МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»
Институт естественных и точных наук
Кафедра уравнений математической физики

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент, заведующий кафедрой
математического и компьютерного
моделирования,
д-р физ.-мат.наук, доцент
_________________/ С.А. Загребина
«____»_____________2020 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой,
д-р физ.-мат.наук, профессор
______________/ Г.А.Свиридюк
«____»_____________2020 г.

УРАВНЕНИЕ БАРЕНБЛАТТА-ЖЕЛТОВА-КОЧИНОЙ НА ИНТЕРВАЛЕ С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ВЕНТЦЕЛЯ И НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ШОУОЛТЕРА-СИДОРОВА

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
ЮУрГУ–01.04.01.2020.376.ВКР

Руководитель работы, заведующий кафедрой УМФ, д-р физ.-мат. наук, профессор
___________/ Г.А Свиридюк
«____»_____________2020 г.

Автор работы,
студент группы ЕТ-221
_____________/ Н.С. Гончаров
«____»_____________2020 г.

Нормоконтролер, доцент кафедры УМФ, канд. физ.-мат. наук
_____________/ Д.Е. Шафранов
«____»_____________2020 г.

Челябинск 2020

УДК 517.9

Гончаров Н. С.

Уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной на интервале с краевым условием Вентцеля и начальным условием Шоуолтера – Сидорова / Н.С. Гончаров. – Челябинск, 2020. – 49 с.

В данной работе на числовом интервале исследуется начально-краевая задача для одного из уравнений в частных производных, а именно, уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной, описывающего динамику давления однородной жидкости в трещинновато-пористой среде. Здесь, в частности, рассматриваются задачи Коши и Шоуолтера – Сидорова для краевого условия Вентцеля, обобщающего классические краевые условия Дирихле, Неймана и Робена в детерминированном случае и в пространстве дифференцируемых $\mathbf{K}$–«шумов». Структура построения пространства, содержащее как $\mathbf{K}$-винеровский процесс, так и его производную в смысле Нельсона – Гликлиха, для стохастического уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной показывает новый взгляд на изучение уравнений в частных производных с «белым шумом» , где под «белым шумом» подразумевается производная в смысле Нельсона – Гликлиха от винеровского процесса. В работе доказаны теорема об асимтотическом поведении спектра оператора Лапласа на интервале с краевым условием Вентцеля, теорема о существовании и единственности задачи Шоуолтера – Сидорова для уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в детерминированном случае и в пространстве дифференцируемых $\mathbf{K}$–«шумов».

Библиографический список – 50 наименований, рисунков нет, таблиц нет, приложений нет.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Обозначения и сокращения

1. Множества, как принято, обозначаются заглавными буквами готического алфавита. Элементы множеств обозначаются строчными буквами латинского или греческого алфавита. Исключения составляют множества с уже устоявшимися

названиями, например:

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел,

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел,

$\mathbb{R}_+$ – множество $\{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$,

$\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел,

$L_p(\Omega)$ – пространства Лебега, $1 \leq p < \infty$, и т.д..

Множества, снабженные какой-либо структурой (алгебраической, топологической или порядковой) называются *пространством.* *Линейным пространством* называется множество, снабженное структурой линейного пространства. Линейное пространство, снабженное нормой, называется *нормированным пространством.* Полное нормированное пространство называется *банаховым пространством.*

2. Отображения множеств обозначаются заглавными буквами латинского алфавита. Отображение множества во множество действительных или комплексных чисел называется *функцией.* Отображение множества в пространство R^n называется *вектор-функцией.* Отображение множества в пространство матриц называется *матриц-функцией.* Отображение линейного пространства в линейное пространство называется *оператором.* Например:

$L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ – оператор, действующий из банахова пространства $\mathfrak{U}$ в банахово пространство $\mathfrak{F}$,

$L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ – обозначает, что L является линейным непрерывным оператором,

dom L – область определения линейного оператора L,

$\ker L$ – ядро линейного оператора L,

$\mathrm{im}\ L$ – образ линейного оператора L.

Символами $\mathbb{I}$ и $\mathbb{O}$ обозначаются, соответственно, тождественный и «нулевой» операторы, области определения которых ясны из контекста. Символами $\rho(L)$ и $\sigma(L)$ будет обозначать резольвентное и спектральное множество оператора L.

3. Вместо $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{U})$ будем писать $\mathcal{L}(\mathfrak{U})$.

Введение

Рассмотрим на интервале (a, b) дифференциальное уравнение Баренблатта–Желтова–Кочиной

$$\lambda u_t(x,t) - u_{txx}(x,t) = \alpha u_{xx}(x,t) + f(x,t),\ (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}, \tag{0.0.1}$$

которое представляет динамику давления однородной жидкости в трещинновато-пористой среде [3]. Здесь вещественные параметры α и λ характеризуют среду; функция $f(x,t)$ играет роль внешней нагрузки. Заметим, что, помимо исследования течения жидкости при переходе из пористой среды в трещинноватую, существуют другие интерпретации [5], [21] для описываемого уравнения (0.0.1). Например, к такому же виду приводится уравнение теплопроводности с двумя температурами

$$cu_t(x,t) - cau_{txx}(x,t) = ku_{xx}(x,t) + r(x,t),\ (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}, \tag{0.0.2}$$

описывающее для изотропного материала скорость изменения внутренней энергии за счет движения теплового потока от одной среды к ее дополнению [21]. Здесь c – удельная теплоемкость при фиксированной теоретической температуре φ_0 (c, как правило, принадлежит $\mathbb{R}_+$); r – тепло, подаваемое (на единицу объема) из внешней среды; параметры $k, a \in \mathbb{R}$ отвечают, соответственно, за теплопроводность и линейную связь двух температур. С учетом того, что (0.0.2) рассматривалось в терминах теории термодинамики сплошных сред (см., например, [35], где была доказана теорема, поясняющая физическую интерпретацию существования двух температур в излучающей и проводящей средах), уравнение (0.0.2) будем понимать относительно температуры в излучающей среде. Основной целью выпускной квалификационной работы является изучение разрешимости задачи Коши

$$u(0) = u_0 \tag{0.0.3}$$

и задачи Шоуолтера–Сидорова

$$P(u(0) - u_0) = 0, \tag{0.0.4}$$

для уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной (0.0.1), записанного в операторном виде, в специальным образом подобранных банаховых пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + f(t), \tag{0.0.5}$$

с краевыми условиями Вентцеля, обобщающими классические граничные условия Дирихле, Неймана и Робена,

$$\begin{aligned} &u_{xx}(a,t) + \alpha_0 u_x(a,t) + \alpha_1 u(a,t) = 0, \\ &u_{xx}(b,t) + \beta_0 u_x(b,t) + \beta_1 u(b,t) = 0, \end{aligned} \tag{0.0.6}$$

в детерминированном случае и в пространстве дифференцируемых $\mathbf{K}$–«шумов». В формуле (0.0.4) оператор P – проектор, который строится с помощью операторов L и M (подробное описание см. в 1.1.1).

Уравнения (0.0.5), неразрешенные относительно старшей производной, впервые упоминаются в работах А. Пуанкаре. Однако, первым, кто начал систематическое изучение начально-краевых задач для уравнений вида

$$L\,\dot{u} = Mu, \tag{0.0.7}$$

где L и M дифференциальные операторы в частных производных по «пространственным» переменным, был С. Л. Соболев. Именно благодаря последовательному освоению в предвоенные годы систем дифференциальных уравнений, описывающих малые колебания вращающейся жидкости, Сергей Львович получил условия устойчивости вращающегося волчка с полостью заполненной жидкостью, в зависимости от формы полости и ее параметров. На основании этого в 1954 году в [14] им было исследовано уравнение, моделирующее колебания гравитирующей жидкости, и изучена задача Коши для него. Цикл работ, связанных с изучением почти-периодичности решений волнового уравнения и смешанных задач для некоторых систем, не принадлежащих к типу систем Коши – Ковалевской, положил начало новому направлению в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Им является исследование неклассических уравнений в частных производных, не разрешенных относительно старшей производной по времени, которое первоначально развивалось его учениками, среди которых С.А Гальперн [6], А.Г Костюченко [10] и др.

Первыми, кто начал изучать разрешимость задачи Коши для абстрактного линейного операторного уравнения, были труды С.Г. Крейна [11] и его учеников. В частности, в них был детально рассмотрен вопрос о разрешимости и единственности начальной задачи для дескрипторного уравнения в регулярном случае (в смысле регулярности соответствующего операторного пучка), и изучен случай (L,σ)-ограниченного оператора M. Также показано, что фазовым пространством уравнения (0.0.7) служит некоторое подпространство в $\mathfrak{U}$ коразмерности равной размерности M-корневого пространства фредгольмова оператора L. Исследование задач, связанных с гидродинамикой, привели Селима Григорьевича, как позднее и его последователей, к необходимости изучения дифференциальных уравнений с неограниченными операторами в банаховых пространствах. В монографии [12] он отражает обстоятельное описание не только вопросов о корректной разрешимости и аналитичности абстрактной задачи Коши, но и указывает на ряд трудов, поясняющих классы корректности для некорректных задач.

В рамках данного направления также следует упомянуть Р.Е. Шоуолтера, который ввел в обиход термин «уравнения соболевского типа» в [41]. Большинство его трудов [42–44] основаны на исследовании существования и единственности решения (0.0.3), (0.0.7) для псевдопараболических уравнений и для сингулярных уравнений (0.0.7), приведенных к регулярным

$$\dot{u} = Su, \text{ где } S = L^{-1}M \tag{0.0.8}$$

в специфически построенном полугильбертовом пространстве с нехаусдорфовой метрикой.

В монографии [30] A. Favini и A. Yagi освещена теория полугрупп операторов, на основе которой изучается разрешимость дифференциальных включений

$$x_t \in A(x) \tag{0.0.9}$$

с многозначным линейным оператором. К такому включению сводится уравнение (0.0.7) с (L, σ)-ограниченным оператором M в случае устранимой особой точки в бесконечности.

В монографии [39] Г.А. Свиридюка и В.Е. Федорова рассмотрена теория изучения начально-краевых задач для различных линейных и полулинейных уравнений соболевского типа с использованием метода фазового пространства. Применение методов фазового пространства и относительно спектральной теории, предложенных Г.А. Свиридюком для изучения уравнений вида (0.0.7), позволило ему и его ученикам построить теорию вырожденных (полу)групп.

В данной выпускной квалификационной работе нас будет интересовать разрешимость задачи Коши и Шоуолтера – Сидорова с новым видом граничных условий вида (2.3.12). Исследование начально-краевых условий с граничными условиями вида (2.3.12) впервые упоминается в работах А.Д. Вентцеля. В работе [5] был поставлен вопрос о нахождении генератора полугруппы для однородных по времени марковских процессов в замкнутой ограниченной области с достаточно гладкой границей диффузионных процессов внутри этой области, где оператор M был эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка. Вне зависимости от этих результатов данную задачу рассматривал

У. Феллер в работах [24], [25]. Позднее в работе [45] Вентцелем был поставлен вопрос уже для более общего случая, когда в качестве рассматриваемой области выбирался круг или шар, а полугруппа бралась C_0-сжимающей и инвариатной относительно вращений. Используя взаимосвязь между C_0-сжимающими полугруппами и однородными по времени марковскими процессами, отвечающие условию Феллера [25], были построены, по заданным полугруппам граничные условия, удовлетворяющие дважды непрерывно дифференцируемым функциям из области определения инфинитезимального оператора.

