);  
for i=0:N
```

```

        ui_exact(:,i+1)=f_u_exact(i*dt);
end
norma_u_exact=double(sqrt(vpaintegral(u_exact(1,1)^2+u_exact(2,1)^2,t,
[0 h])));

% Вычисление неточной правой части u_approx для неточной модельной
задачи
yi=zeros(1,N+1);
for i=0:N
    yi(i+1)=T*f_x_exact(dt*i);
end
norma_y=0; % норма y(t) точного
for i=0:N
    if i==0 || i==N ci=0.5; else ci=1; end
    norma_y=norma_y+ci*yi(i+1)^2;
end
norma_y=sqrt(norma_y*dt);
% Искажение y(t)
yi_approx=zeros(1,N+1);
for i=0:N
    yi_approx(i+1)=yi(i+1)+delta0*norma_y/sqrt(h)*randn; % отн. ошиб.
= delta0
end
delta0abs_true=0; % фактическая абсол. точность y(t)
for i=0:N
    if i==0 || i==N ci=0.5; else ci=1; end
    delta0abs_true=delta0abs_true+ci*(yi_approx(i+1)-yi(i+1))^2;
end
delta0abs_true=sqrt(delta0abs_true*dt);
delta0otn_true=delta0abs_true/norma_y; % фактическая относ. точность
y(t)
xi_norm_approx=zeros(n,N+1); % приближённое нормальное псевдорешение
for i=0:N
    xi_norm_approx(:,i+1)=pinv(T)*yi_approx(i+1);
end
ui_approx=zeros(n,N+1); % приближённое u(t)
for i=0:N
    ui_approx(:,i+1)=f_Phil(i*dt)*xi_norm_approx(:,i+1)-
xi_norm_approx(:,1);
end
delta=0; % фактическая абс. точность u_approx
for i=0:N
    if i==0 || i==N ci=0.5; else ci=1; end
    delta=delta+ci*( (ui_approx(1,i+1) - ui_exact(1,i+1))^2 +
(ui_approx(2,i+1) - ui_exact(2,i+1))^2 );
end
delta=sqrt(delta*dt);
delta_otn=delta/norma_u_exact; % фактическая относ. точность u_approx
fprintf("h=%g, N=%d,\nd0=%g, d0abs_true=%f, d0otn_true=%f,\nd=%f,
d_otn=%f\n",h,N,delta0,delta0abs_true,delta0otn_true,delta,delta_otn);

% Прямая слабая регуляризация
% Для точной модельной задачи
Name="Прямая слабая регуляризация для точной задачи";
a=0.1;
f=MinDiffEquations(a,h,N,ui_exact,n,f_Phil);
for i=0:N
    for j=1:n

```

```

        f_mod_approx(j,i+1)=f(i*n+j,1);
    end
end
for i=0:N
    fi_exact(:,i+1)=f_f_exact(i*dt);
    fi_norm(:,i+1)=f_f_norm(i*dt);
end
for i=0:N
    dfi(:,i+1)=abs(f_f_exact(i*dt)-f_mod_approx(:,i+1));
    %dfi(:,i+1)=abs(f_f_norm(i*dt)-f_mod_approx(:,i+1));
end
delta_f=0;
for i=0:N
    if i==0 || i==N ci=0.5; else ci=1; end
    delta_f=delta_f+ci*(dfi(1,i+1)^2+dfi(2,i+1)^2);
end
delta_f=sqrt(delta_f*dt);
delta_f_otn=delta_f/norma_f_exact;
%delta_f_otn=delta_f/norma_f_norm;
fprintf(Name);
fprintf("\nN=%d, a=%f, ошибка по норме L2: %f, относ. ошибка: %f\n",
N, a,delta_f,delta_f_otn);
figure('Color', 'w');subplot(1,2,1);
plot(ti,f_mod_approx(1,:), 'r',ti,fi_exact(1,:), 'b',ti,dfi(1,:), 'g');
%plot(ti,f_mod_approx(1,:), 'r',ti,fi_norm(1,:), 'b',ti,dfi(1,:), 'g');
grid on;
title('f_{1}(t)');
legend('f_{1}(t) регуляризованное','f_{1}(t) точное','Модуль
ошибки','Location','NorthWest')
subplot(1,2,2);
plot(ti,f_mod_approx(2,:), 'r',ti,fi_exact(2,:), 'b',ti,dfi(2,:), 'g');
%plot(ti,f_mod_approx(2,:), 'r',ti,fi_norm(2,:), 'b',ti,dfi(2,:), 'g');
grid on;
title('f_{2}(t)');
legend('f_{2}(t) регуляризованное','f_{2}(t) точное','Модуль
ошибки','Location','NorthWest')
set(gcf, 'NumberTitle', 'off', 'Name', Name)