Далее результаты [45] развивали и обобщали в большинстве работ. В одной из первых статей [27] A Favini, G.R. Goldstein, J.A. Goldstein, S. Romanelli начали выделять и различать общие и обобщенные краевые условия Вентцеля. В частности, в [27] и [28] было получено обобщение результатов [45] в зависимости от вида эллиптического оператора второго порядка и пространств, в которых определен заданный оператор; в [29] установлена классификация общих краевых условий Вентцеля для дифференциального оператора четвертого порядка на отрезке; в [33] показана роль граничных условий в линейном и нелинейном анализе. В России в [15, 16] А.И. Назаровым был рассмотрен другой подход в изучении задач Вентцеля. В силу того, что данный тип краевых условий включает классические граничные условия типа Дирихле, Неймана и Робена, автор исследовал обобщение результатов о разрешимости для уравнений Лапласа и Гемгольца в ограниченных и неограниченных областях при непрерывных граничных данных. В частности, Назаров приводит актуальность изучения данной задачи, поскольку с точки зрения диффузионных процессов рассмотренные модели описывают процессы, включающие диффузию вдоль границы и отражение от границы. Такая ситуация возникает, когда граница области покрыта особым тонким слоем («пленкой») из материала, имеющего высокую проводимость. В течение половины столетия с момента первого упоминания работ [5,45] А.Д. Вентцеля был выпущен цикл публикаций, связывающий краевые условия вида эллиптического уравнения второго порядка по касательным переменным:

с теорией потенциалов, позволяющих найти решения эллиптических задач в пространствах Соболева и Гельдера [1]; начально-краевой задачей для параболического уравнения с граничными условиями, имеющими вид параболического уравнения по касательным переменным [2]; теорией (полу)групп операторов в подходящих банаховых пространствах.

Тем не менее следует отметить, что несмотря на различие вышеописанных подходов, не была затронута теория вырожденных (полу)групп, разработанная в [39] Г.А. Свиридюком и его последователями. Используя метод фазового пространства, описанный в [17], в выпускной квалификационной работе нас будут интересовать разрешающие (полу)группы для уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в случае (L, p)-ограниченного оператора M в детерминированном и недетерминированном случае. Прибегая к стохастической интерпретации уравнений в частных производных, в этой работе частично затронем исследования недетерминированных задач в необходимой для нас интерпретации, отличительной особенностью которой является иное понятие «белого шума» в смысле производной Нельсона – Гликлиха от винеровского процесса.

Термин производной Нельсона – Гликлиха изначально был введен в монографии [32], там же была найдена первая производная случайного процесса. Позднее в [7] были вычислены производные высших порядков и исследованы первые математические модели. Практически в тоже время «белый шум» использовался в теории оптимальных измерений [40], где для него пришлось строить специальное пространство «шумов» в [20]. Данная парадигма не только обосновала согласованность с теорией Энштейна – Смолуховского [13], позволяющего понимать под броуновским движением искомый стохастический процесс, а под производной от этого процесса – «белый шум», но и сподвигла к появлению нового направления изучения стохастических уравнений соболевского типа. Это отражено в исследованиях: дихотомий стохастического уравнения, заданного на многообразии [36]; применения метода фазового пространства в случае (L, p)–ограниченного и (L, p)–секториального оператора M в [18, 31]; стохастических уравнений соболевского типа высокого порядка в [38].

Выпускная квалификационная работа, кроме аннотации, оглавления, обозначений и сокращений, введения, заключения и библиографического списка, содержит две главы. В первой главе описываются предварительные теоретические сведения, взятые из работ Г.А. Свиридюка (подробный обзор см., например, в [39]), и исследуется дифференциальный оператор второго порядка с классическими краевыми условиями Дирихле, Неймана и Робена и условия типа Вентцеля. В частности, в первом параграфе приводятся определения и формулировки теорем, необходимые для построения разрешающей группы в задаче Коши и Шоуолтера – Сидорова, в детерминированном случае. Во втором параграфе рассматриваются свойства одномерного оператора Лапласа для предложенных граничных условий в подходящих банаховых пространствах. В третьем параграфе строится пространство дифференцируемых $\mathbf{K}$–«шумов», содержащее как $\mathbf{K}$–винеровский процесс, так и его производную Нельсона – Гликлиха (т.е. «белый шум»).

Во второй главе описывается спектр одномерного оператора Лапласа, построенного в подходящем банаховом пространстве, а именно сужении пространства Лебега, с краевым условием Вентцеля и исследуется разрешимость задачи Коши и Шоуолтера – Сидорова для уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в детерминированном и стохастическом случае. В частности, в первом параграфе приводится асимптотическое разложение спектра для дифференциального оператора в рамках поставленной задачи. Во втором параграфе рассматривается существование и единственность решения задачи Коши и Шоуолтера – Сидорова для искомого уравнения с использованием метода фазового пространства. В третье параграфе исследуется аналогичная задача, что и во втором параграфе, в пространстве дифференцируемых $\mathbf{K}$–«шумов».

Благодарности

Выражаю огромную благодарность научному руководителю Георгию Анатольевичу Свиридюку за внимание и помощь, оказанные в ходе написания ра-

боты, а также за возможность приобщиться к современным математическим исследованиям.

Глава 1. Предварительные сведения

1.1. Уравнения соболевского типа с p-ограниченным оператором

Пусть $\mathfrak{U}, \mathfrak{F}$ – банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, оператор $M \in Cl(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$

Определение 1.1.1. Множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ называется *L-резольвентным множеством оператора M*. Множество $\mathbb{C} \backslash \rho^L(M) = \sigma^L(M)$ называется *L-спектром оператора M*.

Определение 1.1.2. Оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M)$ $L(\mu L - M)^{-1}$ с областью определения $\rho^L(M)$ называются соответственно *L-резольвентой, правой L-резольвентой, левой L-резольвентой оператора M*.

Определение 1.1.3. Оператор M называется *спектрально-ограниченным относительно оператора L* (или (L,σ)-ограниченным), если L-спектр оператора M является ограниченным множеством.

Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, а замкнутый контур $G = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r >$ ограничивающая область, содержащая $\sigma^L(M)$. Рассмотрим интегралы

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_G R^L_\mu(M)\, d\mu \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_G L^L_\mu(M)\, d\mu.$$

Лемма 1.1.1. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда операторы $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ являются проекторами.*

Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{U}^1 = \mathrm{im}\ P$, $\mathfrak{F}^1 = \mathrm{im}\ Q$. Обозначим через $L_k(M_k)$ сужение оператора $L(M)$ на $\mathfrak{U}^k$ $(\mathrm{dom}\ M \cap \mathfrak{U}^k)$, $k = 0, 1$.

Теорема 1.1.1. *(теорема о расщеплении) Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, тогда*

(i) имеет место действие операторов $M_k : \mathrm{dom}\ M \cap \mathfrak{U}^k \to \mathfrak{F}^k, L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$;

(ii) $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{F}^1), M_0 \in Cl(\mathfrak{U}^0;\mathfrak{F}^0)$;

(iii) $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$.

Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда в силу теоремы (1.1.1) вытекает существование операторов $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ и $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$. Разложим в ряд Лорана L-резольвенту оператора M в кольце $G = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$

$$(\mu L - M)^{-1} = (\mu L_0 - M_0)^{-1}(I - Q) + (\mu L_1 - M_1)^{-1}Q =$$
$$= -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H^k M_0^{-1}(I - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} Q$$

Определение 1.1.4. Бесконечно удаленную точку L-резольвенты оператора M будем называть

(i) устранимой особой точкой, если $H = \mathbb{O}$;

(ii) полюсом порядка p, *если* $H^p \neq \mathbb{O}, H^{p+1} = \mathbb{O}, p \in \mathbb{N}$;

(iii) существенно особой точкой, если $H^q \neq \mathbb{O}, \forall q \in \mathbb{N}$.

Определение 1.1.5. Оператор (L,σ)-ограниченный оператор M будем называть (L,p)-ограниченным, если точка ∞ является полюсом порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ его L-резольвенты.

Пусть $\ker L \neq \{0\}$, множество векторов $\{\psi_1, \psi_2, \cdots,\} \subset \mathfrak{U}$ будем называть *цепочкой M-присоединенных векторов* вектора $\psi_0 \in \ker L \backslash \{0\}$, если $L\psi_{k+1} = M\psi_k$ для $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и $\psi_k \notin \ker L \backslash \{0\}$. Цепочка может быть бесконечной, но она обязательно конечна, если существует такой вектор ψ_p для $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, что $M\psi_p \notin \mathrm{im}\ L$. Мощность конечной цепочки называется ее *длиной*.

Теорема 1.1.2. *Пусть оператор L–фредгольмов, тогда следующие утверждения эквивалентны*

(i) оператор M (L,p)-ограниченный, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$;

(ii) длины всех цепочек M-присоединенных векторов не превосходят p, причем существует по крайней мере одна цепочка длины p.

Для банаховых пространств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$, операторов $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ и $M \in Cl(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{1.1.1}$$

и задачу Шоултера – Сидорова

$$(R_\mu^L(M))^{p+1}(u(0) - u_0) = 0 \tag{1.1.2}$$

для линейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u}(t) = Mu(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.1.3}$$

Решением уравнения (1.1.3) называется такая вектор-функция $u \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathfrak{U})$, для которой $u(t) \in dom\ M$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и выполняется равенство (1.1.3). Решение $u = u(t)$ уравнения (1.1.3) назовем *решением задачи Коши*, если оно удовлетворяет условию (1.1.1) при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}$. Решение $u = u(t)$ уравнения (1.1.3) назовем *решением задачи Шоуолтера – Сидорова*, если оно удовлетворяет условию (1.1.2) при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}$.

Определение 1.1.6. Множество $\{U^t \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t \in \mathbb{R}\}$ называется *группой разрешающих операторов уравнения* (1.1.3), если при любом $u_0 \in \mathfrak{U}$ вектор-функция $u(t) = U^t u_0$ является решением уравнения (1.1.3), и операторы удовлетворяют свойству $U^s U^t = U^{t+s}$ $\forall s,t \in \mathbb{R}$.

Группа разрешающих операторов $\{U^t \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t \in \mathbb{R}\}$ называется голоморфной, если она имеет голоморфное продолжение во всю комплексную плоскость с сохранением свойств из определения 1.1.6. Для голоморфной группы $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ можно определить ее *ядро* $\ker U = \{\psi \in \mathfrak{U} : U^t\psi = 0, t \in \mathbb{R}\}$ и *образ* $\operatorname{im} U = \{u \in \mathfrak{U} : U^0 u = u, t \in \mathbb{R}\}$.

Теорема 1.1.3. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда существует семейство операторов*

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_G R^L_\mu(M)e^{\mu t}\ d\mu, t \in \mathbb{R}$$

образующее голоморфную разрешающую группу уравнения (1.1.3).

Определение 1.1.7. Множество $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{U}$ назовем *фазовым пространством* уравнения (1.1.3), если

(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (1.1.3) *лежит в $\mathfrak{B}$ поточечно, т.е. $u(t) \in \mathfrak{B}$ для всех $t \in \mathbb{R}$;*

(ii) для любого $u_0 \in \mathfrak{B}$ существует единственное решение задачи (1.1.1), (1.1.3).

Теорема 1.1.4. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда фазовое пространство уравнения* (1.1.3) *совпадает с подпространством $\mathfrak{U}^1$.*

Голоморфная группа уравнения (1.1.3) называется *разрешающей группой*, если ее образ совпадает с фазовым пространством уравнения (1.1.3). Заметим также, если оператор L непрерывно обратим, то фазовое пространство уравнения (1.1.3) совпадает со всем пространством $\mathfrak{U}$. Из вышесказанного вытекает следствие теоремы 1.1.4.

Следствие 1.1.1. Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда для любого $u_0 \in \mathfrak{U}^1$ существует единственное решение задачи (1.1.1), (1.1.3), имеющее вид $u(t) = U^t u_0$.

Пусть $\mathbb{I} = (a, b)$ – некоторый интервал, и оператор M (L,σ)-ограничен. Возьмем вектор-функцию $f \in C^\infty(\mathbb{I}, \mathfrak{F})$ и рассмотрим задачу Коши (1.1.1) для неоднородного линейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + f(t),\ t \in \mathbb{R}. \tag{1.1.4}$$

В силу теоремы 1.1.1 приведем задачу Коши к эквивалентной системе

$$\begin{cases} H\dot{u}^0(t) = u^0(t) + M_0^{-1}f^0(t), u^0(0) = v_0^0, \\ \dot{u}^1(t) = Su^1(t) + L_1^{-1}(t), u^1(0) = v_0^1, \end{cases}$$

где операторы имеют вид $H = M_0^{-1}L_0, S = L_1^{-1}M_1$, а векторы $u^k \in \mathfrak{U}^k$, $f^k \in \mathfrak{F}^k, k = 0,$

Теорема 1.1.5. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, причем ∞ – несущественная особая точка L-резольвенты M. Тогда при любой $f \in C^\infty(\mathbb{I};\mathfrak{F})$ и любом $u_0 \in \mathfrak{B}_f$*

$$\mathfrak{B}_f = \left\{ u \in domM : (I-Q)\left(Mu + \sum_{q=0}^{p} R^q \frac{d^q f}{dt^q}(0) \right) = 0 \right\},\ где\ R = L_0 M_0^{-1}(I-Q)$$

существует единственное решение $u \in C^\infty(\mathbb{I};\mathfrak{U})$ задачи Коши, имеющее вид

$$u(x,t) = -\sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1}(I-Q)\frac{d^q f(t)}{dt^q} + U^t u_0 + \int_0^t U^{t-s}L_1^{-1}Qf(s)\ ds,$$

и образующее разрешающую группу уравнения (1.1.4).

Перейдем к задаче Шоуолтера – Сидорова (1.1.2) для уравнения (1.1.3). Из леммы 1.1.1 и теорем 1.1.3, 1.1.4 следует, что в случае непрерывной обратимости оператора L построенный проектор $P = \mathbb{I}$ и подпространство $\mathfrak{U}^1$ совпадает с искомым банаховым пространством $\mathfrak{U}$. Далее отметим, что в случае необратимости оператора L и (L,p)-ограниченности оператора M подпространство $\mathfrak{U}^0 = \ker L$, либо состоит из собственных и M–присоединенных векторов длины не выше p. Таким образом, задача (1.1.2) в случае (L,p)-ограниченности оператора M сводится к эквивалентной для уравнения (1.1.3) задачи с условием

$$P(u(0) - u_0) = 0, \tag{1.1.5}$$

в силу теоремы 1.1.1 с построением проектора P вдоль $\mathfrak{U}^0$ на $\mathfrak{F}^0$ для $(L, 0)$-ограниченного оператора M или проектора P вдоль подпространства $\mathfrak{U}^0$, содержащего M–присоединенные векторы, на $\mathfrak{F}^0$ для (L, p)-ограниченного оператора M. Поскольку $U^0 = P$ в силу теоремы 1.1.1, то справедливы следующие следствия.

Следствие 1.1.2. Пусть оператор M (L, σ)-ограничен. Тогда для любого $u_0 \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение задачи (1.1.1), (1.1.3), имеющее вид $u(t) = U^t u_0$. Если вдобавок u_0 принимает значения из $\mathfrak{U}^0$, то данное решение будет также единственным решением задачи (1.1.1), (1.1.3).

Следствие 1.1.3. Пусть оператор M (L, σ)-ограничен. Тогда для любого $u_0 \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение задачи (1.1.2), (1.1.3), имеющее вид

$$u(x, t) = -\sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1}(I - Q)\frac{d^q f(t)}{dt^q} + U^t u_0 + \int_0^t U^{t-s} L_1^{-1} Q f(s)\, ds.$$

1.2. Краевые условия Вентцеля

Рассмотрим на интервале $\Omega = (a, b)$ собственно эллиптический оператор

$$Au(x) = \sum_{|\alpha| \le 2} a_\alpha(x) D^\alpha u = u''(x), \quad x \in (a, b) \tag{1.2.1}$$

с граничными операторными условиями B_1

$$(B_1 u)(x) = \sum_{|\alpha| \le m_1} b_{1,\alpha}(x) D^\alpha u(x) = 0,\ x \in \{a, b\}\ b_{1,\alpha}(x) \in \mathbb{R},\ 0 \le m_1 \le 2. \tag{1.2.2}$$

Формулами (1.2.1)-(1.2.2) определим линейный оператор $A : \mathrm{dom}\ A \subset H^2(a,b) \to \mathfrak{F}$. В качестве области определения оператора зададим линейное многообразие $\mathrm{dom}\ A = \{u \in H^2(a,b) :$ условия (1.2.2) выполняются$\}$, области значения $\mathfrak{F}$ – пространство $L_2(a,b)$.

Для описания дальнейших свойств оператора A напомним некоторые определения из [19].

Определение 1.2.8. Будем говорить, что оператор B_1 образует *нормальную систему*, если для $m_1 \geq 0$ и для всякого нормального к $\partial\Omega$ вектора ν_x выполнено условие

$$\sum_{|\alpha|=m_1} b_{1,\alpha}(x)\nu_x \neq 0.$$

Определение 1.2.9. Будем говорить, что оператор B_1 образует *дополнительную по отношению* к A систему, если для любой точки $x \in \partial\Omega$, соответствующего нормального к $\partial\Omega$ вектора $\nu_x, x \in \partial\Omega$ и любого касательного вектора $\xi_x \neq 0$ к $\partial\Omega$ выполнено условие линейной независимости многочленов от переменной τ

$$b_j(x, \xi_x + \tau\nu_x) = \sum_{|\alpha|=m_1} b_{1,\alpha}(x)(\xi_x + \tau\nu_x)^\alpha.$$

по модулю $a^+ = \tau - \psi$, где, для двух линейно независимых векторов ξ и η, ψ – корень многочлена $a_\alpha(x, \xi + \tau\eta)$.

Определение 1.2.10. Набор, состоящий из дифференциального оператора A и граничного оператора B_1 называется *регулярно эллиптическим*, если

(i) оператор A является собственно эллиптическим;

(ii) оператор B_1 образует нормальную систему для $m_1 \leq 1$;

(iii) оператор B_1 образует дополнительную по отношению к A систему.

Таким образом, используя выше изложенное построение, имеет место следующая теорема (см., например, [19]).

Теорема 1.2.6. *Пусть на интервале (a,b) задан регулярно эллиптичный* *набор операторов* A, B_1. *Тогда оператор* A, *определенный формулами* (1.2.1)-(1.2.2), *фредгольмов.*

Рассмотрим ниже более подробно свойства для оператора A с классическими граничными условиями (Дирихле, Робена, Неймана) и установим отличие относительно краевых условий Вентцеля.

Пусть $\mathbb{I} = (0, \pi)$ – некоторый интервал. Для оператора A с краевыми условиями Дирихле $u(0) = u(\pi) = 0$ прежде всего укажем самосопряженность оператора A, в силу компактности вложения $\operatorname{dom} A$ в пространство $\mathfrak{F}$ и симметричности оператора в гильбертовом пространстве $\mathfrak{F}$

$$< Au, v >_{\mathfrak{F}} = < u, Av >_{\mathfrak{F}} .$$

Таким образом, в силу того, что $R(A) = L_2(0, \pi)$ и $\dim\ker(A) = \dim\ker(A^*) = 0$, оператор A имеет замкнутый образ, конечную коразмерность и размерность ядра, и, соответственно, является фредгольмовым. Кроме того, нетрудно заметить, что спектр оператора A, построенного формулами (1.2.1)-(1.2.2), конечнократный, дискретный с предельной точкой сгущения на $-\infty$

$$\sigma(A) = \{-n^2\},\ n \in \mathbb{N}$$

с собственными функциями вида

$$u_k = \sin kx$$

и m-диссипативный в смысле

$$\rho(A) \cap (0, \infty) \neq \varnothing.$$

Для оператора A с краевыми условиями Неймана $u'(0) = u'(\pi) = 0$ по аналогии укажем, самосопряженность оператора A. И в силу того, что $R(A) =$

$L_2(0,\pi)$, $\ker(A) = \{Const\}$, и, соответственно, $\dim\ker(A) = \dim\ker(A^*) = 1$, оператор A имеет замкнутый образ, конечную коразмерность и размерность ядра, и, соответственно, является фредгольмовым. Кроме того, нетрудно заметить, что спектр оператора A, построенного формулами (1.2.1)-(1.2.2), конечнократный, дискретный с предельной точкой сгущения на $-\infty$

$$\sigma(A) = \{-n^2\},\ n \in \mathbb{Z}_+$$

с собственными функциями вида

$$u_k = \cos kx$$

и оператор m-диссипативный.

Для оператора A с краевыми условиями Робена

$$\alpha_0 u'(a) + \alpha_1 u(b) = 0,$$
$$\beta_0 u'(b) + \beta_1 u(b) = 0,$$

самосопряженность оператора A выполнена. И аналогично, в силу того, что $R(A) = L_2(a,b)$ и,

$$\dim\ker(A) = \dim\ker(A^*) = \begin{cases} 1, \text{если } (\alpha_0 + \alpha_1 a)\beta_1 = \alpha_1(\beta_0 + \beta_1 b) \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

оператор A имеет замкнутый образ, конечную коразмерность и размерность ядра, и, соответственно, является фредгольмовым. Кроме того, спектр оператора A, построенного формулами (1.2.1)-(1.2.2), конечнократный, дискретный с предельной точкой сгущения на $-\infty$

$$\sigma(A) = \{-n^2\},\ n \in \mathbb{Z}$$

и оператор m-диссипативный для неотрицательных коэффициентов α_1, β_1.

Рассмотрим оператор A с краевыми условиями Вентцеля

$$\begin{aligned} u''(a) + \alpha_0 u'(a) + \alpha_1 u(a) = 0, \\ u''(b) + \beta_0 u'(b) + \beta_1 u(b) = 0. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Поскольку значение второй производной на концах отрезка не определено в $H^2(a,b)$, введем в качестве области определения оператора A

$$D(A) = \Big\{ u \in C^2[a,b] : u''(x)\Big|_{\{a,b\}} \in L^2((a,b), dx)$$
$$\text{и условия (1.2.3) выполняются} \Big\}.$$

В силу того, что оператор A с краевым условием Вентцеля в пространстве $\mathfrak{F} = L_2(a,b)$ не будет диссипативным, и соответственно, m-диссипативным, что не позволит показать, что оператор A в пространстве $L_2(a,b)$ генерирует C_0-сжимающую полугруппу, в дальнейшем будем руководствоваться результами работы [7] для построения пространства $\mathfrak{F}$, вводя сужение пространства Лебега $X_2 = \left(L^2[a,b], dx\Big|_{(a,b)} \oplus \eta ds\Big|_{\{a,b\}} \right)$ с нормой

$$\|u\|^2_{\mathfrak{F}} = \int_a^b |u(x)|^2 dx + \eta_0 |u(a)|^2 + \eta_1 |u(b)|^2,$$

для получения самосопряженности и m диссипативности оператора A, где dx – мера Лебега в области (a,b); ds – поточечная мера на границе; $\eta_0 = \frac{1}{-\alpha_1}, \eta_1 = \frac{1}{\beta_1}$, где $\alpha_1 < 0 < \beta_1$ – положительные веса. В частности, из данной статьи авторами было показано, что оператор A замыкаем, существенно самосопряженный, и указав вложения пространств,

$$C^2_{BC} = \Big\{u \in C^2[a,b]: \text{ и условия (1.2.3) выполняются}\Big\} \subset D(A) \subset$$

$$\subset \Big\{u \in W^{2,2}_{loc}(a,b) \cap X_2 : u\text{"}(x) \text{ существует в смысле следа оператора}$$

$$\text{в } \; L^2(\{a,b\}, \eta ds)\Big\}$$

доказано, что замкнутый оператор A генерирует C_0-сжимающую полугруппу в силу теоремы Люмьера-Филлипса в пространстве X_2. В рамках нового построения оператора A, нетрудно заметить, в силу того, что $\overline{R(A)} = X_2$ и оператор A конечную коразмерность и размерность ядра, и, соответственно, оператор является фредгольмовым.

Особый интерес представляет оператор A с краевыми условиями Вентцеля вида $u''(a) = u''(b) = 0$, индекс которого нулевой, в силу того, что размерность ядра и коядра совпадает и равна двум, а образ оператора замкнут. Таким образом, оператор A в данной постановке задачи также является фредгольмовым.