% Для возмущённой модельной задачи
Name="Прямая слабая регуляризация для возмущённой задачи";
a=0.1;
f=MinDiffEquations(a,h,N,ui_approx,n,f_Phil);
for i=0:N
    for j=1:n
        f_mod_pert(j,i+1)=f(i*n+j,1);
    end
end
for i=0:N
    fi_exact(:,i+1)=f_f_exact(i*dt);
    fi_norm(:,i+1)=f_f_norm(i*dt);
end
for i=0:N
    dfi(:,i+1)=abs(f_f_exact(i*dt)-f_mod_pert(:,i+1));
    %dfi(:,i+1)=abs(f_f_norm(i*dt)-f_mod_pert(:,i+1));
end
delta_f=0;
for i=0:N
    if i==0 || i==N ci=0.5; else ci=1; end

```

```

    delta_f=delta_f+ci*(dfi(1,i+1)^2+dfi(2,i+1)^2);
end
delta_f=sqrt(delta_f*dt);
delta_f_otn=delta_f/norma_f_exact;
%delta_f_otn=delta_f/norma_f_norm;
fprintf(Name);
fprintf("\nN=%d, a=%f, ошибка по норме L2: %f, относ. ошибка: %f\n",
N, a,delta_f,delta_f_otn);
figure('Color', 'w');subplot(1,2,1);
plot(ti,f_mod_pert(1,:), 'r',ti,fi_exact(1,:), 'b',ti,dfi(1,:), 'g');
%plot(ti,f_mod_pert(1,:), 'r',ti,fi_norm(1,:), 'b',ti,dfi(1,:), 'g');
grid on;
title('f_{1}(t)');
legend('f_{1}(t) регуляризованное', 'f_{1}(t) точное', 'Модуль
ошибки', 'Location', 'NorthWest')
subplot(1,2,2);
plot(ti,f_mod_pert(2,:), 'r',ti,fi_exact(2,:), 'b',ti,dfi(2,:), 'g');
%plot(ti,f_mod_pert(2,:), 'r',ti,fi_norm(2,:), 'b',ti,dfi(2,:), 'g');
grid on;
title('f_{2}(t)');
legend('f_{2}(t) регуляризованное', 'f_{2}(t) точное', 'Модуль
ошибки', 'Location', 'NorthWest')
set(gcf, 'NumberTitle', 'off', 'Name', Name)

end

% Регуляризирующий алгоритм
function f=MinDiffEquations(a,h,N,u,n,f_Phi1)

dt=h/N;
[M,b]=SystemOfEquations(n,N,dt,a,u,f_Phi1);
f=M\b;

end

function [M,b]=SystemOfEquations(n,N,dt,a,u,f_Phi1)

b=zeros(n*(N+1),1);
for k=0:N
    for i=1:n
        temp=0;
        for m=0:N
            if m==0 || m==N ck=0.5; else ck=1; end
            for j=1:n
                temp=temp+ck*u(j,m+1)*A(j,i,k,m,dt,f_Phi1);
            end
        end
        b(k*n+i,1)=temp*dt;
    end
end

M=zeros(n*(N+1));
for k=0:N
    for l=0:N
        for i=1:n
            for j=1:n
                if n*k+i<=n*l+j
                    temp=0;

```

```

        for m=0:N
            if m==0 || m==N ck=0.5; else ck=1; end
            for q=1:n
temp=temp+ck*A(q,i,k,m,dt,f_Phil)*A(q,j,l,m,dt,f_Phil);
                end
            end
            temp=temp*dt;
            if i==j
                temp=temp+SecondIntegral(k,l,i,N,dt,a);
            end
            M(n*k+i,n*l+j)=temp;
        end
    end
end
end

for i=2:n*(N+1)
    for j=1:i-1
        M(i,j)=M(j,i);
    end
end

end

function val=SecondIntegral(k,l,i,N,dt,a)

if k==l && 0<k && k<N
    val=a*dt*p(i,l);
end
if k==l && (k==0 || k==N)
    val=a*dt/2*p(i,l);
end
if k~=l
    val=0;
end

end

function val=p(i,m)
    val=1;
end

function val=A(i,j,k,m,dt,f_Phil)

if m==0 || m<k
    val=0;
else
    g=f_Phil(k*dt);
    if k==0 || k==m
        val=0.5*dt*g(i,j);
    else
        val=dt*g(i,j);
    end
end

end

end

```