1.3. Пространство случайных K-величин и K-«шумов»

Пусть $\Omega \equiv (\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ – полное вероятностное пространство; $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, наделенное борелевской σ-алгеброй. Под случайной величиной будем понимать измеримое отображение $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$. Множество случайных величин $\{\xi : E\xi = 0, D\xi \leq +\infty\}$, математическое ожидание которых равно нулю, а дисперсия конечна, образует гильбертово пространство $\mathbf{L_2}$ со скалярным произведением $(\xi_1, \xi_2) = E\xi_1\xi_2$ и нормой $\|\xi\|^2_{\mathbf{L_2}} = D\xi$.

Возьмем множество $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ и рассмотрим два отображения $f : \mathcal{J} \to \mathbf{L_2}$, которое каждому $t \in \mathcal{J}$ ставит в соответствии случайную величину $\xi \in \mathbf{L_2}$ и $g : \mathbf{L_2} \times \Omega \to \mathbb{R}$, которое каждой паре (ξ, ω) ставит в соответствии точку $\xi(\omega) \in \mathbb{R}$. Отображение $\eta : \mathcal{J} \times \Omega \to \mathbb{R}$, имеющее вид $\eta = \eta(t, \omega) = g(f(t), \omega)$, назовем *(одномерным) стохастическим процессом.* При каждом фиксированном $t \in \mathcal{J}$ значение стохастического процесса $\eta = \eta(t, \cdot)$ является случайной величиной, т.е. $\eta = \eta(t, \cdot) \in \mathbf{L_2}$, которую назовем *сечением стохастического процесса в точке* $t \in \mathcal{J}$. При каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ функция $\eta = \eta(\cdot, \omega)$ называется *(выборочной) траекторией случайного процесса*, соответствующей элементарному исходу $\omega \in \Omega$. Траектории также называются реализациями или выборочными функциями случайного процесса. Обычно, когда это не приводит к неясности, зависимость $\eta(t, \omega)$ от ω не указывается и случайный процесс обозначается просто $\eta(t)$.

Считая $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ интервалом, назовем стохастический процесс $\eta = \eta(t), t \in \mathcal{J}$ непрерывным, если почти наверное всего его траектории непрерывны. Множество всех непрерывных стохастических процессов образует банахово пространство, которое мы будем обозначать символом $\mathbf{CL_2}$, где

$$\|\eta\|^2_{\mathbf{CL_2}} = \sup_{t \in \mathcal{J}} D\eta(t, \omega).$$

Непрерывный случайный процесс, чьи (независимые) случайные величины гауссовы, называется *гауссовым*. В качестве примера непрерывного гауссова случайного процесса рассмотрим (одномерный) винеровский процесс $\beta(t)$, моделирующий броуновское движение на прямой в теории Эйнштейна–Смолуховского. Он обладает следующими свойствами:

(i) п.н. все траектории $\beta(t)$ непрерывны, п.н. $\beta(0) = 0$, и при всех $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ случайная величина $\beta(t)$ гауссова;

(ii) математическое ожидание $E(\beta(t)) = 0$ и автокорреляционная функция $E\bigg((\beta(t) - \beta(s))^2\bigg) = |t - s|$ при всех $s, t \in \overline{\mathbb{R}}_+$;

(iii) траектории $\beta(t)$ недифференцируемы в любой точке $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ и на любом сколь угодно малом промежутке имеют неограниченную вариацию.

Пусть $\mathcal{A}_0$ – σ-подалгебра σ-алгебры $\mathcal{A}$. Построим подпространство $\mathbf{L_2^0} \subset \mathbf{L_2}$ случайных величин, измеримых относительно $\mathcal{A}_0$. Обозначим, через $\Pi : \mathbf{L_2} \to \mathbf{L_2^0}$ – ортопроектор. Для любого $\xi \in \mathbf{L_2}$ случайная величина $\Pi\xi$ называется *условным математическим ожиданием* случайной величины ξ относительно $\mathcal{A}_0$ и обозначается $E(\xi|\mathcal{A}_0)$.

Зафиксируем $\eta \in \mathbf{CL_2}$ и $t \in \mathcal{J}$, через $\mathbf{N}_t^\eta$ обозначим σ-алгебру, порожденную случайной величиной $\eta(t)$, через $\mathbf{N}_t^\eta = \mathbf{E}(\cdot|\mathbf{N}_t^\eta)$ – условное математическое ожидание относительно $\mathbf{N}_t^\eta$.

Определение 1.3.11. Пусть $\eta \in \mathbf{CL_2}$, *производной Нельсона-Гликлиха* $\overset{\circ}{\eta}$ *стохастического процесса* $\eta(t)$ *в точке* $t \in \mathcal{J}$ называется случайная величина

$$\overset{\circ}{\eta}(t,\cdot) = \frac{1}{2}\left(\lim_{\Delta t \to 0+} \mathbf{E}_t^\eta\left(\frac{\eta(t+\Delta t,\cdot)-\eta(t,\cdot)}{\Delta t}\right) + \lim_{\Delta t \to 0+} \mathbf{E}_t^\eta\left(\frac{\eta(t,\cdot)-\eta(t-\Delta t,\cdot)}{\Delta t}\right)\right),$$

если предел существует в смысле равномерной метрики на $\mathbb{R}$.

Если производные $\overset{\circ}{\eta}(t,\cdot)$ Нельсона – Гликлиха стохастического процесса $\eta(t)$ существуют во всех (или почти всех) точках интервала $\mathcal{J}$, то будем под этим понимать о существовании производной Нельсона – Гликлиха $\overset{\circ}{\eta}(t,\cdot)$ на $\mathcal{J}$ (п.н. на $\mathcal{J}$). Отметим, что если траектории случайного процесса η п.н. непрерывно дифференцируемы в «обычном смысле» на (ϵ,τ), то их производная Нельсона – Гликлиха совпадает с «обычной» производной. Так, например, обстоит дело со стохастическим процессом $\eta(t,\omega) = \alpha\sin(\mu t) + \beta\cos(\mu t)$, где α и β гауссовы случайные величины, $\mu \in \mathbb{R}_+$ – некоторая фиксированная константа, а $t \in T = [0,\infty)$.

В качестве примера приведем производную Нельсона – Гликлиха, найденную для винеровского процесса $\beta(t)$ (см. напр., [18]), описывающего броуновское движение в модели Энштейна-Смоуховского

$$\overset{\circ}{\beta}(t) = \frac{\beta(t)}{2t}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Заметим, что множество непрерывных стохастических процессов, для которых существует производная $\overset{\circ}{\eta}(t,\cdot)$, образует банахово пространство $\mathbf{C^1L_2}$ с нормой

$$\|\eta\|^2_{\mathbf{C^1L_2}} = \sup_{t\in\mathcal{J}} \left(D\eta(t,\omega) + D\overset{\circ}{\eta}(t,\omega) \right). \tag{1.3.1}$$

Введем в расмотрение пространство $\mathbf{C^lL_2}, l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, случайных процессов из $\mathbf{CL_2}$, для которых траектории п.н. дифференцируемы по Нельсону-Гликлиху на $\mathcal{J}$ до порядка l включительно, определив норму в нем следующей формулой

$$\|\eta\|^2_{\mathbf{C^lL_2}} = \sup_{t\in\mathcal{J}} \left(\sum_{k=0}^{l} D\overset{\circ}{\eta}{}^l(t,\omega) \right). \tag{1.3.2}$$

По умолчанию, будем понимать под производной Нельсона – Гликлиха нулевого порядка $\overset{\circ}{\eta}{}^0$ исходный случайный процесс, и под пространством $\mathbf{CL_2}, l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ – пространство $\mathbf{K}$-«шумов».

Рассмотрим теперь вещественное сепарабельное гильбертово пространство $\mathfrak{U}$ с выбранным ортонормированным базисом $\{\varphi_k\}$. Введем монотонную последовательность $K = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}$ такую, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 < \infty$. Символом $\mathbf{U_KL_2}$ будем обозначать гильбертово пространство, которое является пополнением линейной оболочки $\mathbf{K}$-случайных величин

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \varphi_k, \quad \xi_k \in \mathbf{L_2}$$

по норме

$$\|\eta\|^2_{\mathbf{U}} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 D\xi_k.$$

Заметим, что для существования $\mathbf{K}$-случайной величины $\xi \in \mathbf{U_KL_2}$ достаточно рассмотреть последовательность случайных величин $\{\xi_k\} \subset \mathbf{L_2}$, имеющую равномерно ограниченную дисперсию $D\xi_k \leq Const, k \in \mathbb{N}$. Перейдем к построению пространства *дифференцируемых* $\mathbf{K}$-«шумов».

Рассмотрим интервал $(\epsilon,\tau) \subset \mathbb{R}$. Отображение $\eta : (\epsilon,\tau) \to \mathbf{U_KL_2}$, действующее по формуле

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k(t) \varphi_k,$$

где последовательность $\{\xi_k\} \subset \mathbf{CL_2}$, называется $\mathfrak{U}$-значным непрерывным стохастическим $\mathbf{K}$-процессом, если ряд равномерно сходится на любом компакте $\mathcal{J}$ по норме $\|\cdot\|_{\mathbf{U}}$ и траектории процесса $\eta = \eta(t)$ п.н. непрерывны.

Непрерывный стохастический $\mathbf{K}$-процесс

$$\overset{\circ}{\eta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overset{\circ}{\xi}_k(t) \varphi_k,$$

называется непрерывно-дифференцируемым по Нельсону – Гликлиху на $\mathcal{J}$, при условии равномерной сходимости ряда на любом компакте $\mathcal{J}$ по норме $\|\cdot\|_{\mathbf{U}}$ и траектории процесса $\overset{\circ}{\eta} = \overset{\circ}{\eta}(t)$ п.н. непрерывны.

Введем в рассмотрение пространство $\mathbf{C^l}(\mathcal{J}, \mathbf{U}_K L_2), l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ *дифференцируемых* $\mathbf{K}$-*«шумов»*, для которых траектории п.н. дифференцируемы по Нельсону – Гликлиху на $\mathcal{J}$ до порядка l включительно, определив норму в нем следующей формулой

$$\|\eta\|^2_{\mathbf{C^l}(\mathcal{J}, \mathbf{U_K L_2})} = \sup_{t \in J} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2 \sum_{j=1}^{l} D \overset{\circ}{\eta}{}^j \right).$$

В качестве примера непрерывно-дифференцируемого $\mathbf{K}$-процесса по Нельсону – Гликлиху до l порядка включительно приведем винеровский $\mathbf{K}$-процесс

$$W_{\mathbf{K}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \beta_k(t) \varphi_k,$$

где $\{\beta_k\} \subset \mathbf{C^l L_2}$ – последовательность броуновских движений.

Пространство $\mathbf{C^l}(\mathcal{J}, \mathbf{F_K L_2})$, *дифференцируемых* $\mathbf{K}$–*«шумов»* на $\mathbf{F_K L_2}$, определяется по аналогии. А именно, рассмотрим теперь вещественное сепарабельное гильбертово пространство $\mathfrak{F}$ с выбранным ортонормированным базисом

$\{\psi_k\}$. Введем монотонную последовательность $K = \{\mu\} \subset \mathbb{R}$ такую, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 < \infty$. Символом $\mathbf{F_K L_2}$ будем обозначать гильбертово пространство, которое является пополнением линейной оболочки $\mathbf{K}$-случайных величин

$$\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \zeta_k \psi_k \quad \zeta_k \in \mathbf{L_2}$$

по норме

$$\|\zeta\|_{\mathbf{U}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 D\zeta_k.$$

Заметим, что для существования $\mathbf{K}$-случайной величины $\zeta \in \mathbf{F_K L_2}$ достаточно рассмотреть последовательность случайных величин $\{\zeta_k\} \subset \mathbf{L_2}$, имеющую равномерно ограниченную дисперсию $D\zeta_k \le Const, k \in \mathbb{N}$. Перейдем к построению пространства *дифференцируемых* $\mathbf{K}$-«шумов».

Рассмотрим интервал $(\epsilon, \tau) \subset \mathbb{R}$. Отображение $\eta : (\epsilon, \tau) \to \mathbf{F_K L_2}$, действующее по формуле

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \zeta_k(t) \psi_k,$$

где последовательность $\{\zeta_k\} \subset \mathbf{CL_2}$, называется $\mathfrak{F}$-значным непрерывным стохастическим $\mathbf{K}$-процессом, если ряд равномерно сходится на любом компакте $\mathcal{J}$ по норме $\|\cdot\|_{\mathbf{U}}$ и траектории процесса $\eta = \eta(t)$ п.н. непрерывны.

Непрерывный стохастический $\mathbf{K}$-процесс

$$\overset{\circ}{\eta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \overset{\circ}{\zeta_k}(t) \psi_k,$$

называется непрерывно-дифференцируемым по Нельсону-Гликлиху на $\mathcal{J}$, при условии равномерной сходимости ряда на любом компакте $\mathcal{J}$ по норме $\|\cdot\|_{\mathbf{U}}$, и траектории процесса $\overset{\circ}{\eta}=\overset{\circ}{\eta}(t)$ п.н. непрерывны.

Таким образом, имеем пространство $\mathbf{C^l}(\mathcal{J}, \mathbf{F_K L_2}), l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ *дифференцируемых* $\mathbf{K}$-*«шумов»*, для которых траектории п.н. дифференцируемы по Нельсону – Гликлиху на $\mathcal{J}$ до порядка l включительно, определив норму в нем следующей формулой

$$\|\eta\|^2_{\mathbf{C^l}(\mathcal{J},\mathbf{F_K L_2})} = \sup_{t\in J}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k^2\sum_{j=1}^{l} D\overset{\circ}{\eta}{}^j\right).$$

Глава 2. Задача Коши и Шоуолтера – Сидорова для уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в детерминированном случае и в пространстве K-«шумов»

2.1. Спектр оператора Лапласа с краевым условием Вентцеля

Пусть дан дифференциальный оператор

$$Au(x) = u''(x), \quad x \in [a, b] \tag{2.1.1}$$

с общими граничными условиями Вентцеля

$$Au(a) + \alpha_0 u_x(a) + \alpha_1 u(a) = 0, \tag{2.1.2}$$

$$Au(b) + \beta_0 u_x(b) + \beta_1 u(b) = 0. \tag{2.1.3}$$

Формулами (2.1.1)-(2.1.3) определим линейный оператор $A : \mathrm{dom}\ A \subset \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$. В качестве области определения оператора зададим линейное многообразие $\mathrm{dom}\ A = \{u \in C^2[a, b]$: условия (2.1.2), (2.1.3) выполняются$\}$, области значения $\mathfrak{F}$ – пространство

$$\left(L^2[a, b], dx \Big|_{(a,b)} \oplus \eta ds \Big|_{\{a,b\}} \right)$$

с нормой

$$\|u\|^2_{\mathfrak{F}} = \int_a^b |u(x)|^2 dx + \eta_0 |u(a)|^2 + \eta_1 |u(b)|^2,$$

структура построения которого указана в работе [7], где dx – мера Лебега в области (a, b); ds – поточечная мера на границе; $\eta_0 = \frac{1}{-\alpha_1}, \eta_1 = \frac{1}{\beta_1}$, где $\alpha_1 < 0 <$

β_1 – положительные веса.

Лемма 2.1.1. *Пусть оператор A определен формулами* (2.1.1)-(2.1.3). *Тогда*

(i) $\mathrm{dom}\ A = \{u \in C^2[a,b]$: *условия* (2.1.2), (2.1.3) *выполняются*$\}$ *– банахово пространство относительно нормы* $\|u\|^2_{C^2[a,b]}$;

(ii) $\mathrm{dom}\ A$ *плотно вложено в* $\mathfrak{F}$;

(iii) $A \in \mathcal{L}(\mathrm{dom}\ A; \mathfrak{F})$.

Приведем краткий набросок доказательства. Утверждение *(i)* очевидно в силу того, что $\mathrm{dom}\ A$ образует подпространство, замкнутое в $C^2[a,b]$. Утверждение *(ii)* становится очевидным, если заметить, что оператор $\mathcal{G} : C^2[a,b] \to \mathfrak{F}$ компактен. Утверждение *(iii)* очевидно.

Перейдем к изучению спектральной задачи для оператора A с общими граничными условиями Вентцеля. Докажем следующую теорему.

Теорема 2.1.1. *Пусть оператор A удовлетворяет условиям леммы 2.1.1, тогда он имеет вещественный, дискретный, конечнократный спектр с единственной предельной точкой на бесконечности. При этом, для собственных значений λ_n при $n \to +\infty$ справедливо асимптотическое разложение*

$$\lambda_n = -\frac{\left(\pi n + \left(\frac{-\alpha_0+\beta_0}{\pi n}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^2}{(b-a)^2}.$$

Доказательство. Из [8] вытекает, что оператор A на $\mathfrak{F}$ – существенно самосопряженный. Это значит, что спектр оператора A – вещественный.

Определим спектр оператора A, для этого найдем его резольвенту. Имеем $(\lambda\mathbb{I} - A)u = f(x), x \in [a,b]$, при заданном $f \in C^2[a,b]$.

Рассмотрим случай $\lambda < 0$. Решая дифференциальное уравнение с общими граничными условиями Вентцеля классическими методами, получим резольвенту следующего вида

$$u(x) = (\lambda\mathbb{I} - A)^{-1} f = R_\lambda f = \overline{C_1}\cos(\sqrt{-\lambda}x) + \overline{C_2}\sin(\sqrt{-\lambda}x) +$$
$$+ \int_a^x \frac{f(s)}{\sqrt{-\lambda}} \sin(\sqrt{-\lambda}(x-s))ds.$$

Запишем коэффициенты $\overline{C_1} = \frac{A_0}{B}$ и $\overline{C_2} = \frac{A_1}{B}$ для резольвенты, где

$$B = \lambda^2 \Big\{ \sin(\sqrt{-\lambda}(b-a)) \Big\} + \Big\{ \beta_0 \cos(\sqrt{-\lambda}(b-a)) - \alpha_0 \cos(\sqrt{-\lambda}(b-a)) \Big\} \times$$
$$\times \lambda\sqrt{-\lambda} + \lambda \Big\{ \beta_1 \sin(\sqrt{-\lambda}(b-a)) + \alpha_1 \sin(\sqrt{-\lambda}(b-a)) \Big\} - \sin(\sqrt{-\lambda}(b-a)) \times$$
$$\times \lambda\alpha_0\beta_0 + \sqrt{-\lambda} \Big\{ -\alpha_0\beta_1 \cos(\sqrt{-\lambda}(b-a)) + \alpha_1\beta_0 \cos(\sqrt{-\lambda}(b-a)) \Big\} +$$
$$+ \alpha_1\beta_1 \sin(\sqrt{-\lambda}(b-a)),$$
$$A_0 = f(a) \Big\{ \lambda \sin(\sqrt{-\lambda}b) + \beta_0\sqrt{-\lambda}\cos(\sqrt{-\lambda}b) + \beta_1 \sin(\sqrt{-\lambda}b) \Big\} -$$
$$- \Big\{ \lambda \sin(\sqrt{-\lambda}a) + \sqrt{-\lambda}\alpha_0 \cos(\sqrt{-\lambda}a) + \alpha_1 \sin(\sqrt{-\lambda}a) \Big\} \Big\{ f(b) -$$
$$- \int_a^b \frac{f(s)\lambda}{\sqrt{-\lambda}} \sin(\sqrt{-\lambda}(b-s))ds - \beta_0 \int_a^b f(s)\cos(\sqrt{-\lambda}(b-s))ds -$$
$$- \beta_1 \int_a^b \frac{f(s)}{\sqrt{-\lambda}} \sin(\sqrt{-\lambda}(b-s))ds \Big\},$$
$$A_1 = \Big\{ \lambda \cos(\sqrt{-\lambda}a) - \alpha_0\sqrt{-\lambda}\sin(\sqrt{-\lambda}a) + \alpha_1 \cos(\sqrt{-\lambda}a) \Big\} \Big\{ f(b) -$$
$$- \int_a^b \frac{f(s)\lambda}{\sqrt{-\lambda}} \sin(\sqrt{-\lambda}(b-s))ds - \beta_0 \int_a^b f(s)\cos(\sqrt{-\lambda}(b-s))ds -$$
$$- \beta_1 \int_a^b \frac{f(s)}{\sqrt{-\lambda}} \sin(\sqrt{-\lambda}(b-s))ds \Big\} - f(a) \Big\{ \lambda \cos(\sqrt{-\lambda}b) -$$
$$- \beta_0\sqrt{-\lambda}\sin(\sqrt{-\lambda}b) + \beta_1 \cos(\sqrt{-\lambda}b) \Big\}.$$

В силу того, что резольвентный оператор R_λ является суммой двумерного оператора (линейная комбинация синуса и косинуса) и интегрального оператора типа Гильберта – Шмидта, где двумерный оператор является конечномерным, а значит, компактным (так как коэффициенты $\overline{C_1}$ и $\overline{C_2}$ непрерывно зависят от

f в метрике $\mathfrak{F}$, следовательно, оператор $R_\lambda = (\lambda\mathbb{I} - A)^{-1}$ – компактный в $\mathfrak{F}$ как сумма конечномерного и компактного операторов. По теореме Гильберта R_λ имеет дискретный, конечнократный спектр с предельной точкой в нуле.

Покажем, что исходный оператор A тогда имеет дискретный, конечнократный спектр с предельной точкой на бесконечности. Для этого зафиксируем произвольное собственное значение λ_0 оператора R_λ и выразим собственные значения оператора A через собственные значения резольвенты R_λ. Получим $R_\lambda f = \lambda_0 f$, где f – собственные вектор резольвенты. Подействовав на обе части равенства оператором $(\lambda\mathbb{I} - A)$ и поделив на $\lambda_0 (\lambda_0 \neq 0)$, получим выражение

$$Af = \left(\lambda - \frac{1}{\lambda_0}\right) f,$$

показывающее как связаны между собой собственные значения исходного и резольвентного операторов, отличающихся сдвигом на $\frac{1}{\lambda_0}$. Это доказывает данное утверждение, в силу поведения спектра оператора R_λ. Мы доказали, что при $\lambda < 0$ оператор A имеет дискретный, конечнократный спектр с предельной точкой на бесконечности.

Найдем асимптотическое приближение. Для $\lambda < 0$ транцендентное уравнение имеет вид

$$\frac{\operatorname{ctg}(\sqrt{-\lambda}b) - \frac{\beta_0\sqrt{-\lambda}}{\lambda} + \frac{\beta_1}{\lambda}\operatorname{ctg}(\sqrt{-\lambda}b)}{1 + \frac{\sqrt{-\lambda}\beta_0}{\lambda}\operatorname{ctg}(\sqrt{-\lambda}b) + \frac{\beta_1}{\lambda}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{-\lambda}\alpha_0}{\lambda}\operatorname{tg}(\sqrt{-\lambda}a) + \frac{\alpha_1}{\lambda}}{\operatorname{tg}(\sqrt{-\lambda}a) + \frac{\sqrt{-\lambda}\alpha_0}{\lambda} + \frac{\alpha_1}{\lambda}\operatorname{tg}(\sqrt{-\lambda}a)}.$$

Сделаем замену $x = \sqrt{-\lambda_n}, \lambda_n < 0$ и получим альтернативную формулу

$$\frac{-\frac{\alpha_0}{x} + \frac{\alpha_0\beta_1}{x^3} + \frac{\beta_0}{x} - \frac{\alpha_1\beta_0}{x^3}}{1 - \frac{\alpha_1}{x^2} - \frac{\beta_1}{x^2} + \frac{\alpha_1\beta_1}{x^4} + \frac{\alpha_0\beta_0}{x^2}} = \frac{1 - \operatorname{ctg}(xb)\operatorname{ctg}(xa)}{\operatorname{ctg}(xb) + \operatorname{tg}(xa)},$$

которая с помощью алгебраических вычислений преобразуется в следующее выражение

$$\operatorname{tg}(x(b-a)) = \frac{-\frac{\alpha_0}{x} + \frac{\alpha_0\beta_1}{x^3} + \frac{\beta_0}{x} - \frac{\alpha_1\beta_0}{x^3}}{1 - \frac{\alpha_1}{x^2} - \frac{\beta_1}{x^2} + \frac{\alpha_1\beta_1}{x^4} + \frac{\alpha_0\beta_0}{x^2}}.$$

Обозначим правую часть в полученном трансцендентном уравнении через $K(x)$

$$K(x) = \frac{1 - \frac{\alpha_1}{x^2} - \frac{\beta_1}{x^2} + \frac{\alpha_1\beta_1}{x^4} + \frac{\alpha_0\beta_0}{x^2}}{-\frac{\alpha_0}{x} + \frac{\alpha_0\beta_1}{x^3} + \frac{\beta_0}{x} - \frac{\alpha_1\beta_0}{x^3}},$$

и перепишем искомое уравнение

$$\mathrm{tg}(x(b-a)) = \frac{1}{xK(x)}.$$

Найдем x_n

$$x_n(b-a) = \pi n + \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{xK(x)}\right), n \in \mathbb{Z}.$$

Применяя метод асимптотических итераций, мы имеем

$$x_n \sim \frac{1}{(b-a)}\left\{\pi n + \left(\frac{-\alpha_0 + \beta_0}{\pi n}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right\}.$$

В силу введенной ранее подстановки

$$\lambda_n \sim -\frac{\left(\pi n + \left(\frac{-\alpha_0+\beta_0}{\pi n}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^2}{(b-a)^2}.$$

Рассмотрим случай $\lambda > 0$. Заметим, что в этом случае решение существует в зависимости от вида граничных условий Вентцеля. Если транцендентное уравнение имеет следующий вид

$$\frac{\lambda + \alpha_0\sqrt{\lambda} + \alpha_1}{\lambda - \alpha_0\sqrt{\lambda} + \alpha_1} = \frac{e^{2\sqrt{\lambda}(b-a)}(\lambda + \beta_0\sqrt{\lambda} + \beta_1)}{\lambda - \beta_0\sqrt{\lambda} + \beta_1},$$

$$\frac{(\lambda + \alpha_0\sqrt{\lambda} + \alpha_1)(\lambda - \beta_0\sqrt{\lambda} + \beta_1)}{(\lambda - \alpha_0\sqrt{\lambda} + \alpha_1)(\lambda + \beta_0\sqrt{\lambda} + \beta_1)} = e^{2\sqrt{\lambda}(b-a)},$$

и имеет решение, мы добавляем λ.

Рассмотрение случая $\lambda > 0$ по аналогии методом Штурма – Лиувилля указывает на конечное множество собственных значений, либо пустоту данного множества в зависимости от условий на коэффициенты в (2.1.2)-(2.1.3).

Рассмотрим случай $\lambda = 0$. Найдем достаточные условия на множество собственных значений оператора A. Заметим, что если коэффициенты в условиях (2.1.2)-(2.1.3) удовлетворяют равенству

$$\beta_1(\alpha_0 + \alpha_1 a - \alpha_1 b) = \alpha_1\beta_0,$$

то $\lambda = 0$ входит в множество собственных значений оператора A. Теорема доказана.

2.2. Детерминированный случай

Используя вышеизложенное построение оператора $A : \mathrm{dom}\ A \subset \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ с областью определения $\mathrm{dom}\ A$, включающей краевые условия Вентцеля

$$\begin{aligned} &Au(a) + \alpha_0 u_x(a) + \alpha_1 u(a) = 0;\\ &Au(b) + \beta_0 u_x(b) + \beta_1 u(b) = 0; \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

и областью значения $\mathfrak{F}$ – сужением пространства Лебега

$$\left(L^2[a,b], dx\Big|_{(a,b)} \oplus \eta ds\Big|_{\{a,b\}} \right)$$

перейдем к задаче Коши

$$u(0) = u_0 \tag{2.2.2}$$

и к задаче Шоуолтера – Сидорова

$$P(u(0) - u_0) = 0, \tag{2.2.3}$$

для уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной

$$(\lambda - A)u_t(x,t) = \alpha A u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+. \tag{2.2.4}$$

Для того, чтобы решить задачу (2.2.2)-(2.2.4), найдем L-спектр оператора M. Поскольку L-резольвента оператора M принимает вид

$$(\mu L-M)^{-1}=(\mu(\lambda-A)-\alpha A)^{-1}=\{\mu+\alpha\neq 0\}=(\mu+\alpha)^{-1}\left[\frac{\mu\lambda}{\mu+\alpha}-A\right]^{-1},$$

где $\mu+\alpha\neq 0$, тогда μ лежит в относительном спектре $\sigma^L(M)$, если

$$\mu=\frac{\alpha\sigma(A)}{\lambda-\sigma(A)}.$$

Таким образом, из теоремы 2.1.1, где $\mu+\alpha\neq 0$, имеем дискретный, конечнократный L-спектр оператора M с предельной точкой $-\alpha$ на бесконечности.

Рассмотрим случай $\mu+\alpha=0$. Для $\lambda=0$ имеем $\sigma^L(M)=\{-\alpha\}$. Для $\lambda\neq 0$ имеем $\sigma^L(M)=\{\varnothing\}$, если $\alpha\neq 0$, и $\sigma^L(M)=\{0\}$, если $\alpha=0$. Мы описали L-спектр оператора M, дающий следующее следствие теоремы 2.1.1

Следствие 2.2.4. L-спектр оператора M в уравнении Баренблатта – Желтова – Кочиной с краевыми условиями Вентцеля – дискретный, конечнократный с предельной точкой $-\alpha$ на бесконечности.

В силу следствия 2.2.4 оператор M (L,σ) - ограничен и имеет место теорема.

Теорема 2.2.1. *Пусть оператор A удовлетворяет условиям леммы 2.1.1, $f\in C^\infty((a,b);\mathfrak{F})$ – некоторая фиксированная вектор-функция. Тогда*

(i) если $\lambda\notin\sigma(A)$, то для любых $v_0\in\mathrm{dom}\ A$ и $f\in C^\infty((a,b);\mathfrak{F})$ существует единственное решение $u\in C^2(\mathbb{R};\mathrm{dom}\ A)$ задачи Коши (2.2.2)-(2.2.4), имеющее вид

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{\frac{\alpha\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}t}<v_0,\varphi_k>_{\mathfrak{F}}\varphi_k(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{\frac{\alpha\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}t}-1\right)\frac{<f,\varphi_k>_{\mathfrak{F}}}{\alpha\lambda_k}\varphi_k(x);$$

(i) если $\lambda\in\sigma(A)$, то для любых $f\in C^\infty((a,b);\mathfrak{F})$ и $v_0\in\mathfrak{B}_f=\Big\{u\in$

$\mathrm{dom}\, A : \alpha\lambda < u, \varphi_k >_{\mathfrak{F}} = - < f, \varphi_k >_{\mathfrak{F}}, \lambda_k = \lambda \Big\}$ *существует единственное решение* $u \in C^2(\mathbb{R}; \mathfrak{B}_f)$ *задачи Коши* (2.2.2)-(2.2.4), *имеющее вид*

$$u(x,t) = -\frac{1}{\alpha\lambda} \sum_{\lambda=\lambda_k} < f, \varphi_k >_{\mathfrak{F}} \varphi_k(x) + \sum_{\lambda\neq\lambda_k} e^{\frac{\alpha\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}t} < v_0(x), \varphi_k >_{\mathfrak{F}} \varphi_k(x) +$$
$$+ \sum_{\lambda\neq\lambda_k} \left(e^{\frac{\alpha\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}t} - 1 \right) \frac{< f, \varphi_k >_{\mathfrak{F}}}{\alpha\lambda_k} \varphi_k(x).$$

Доказательство. Доказательство теоремы зависит от ядра оператора L и состоит в разбиении искомой задачи на две подзадачи (исследовании дифференциальных уравнений в частных производных в случае обратимости и необратимости оператора L) и в применении либо классической теоремы для неоднородного дифференциального уравнения, либо теоремы Свиридюка. Из теоремы 2.1.1 оператор Лапласа имеет вещественнозначный, дискретный, конечнократный спектр, имеющий предельную точку $-\infty$, и $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ собственные значения оператора Лапласа, пронумерованные в неубывающем порядке с учетом кратности и соответствующие собственным функциям $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$. Таким образом, в соответствии с полнотой собственных функций, для $v \in \mathfrak{F}$ имеем

$$R_\mu(A)v = (\mu\mathbb{I} - \Delta)^{-1} v = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{< v, \varphi_k >_{\mathfrak{F}} \varphi_k}{\mu - \lambda_k}$$

и, следовательно,

$$R^L_\mu(M)v = (\mu L - M)^{-1} v = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{< v, \varphi_k >_{\mathfrak{F}} (\lambda - \lambda_k)}{\mu(\lambda - \lambda_k) - \alpha\lambda_k} \varphi_k$$

Почленное интегрирование допустимо, так как ряд имеет равномерную сходимость по норме пространства $\mathrm{dom}\, A$. Поэтому, подставляя L-резольвенту оператора M и применяя теорему вычетов, получаем соответствующие утверждения (i), (ii). Теорема доказана.

Перейдем к разрешимости задачи Шоуолтера – Сидорова, в силу следствия

1.1.3 имеет место следующая теорема.

Теорема 2.2.2. *Пусть оператор A удовлетворяет условиям леммы 2.1.1, $f \in C^\infty((a,b);\mathfrak{F})$ – некоторый фиксированная вектор-функция. Тогда*

(i) если $\lambda \notin \sigma(A)$, то для любых $v_0 \in \mathrm{dom}\ A$ и $f \in C^\infty((a,b);\mathfrak{F})$ существует единственное решение $u \in C^2(\mathbb{R};\mathrm{dom}\ A)$ задачи Шоуолтера – Сидорова (2.2.3)-(2.2.4), *имеющее вид*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{\alpha\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}t} < v_0, \varphi_k >_{\mathfrak{F}} \varphi_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{\frac{\alpha\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}t} - 1\right)\frac{< f, \varphi_k >_{\mathfrak{F}}}{\alpha\lambda_k}\varphi_k(x);$$

(i) если $\lambda \in \sigma(A)$, то для любых $f \in C^\infty((a,b);\mathfrak{F})$ и $v_0 \in \mathrm{dom}\ A$ существует единственное решение $u \in C^2(\mathbb{R};\mathrm{dom}\ A)$ задачи Шоуолтера – Сидорова (2.2.3)-(2.2.4), *имеющее вид*

$$u(x,t) = -\frac{1}{\alpha\lambda}\sum_{\lambda=\lambda_k} < f, \varphi_k >_{\mathfrak{F}} \varphi_k(x) + \sum_{\lambda\neq\lambda_k} e^{\frac{\alpha\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}t} < v_0(x), \varphi_k >_{\mathfrak{F}} \varphi_k(x) +$$
$$+ \sum_{\lambda\neq\lambda_k}\left(e^{\frac{\alpha\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}t} - 1\right)\frac{< f, \varphi_k >_{\mathfrak{F}}}{\alpha\lambda_k}\varphi_k(x).$$

2.3. Стохастический случай

Рассмотрим стохастическое уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной на отрезке $[a,b]$

$$(\lambda - A)\overset{\circ}{\eta}(\omega,t) = \alpha A\eta(\omega,t) + Nf, (\omega,t) \in [a,b]\times(0,\tau),$$

с граничными условиями Вентцеля

$$\eta_{xx}(a,t) + \alpha_0\eta_x(a,t) + \alpha_1\eta(a,t) = 0,$$
$$\eta_{xx}(b,t) + \beta_0\eta_x(b,t) + \beta_1\eta(b,t) = 0.$$

Здесь $\eta = \eta(t)$ – искомый случайный процесс на интервале $(0,\tau)$; $\overset{\circ}{\eta}$ – производная Нельсона – Гликлиха; f – «белый шум», понимаемый нами как производная Нельсона – Гликлиха одномерного винеровского процесса; α и λ – вещественные параметры, характеризующие среду; параметр $\alpha \in \mathbb{R}_+$; оператор $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ подлежит в дальнейшем уточнению.

Перейдем к задаче Коши

$$\eta(0) = \xi_0 \qquad (2.3.1)$$

и к задаче Шоуолтера – Сидорова

$$P(\eta(0) - \xi_0) = 0 \qquad (2.3.2)$$

для абстрактного стохастического уравнения

$$L \overset{\circ}{\eta} (\omega, t) = M\eta(\omega, t) + Nf, \qquad (2.3.3)$$

где $L, M, N \in \mathcal{L}(\mathbf{U_K L_2}; \mathbf{F_K L_2}), \eta \in \mathbf{C^{l+1}}(\mathcal{J}; \mathbf{F_K L_2})$ – искомый случайный $\mathbf{K}$-процесс, $f \in \mathbf{C^{l+1}}(\mathcal{J}; \mathbf{F_K L_2})$ – «белый шум». Будем называть случайный $\mathbf{K}$-процесс $\eta \in \mathbf{C^{l+1}}(\mathcal{J}; \mathbf{F_K L_2})$ *решением уравнения* (2.3.3), если п.н. все его траектории удовлетворяют уравнению (2.3.3) при всех $t \in \mathcal{J}$. Решение $\eta = \eta(t)$ уравнения (2.3.3) назовем *решением задачи Коши* (2.3.1), (2.3.3), если оно удовлетворяет условию (2.3.1). Решение $\eta = \eta(t)$ уравнения (2.3.3) назовем *решением задачи Шоуолтера – Сидорова* (2.3.2), (2.3.3), если оно удовлетворяет условию (2.3.2).

Ниже покажем с помощью лемм 2.3.1, 2.3.2 переход теории относительно p-ограниченных операторов в пространство случайных $\mathbf{K}$-величин. Рассмотрим вещественное сепарабельное гильбертово пространство $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{F}$) с выбранным ортонормированным базисом $\{\varphi_k\}(\{\psi_k\})$.

Лемма 2.3.1. *Пусть последовательности $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$ связаны неравенством $\mu_k^2 D\zeta_k \le \lambda_k^2 D\xi_k$. Оператор $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ точно тогда, когда $A \in \mathcal{L}(\mathbf{U_K L_2}; \mathbf{F_K L_2})$*

.

Приведем краткий набросок доказательства. Утверждение становится очевидным, если заметить, что неравенство выполнено в силу признака сравнения двух знакоположительных рядов

$$\|A\xi\|_{\mathbf{F}}^2 \leq M\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^2 D\zeta_k\|\psi_k\|_{\mathfrak{U}}^2 \leq M\|\xi\|_{\mathfrak{U}}^2.$$

Таким образом, из теории относительно σ-ограниченных операторов (см., напр., [39]) справедлива следующая лемма и теорема.

Лемма 2.3.2. *Пусть последовательности $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$ связаны неравенством $\mu_k^2 D\zeta_k \leq \lambda_k^2 D\xi_k$. Оператор $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ σ-ограничен относительно оператора $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ точно тогда, когда $M \in \mathcal{L}(\mathbf{U_K L_2};\mathbf{F_K L_2})$ σ-ограничен относительно оператора $L \in \mathcal{L}(\mathbf{U_K L_2};\mathbf{F_K L_2})$. Причем L-спектры оператора M в обоих случаях совпадают.*

Теорема 2.3.1. *Пусть оператор $L, M \in \mathcal{L}(\mathbf{U_K L_2};\mathbf{F_K L_2})$, причем оператор $M(L,\sigma)$ - ограничен. Тогда при любом случайном $\mathbf{K}$-процессе $f \in \mathbf{C^{l+1}}(\mathcal{J};\mathbf{F_K L_2})$ таком, что $Nf \in \mathbf{C^{l+1}}(\mathcal{J};\mathbf{F_K L_2})$ и любой $\mathfrak{U}$-значной случайной величине $\xi_0 \in \mathbf{L_2}$, независимой с Nf при фиксированном $t \in [0,\tau]$, существует единственное решение $\eta = \eta(t)$ задачи* (2.3.1), (2.3.3), *которое принимает следующий вид*

$$\eta(t) = -M_0^{-1}Nf^0 + U^t\xi_0 + \int_0^t U^{t-s}L_1^{-1}Nf^1 ds, \text{ где } f^0 = (\mathbb{I}-Q)f, f^1 = Qf. \quad (2.3.4)$$

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично детерминированному случаю. Идея и методы теории относительно σ-ограниченных операторов можно найти, например в [39]. Заметим лишь, что под оператором Q необходимо подразумевать проектор

$$Q = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} L_{\mu}^{L}(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}),$$

где $\gamma \subset \mathbb{C}$ – контур, ограничивающий область, содержащую L-спектр оператора M, $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ –левая L-резольвента оператора M; f^0, f^1 следует понимать как элементы из $\ker Q = \mathbf{F_K^0 L_2}$, $ImQ = \mathbf{F_K^1 L_2}$ соответственно. Теорема доказана.

Перейдем к построению решения задачи в пространстве $\mathbf{K}$-«шумов» .Обозначим через $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ последовательность собственных значений оператора Лапласа с граничными условиями Вентцеля, занумерованные по невозрастанию с учетом кратности, и через $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ соответствующую им последовательность ортонормированных собственных функций $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$. Введем $\mathfrak{U}$-значные случайные $\mathbf{K}$-процессы. Возьмем в качестве последовательности K собственные значения оператора Грина $\{\lambda_k : \lambda_k = \nu_k^{-1}\}$ и определим $\mathfrak{U}$-значный случайный $\mathbf{K}$-винеровский процесс в виде

$$W_{\mathbf{K}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \beta_k(t) \varphi_k. \tag{2.3.5}$$

Зададим функцию неоднородности как производную одномерного винеровского процесса

$$f = \overset{\circ}{W}_K(t) \in \mathbf{C^{l+1}}(\mathcal{J}; \mathbf{F_K L_2}),$$

и заметим, что операторы $(\lambda - A), \alpha A$ определены в силу леммы как элементы пространства $\mathcal{L}(\mathbf{U_K L_2}; \mathbf{F_K L_2})$. Поскольку последнее слагаемое в (2.3.4) имеет интегральную особенность в нуле, преобразуем ее следующим образом

$$\int_\epsilon^t U^{t-s} L_1^{-1} QN \overset{\circ}{W}_K(s) ds = L_1^{-1} QN W_K(t) - U^{t-\epsilon} L_1^{-1} QN W_K(\epsilon) +$$
$$+ \int_\epsilon^t U^{t-s} S L_1^{-1} QN W_K(s) ds,$$

где

$$S = L_1^{-1} M_1.$$

Интегрирование по частям имеет смысл при любых $\epsilon \in (0, t), t \in \mathbb{R}_+$, в силу определения производной Нельсона – Гликлиха. Устремим $\epsilon \to 0$ и получим

$$\int_0^t U^{t-s}L_1^{-1}QN \overset{\circ}{W}_K(s)ds = L_1^{-1}QNW_K(t) + \int_0^t U^{t-s}SL_1^{-1}QNW_K(s)ds.$$

Так как при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ оператор M (L,σ) - ограничен, справедлива теорема.

Теорема 2.3.2. *При всех* $\lambda \in \mathbb{R}$ *и* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $N \in \mathcal{L}(\mathbf{U_K L_2}; \mathbf{F_K L_2})$ *и* $\xi_0 \in \mathbf{L_2}$, *не зависящей от* $W_K(t)$ *существует единственное решение* $\eta = \eta(t)$ *задачи Шоуолтера – Сидорова* (2.3.2), (2.3.3), *которое принимает следующий вид*

$$\eta(t) = -M_0^{-1}(\mathbb{I}-Q)N \overset{\circ}{W}_K(t) + U^t\xi_0 + L_1^{-1}QNW_K(t) + \int_0^t U^{t-s}SL_1^{-1}QNW_K(s)ds. \tag{2.3.6}$$

Если вдобавок ξ_0 *лежит в фазовом пространстве*

$$\mathfrak{B}_f = \left\{u \in \mathrm{dom}\ A : \alpha\lambda < u, \varphi_k >_{\mathfrak{F}} = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{< \beta_j(t), \varphi_k >_{\mathfrak{F}} \varphi_j}{\lambda_j}, \lambda_k = \lambda\right\},$$

то решение $\eta = \eta(t)$ *будет также единственным решением задачи Коши* (2.3.1), (2.3.3).

Построим проектор $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$

$$Q = \sum_{\lambda \neq \lambda_k} < \cdot, \varphi_k >_{\mathfrak{F}} \varphi_k.$$

Тогда,

$$M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)N \overset{\circ}{W}_K(t) = \begin{cases} 0, \text{если } \lambda \notin \sigma(A); \\ \frac{1}{\alpha\lambda} \sum\limits_{\lambda \neq \lambda_k} \frac{1}{2t} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{<\beta_j(t), \varphi_k>_{\mathfrak{F}} N\varphi_k}{(\lambda-\lambda_k)\lambda_j}, \text{если } \lambda \in \sigma(A). \end{cases}$$

$$U^t\xi_0 = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{\frac{\alpha\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}t} < \xi_0, \varphi_k >_{\mathfrak{F}} \varphi_k(x), \text{если } \lambda \notin \sigma(A); \\ \sum\limits_{k=1, \lambda\neq\lambda_k}^{\infty} e^{\frac{\alpha\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}t} < \xi_0, \varphi_k >_{\mathfrak{F}} \varphi_k(x), \text{если } \lambda \in \sigma(A). \end{cases}$$

$$L_1^{-1}QNW_K(t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{<\beta_j(t), \varphi_k>_{\mathfrak{F}} N\varphi_k}{(\lambda-\lambda_k)\lambda_j}, \text{если } \lambda \notin \sigma(A); \\ \sum\limits_{k=1, \lambda\neq\lambda_k}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{<\beta_j(t), \varphi_k>_{\mathfrak{F}} N\varphi_k}{(\lambda-\lambda_k)\lambda_j}, \text{если } \lambda \in \sigma(A). \end{cases}$$

$$\int_0^t U^{t-s} S L_1^{-1} QNW_K(s) ds =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \int_0^t \frac{e^{\frac{\alpha\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}(t-s)} \alpha\lambda_k <\beta_j(s), \varphi_k>_{\mathfrak{F}}}{(\lambda-\lambda_k)^2\lambda_j} ds N\varphi_k, \text{если } \lambda \notin \sigma(A); \\ \sum\limits_{k=1, \lambda\neq\lambda_k}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \int_0^t \frac{e^{\frac{\alpha\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}(t-s)} \alpha\lambda_k <\beta_j(s), \varphi_k>_{\mathfrak{F}}}{(\lambda-\lambda_k)^2\lambda_j} ds N\varphi_k, , \text{если } \lambda \in \sigma(A). \end{cases}$$

В заключении отметим, поскольку ξ_0 независимы от $W_K(t)$, тогда $cov(\xi_0, \beta_k(t)) = 0$, где $\beta_k(t)$–сечения винеровского процесса, которые могут иметь следующий вид

$$\beta_k(t) \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \sin \frac{\pi}{2}(2j+1)t, \quad k = 1, 2, \cdots$$

для ξ_j – некоррелируемых гауссовых случайных величин, таких что $E\xi_j = 0$, $D\xi_j = \left[\frac{\pi}{2}(2j+1)\right]^{-2}$.

Заключение

Используя метод фазового пространства и новый подход в применении «белого» шума, описанный в [17] и [32], в выпускной квалификационной работе были построены аналитические разрешающие группы для уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной в случае (L, p)-ограниченного оператора M в детерминированном и недетерминированном случае . В частности, была доказана теорема о разрешимости задачи Коши – Вентцеля для уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной, заданного в сужение пространства Лебега, получено аналитическое решение с помощью численного метода Галеркина, и опубликованы результаты в статьях [48] - [49]; доказана теорема о разрешимости задачи Коши – Вентцеля для уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной в пространстве «шумов», и опубликованы результаты в статье [50].

В дальнейших работах планируется более общая постановка задачи для уравнений соболевского типа первого и второго порядка в ограниченной области с граничными условиями Венцеля. А именно, пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\delta\Omega$ класса C^∞. Рассмотрим на Ω дифференциальное уравнение Баренблатта–Желтова–Кочиной

$$(\lambda - \Delta)u_t(x,t) = \alpha\Delta u_(x,t) + f(x,t), \ (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \tag{2.3.7}$$

которое представляет динамику давления вязко-упругой жидкости в трещинновато-пористой среде [3] (где вещественные параметры α и λ характеризуют среду; функция $f(x,t)$ играет роль внешней нагрузки) и уравнение Буссинеска [46]

$$\lambda u_{tt} – \Delta u_{tt} – \alpha^2 \Delta u = f(x,t), \tag{2.3.8}$$

которое описывает распространение волн в мелкой воде, где длина волны намного больше, чем амплитуда. Здесь параметры λ и α^2 зависят от глубины, числа связей, гравитационной постоянной и граничных условий.

В рамках так поставленной задачи основной целью в последующих исследованиях будет изучение разрешимости задачи Коши

$$u(0) = u_0, (\text{или } v(0) = u_0, \dot{v}(0) = v_1) \tag{2.3.9}$$

и задачи Шоуолтера – Сидорова

$$P(u(0) - u_0) = 0, (\text{или } P(u(0) - v_0 = 0), P(\dot{u}(0) - v_1) = 0) \tag{2.3.10}$$

для уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной (2.3.7) (уравнения Буссинеска (2.3.8)), записанного в операторном виде, в специальным образом подобранных банаховых пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$

$$L\dot{u} = Mu(t) + f(t), (\text{или } L\ \ddot{u} = Mu + f(t)) \tag{2.3.11}$$

с краевыми условиями Вентцеля, обобщающими классические граничные условия Дирихле, Неймана и Робена,

$$Mu + \alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = 0, (x,t) \in \delta\Omega \times \mathbb{R}, \tag{2.3.12}$$

в детерминированном случае и в пространстве дифференцируемых $\mathbf{K}$–«шумов».

Библиографический список

[1] Апушинская, Д.Е. Гельдеровские оценки решений вырожденных граничных задач Вентцеля для параболических и эллиптических уравнений недивергентного вида / Д.Е. Апушинская, А.И. Назаров // Проблемы математического анализа. – 1977. – N 17. – С. 3–19.

[2] Апушинская, Д.Е. Начально-краевая задача с граничным условием Вентцеля для недивергентных параболических уравнений / Д.Е. Апушинская, А.И. Назаров // Алгебра и анализ – 1994. – N 6. – С. 1–29.

[3] Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, N 5. – С. 58–73.

[4] Бычков, Е.В. Математическая модель акустических волн в ограниченной области с «белым» шумом / Е.В. Бычков, Н.Н. Соловьева, Г.А. Свиридюк // Вестник ЮУрГУ. Сер.: Математика. Механика. Физика. – 2019. – Т. 29, N 3. – С. 12–19.

[5] Вентцель, А.Д. Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дифференциальному оператору второго порядка / А.Д. Вентцель // ДАН СССР. – 1956. – Т. 111. – С. 269–272.

[6] Гальперн, С.А. Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными / С.А. Гальперн // Труды ММО. – 1960. – Т. 9. – С. 401–423.

[7] Гликлих, Ю.Е. Изучение уравнений леонтьевского типа с белым шумом методами производных в среднем случайных процессов / Ю.Е. Гликлих // Вестник ЮУрГУ. Сер.: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – Т. 13, N 27. – С. 24–34.

[8] Демиденко, Г.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. – Новосибирск: Науч. Кн., 1998.

[9] Загребина, С.А. Линейные уравнения соболевского типа с относительно p-ограниченными операторами и аддитивным белым шумом / С.А. Загребина, Е.А. Солдатова // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2013. – Т. 6, N 1. – С. 20–34.

[10] Костюченко, А.Г. Задача Коши для уравнений типа Соболева–Гальперна / А.Г. Костюченко, Г.И. Эскин // Труды Моск. мат. о-ва. – 1961. – Т. 10. – С. 273–285.

[11] Крейн, С.Г. Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн, К.И. Чернышов. –Новосибирск: Препр. ин-та математ. СО АН СССР, 1979. – 18 С.

[12] Крейн, С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. – М.: Наука, 1967. – 464 С.

[13] Сагадеева, М.А. Построение наблюдения для задачи оптимального динамического измерения по искаженным данным / М.А. Сагадеева // Вестник ЮУрГУ. Сер.: Математическое моделирование и программирование. – 2019. – Т. 12, N 2. – С. 82–96.

[14] Соболев, С.Л. Об одной новой задаче математической физики / С.Л. Соболев // Изв. АН СССР. Сер.: Математика – 1954. – Т. 18. – С. 3–50.

[15] Назаров, А.И. Решение задачи Вентцеля для уравнений Лапласа и Гемгольца с помощью повторных потенциалов / А.И. Назаров, В.В. Лукъяконов // Математические вопросы теории распространения волн (ЗНС ПОМИ. Т.250). СПб.: Наука. 1998, С. 203–218.

[16] Назаров, А.И. Гельдеровские оценки решений вырожденных граничных задач Вентцеля для параболических и эллиптических уравнений недивергентного вида / А.И. Назаров, Д.Е. Апушинская // Проблемы математической физики и теории функций (Проблемы математического анализа. Вып. 17). СПб.: Изд.СПбГУ. 1997, С. 3–19.

[17] Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи математических наук. – 1994. – Т. 49, N 4. – С. 47–74.

[18] Свиридюк, Г.А. Динамические модели соболевского типа с условием Шоуолтера-Сидорова и аддитивными «шумами» / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Сер.: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, N 1. – С. 90–103.

[19] Трибель, Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель. – М.: Мир, 1980. – 664 С.

[20] Шестаков, А.Л. Динамические измерения в пространствах «шумов» / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк, Ю.В. Худяков // Вестник ЮУрГУ. Сер.: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2013. – Т. 13, N 2 . – С. 4–11.

[21] Chen, P.J. On a theory of heat conduction involving two temperatures / P.J. Chen, M.E. Gurtin // Z. Angew. Math. Phys. – 1968. – V. 19. – P. 614–627.

[22] Hallaire, M On a theory of moisture-transfer / M Hallaire // Inst.Rech. Agronom. – 1964. – N 3. – P. 60–72.

[23] Ciprian, G Gal Sturm-Liouville operator with general boundary conditions / Ciprian G. Gal // Electronic Journal of Differential Equations. – 2005. – V. 2005, N. 120. – P. 1–17.

[24] Feller, W. Generalized second order differential operators and their lateral conditions / W. Feller // Illinois Journal of Mathematics. – 1957. – V. 1, N. 4. – P. 459–504.

[25] Feller, W. Diffusion processes in one dimension / W. Feller // Matematika. – 1958. – V. 2, N. 2. – P. 119–146.

[26] Favini, A. C_0-semigroups generated by second order differential operators with general Wentzell boundary conditions / A. Favini, G.R. Goldstein, S. Romanelli // Proceedings of the American Mathematical Society. – 2000. – V. 128, N. 7. – P. 1981–1989.

[27] Favini, A. The heat equation with generalized Wentzell boundary condition / A. Favini, G.R. Goldstein, J.A. Goldstein, S. Romanell // Journal of Evolution Equations. – 2002. – V. 2. – P. 1–19.

[28] Favini, A. Classification of general Wentzell boundary conditions for fourth order operators in one space dimension / A. Favini, G.R. Goldstein, J.A. Goldstein, S. Romanelli // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2007. – V. 333. N. 1. – P. 219–235.

[29] Favini, A. The laplacian with generalized Wentzell boundary conditions / A. Favini, G.R. Goldstein, J.A. Goldstein, Enrico Obrecht, S. Romanelli // JProgress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. – 2003. – V. 55. – P. 169–180.

[30] Favini, A. Degenerate differential equations in Banach spaces / A. Favini, A.Yagi. – New York, Basel, Hong Kong: Marcel Dekker, Inc.,1999. – 236 pp.

[31] Favini, A. Linear sobolev type equations with relatively p-sectorial operators in space of «noises» / A. Favini, G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova //Abstract and Applied Analysis. – 2015. – V. 2015. – P. 8.

[32] Gliklikh, Yu.E. Global and stochastic analysis with applications to mathematical physics / Yu.E. Gliklikh – London, Dordrecht, Heidelberg, N.-Y.: Springer, 2011.

[33] Giuseppe, M. Coclite. The role of Wentzell boundary conditions in linear and nonlinear analysis / M.Coclite Giuseppe, A. Favini, Ciprian G. Gal, G.R. Goldstein // Tubinger Berichte. – 2008. – V. 132. – P. 279–292.

[34] Gal, Ciprian G. Sturm-Liouville Operator with General Boundary Conditions / Ciprian G. Gal // Electronic Journal of Differential Equations. – 2005. – V. 2005, N. 120. – P. 1–17.

[35] Gurtin, M.E. An axiomatic foundation for continuum thermodynamics / M.E. Gurtin, W.O. Williams // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1967. – V. 26. – P. 83–117.

[36] Kitaeva, O.G. Exponential dichotomies in Barenblatt–Zheltov–Kochina model in spaces of differential forms with 'Noise' / O.G. Kitaeva, D.E Shafranov, G.A. Sviridyuk // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling, Programming and Computer Software. – 2019. – V. 12, N. 2. – P. 47–57.

[37] Sviridyuk, G.A. The Barenblatt–Zheltov–Kochina model with additive white noise in quasi-Sobolev spaces / G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2016. – V. 3, N. 1. – P. 61–67.

[38] Sviridyuk, G.A. Multipoint initial-final problem for one class of Sobolev type models of higher order with additive «white noise» / G.A. Sviridyuk, A.A. Zamyshlyaeva, S.A. Zagrebina // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling, Programming and Computer Software. – 2018. – V. 11, N. 3. – P. 103–117.

[39] Sviridyuk, G.A. Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators/ G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokio: VSP, 2003.

[40] Shestakov, A.L. Optimal Measurement of Dynamically Distorted Signals / A.L. Shestakov // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling, Programming and Computer Software. – 2011. – V. 8, N. 17. – P. 70–75.

[41] Showalter, R.E. The Sobolev equations i. (ii) / R.E. Showalter // Appl. Anal. – 1975. – V. 5, N. 1. – P. 15–22.

[42] Showalter, R.E. Partial differential equations of Sobolev-Galpern type / R.E. Showalter // Pacific J. Math. – 1963. – V. 31, N. 3. – P. 787–794.

[43] Showalter, R.E. Hilbert space methods for partial differential equations / R.E. Showalter. – London; San Francisco; Melbourne: Pitman, 1977.

[44] Showalter, R.E. Nonlinear degenerate evolution equations and partial differential equations of mixed type / R.E. Showalter // SIAM J. Math. Anal. – 1975. – V. 6, N. 1. – P. 25–42.

[45] Wentzell, A.D. On Boundary Conditions for Multidimensional Diffusion Processes / A.D. Wentzell // Theory of Probably and its Applications. – 1959. – V. 4. – P. 164–177.

[46] Wang, S. Small amplitude solutions of the generalized IMBq equation / S. Wang, G. Chen // Mathematical Analysis and Application. – 2002. – V. 274. – P. 846–866.

[47] Гончаров, Н.С. О физической интерпретации модели Баренблатта–Желтова–Кочиной в области с краевым условием Вентцеля / Н.С. Гончаров // Наука ЮУрГУ: материалы 71-й науч. конф. Челябинск: Юж. Урал. гос. ун-т. 2009. – С. 29–32.

[48] Goncharov, N.S. The Barenblatt–Zheltov–Kochina model on the segment with Wentzell boundary conditions / N.S. Goncharov // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling, Programming and Computer Software. – 2019. – V. 12, N. 2. – P. 136–142.

[49] Goncharov, N.S. Numerical research of the Barenblatt–Zheltov–Kochina model on the interval with Wentzell boundary conditions / N.S. Goncharov // Journal of Computational and Engineeting Mathematics. – 2019. – V. 6, N. 3. – P. 14–25.

[50] Goncharov, N.S. Stochastic Barenblatt–Zheltov–Kochina model on the interval with Wentzell boundary conditions / N.S. Goncharov // Global and Stochastic Analysis. – 2020. – V. 7, N. 1. – P. 11–23.