МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»
Институт естественных и точных наук
Кафедра уравнений математической физики

РАБОТА ПРОВЕРЕНА
Рецензент, профессор кафедры
«Математическое и компьютерное
моделирование»
__________________/С.А.Загребина
«____»_____________2020 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой,
д-р физ.-мат.наук, профессор
_______________/ Г.А.Свиридюк
«____»_____________2020 г.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
ЮУрГУ–01.04.01.2020.

Руководитель работы, заведующий
кафедрой УМФ, д-р физ.-мат. наук,
профессор
___________/ Г.А Свиридюк
«____»_____________2020 г.

Автор работы,
студент группы ЕТ-221
_____________/ Т.Г. Сукачева
«____»_____________2020 г.

Нормоконтролер, доцент кафедры
УМФ, канд. физ.-мат. наук
_____________/ Д.Е. Шафранов
«____»_____________2020 г.

Челябинск 2020

УДК 517.9

Сукачева Т.Г. Нестационарные уравнения несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта в магнитном поле Земли/ – Челябинск: ЮУрГУ(НИУ), 2020. - 51 с.

Библиогр. список – 97 наим., 0 ил.,0 табл.

Исследуется первая начально-краевая задача для системы уравнений, описывающей движение несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта ненулевого порядка в магнитном поле Земли с учетом внешнего воздействия на жидкость. Задача изучается в предположении, что жидкость находится под влиянием различных внешних воздействий, зависящих не только от координаты точки в пространстве, но и от времени.

Указанная задача исследуется в рамках теории разрешимости абстрактной задачи Коши для полулинейного неавтономного уравнения соболевского типа. Это позволило применить метод вырожденных полугрупп операторов, широко используемый в теории уравнений соболевского типа. На основе теории полулинейных неавтономных уравнений соболевского типа доказана теорема о существовании и единственности решения, которое является квазистационарной полутраекторией, а также дано описание расширенного фазового пространства. Полученные результаты могут быть применены при рассмотрении обратных задач, задач оптимального управления, начально-конечных и многоточечных задач, а также при рассмотрении соответствующих стохастических моделей. Кроме того, они могут быть полезны в геофизике и магнитогидродинамике.

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

1. Множества будем обозначать заглавными буквами готического алфавита, например $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$. Исключение — множества с уже устоявшимися названиями, например:

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел,

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел,

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел,

$W_p^l(\Omega)$ — пространства Соболева и т. д.

Элементы множеств чаще всего обозначаются строчными буквами латинского алфавита, в особых случаях — строчными буквами греческого алфавита.

2. Множества операторов будем обозначать рукописными заглавными буквами латинского алфавита, например:

$\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ — множество линейных непрерывных операторов, действующих из банахова пространства $\mathcal{U}$ в банахово пространство $\mathcal{F}$;

$\mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$ — множество линейных замкнутых операторов, плотно определенных в пространстве $\mathcal{U}$ и действующих в пространство $\mathcal{F}$;

$\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U};\mathcal{F})$ — множество операторов, имеющих непрерывные производные Фреше любого порядка, определенных на $\mathcal{U}$ и действующих в $\mathcal{F}$.

Элементы множеств операторов обозначаются заглавными буквами латинского алфавита. Буквами I и O (или цифрой 0) обозначаются соответственно "единичный"и "нулевой"операторы, области определения которых ясны из контекста.

Для линейного оператора L будем обозначать:

$\operatorname{dom} L$ — область определения L,

$\operatorname{im} L$ — множество значений (образ) L,

$\ker L$ — ядро (нуль-пространство) L,

$\operatorname{coim} L$ — некоторое дополнение к ядру L,

$\rho(L)$, $\sigma(L)$ — резольвентное множество, спектр оператора L соответственно.

3. Все рассуждения проводятся в вещественных банаховых пространствах, однако их естественная комплексификация вводится при рассмотрении "спектральных"вопросов.

ВВЕДЕНИЕ

Постановка задачи и цель работы. Система уравнений

$$
\begin{aligned}
&(1-\varkappa\nabla^2)v_t=\nu\nabla^2 v-(v\cdot\nabla)v+\sum_{l=1}^{K}\beta_l\nabla^2 w_l-\frac{1}{\rho}\nabla p-\\
&-2\Omega\times v+\tfrac{1}{\rho\mu}(\nabla\times b)\times b+f^1,\\
&\nabla\cdot v=0,\quad \nabla\cdot b=0,\quad b_t=\delta\nabla^2 b+\nabla\times(v\times b)+f^2.\\
&\frac{\partial w_l}{\partial t}=v+\alpha_l w_l,\quad \alpha_l\in\mathbb{R}_-,\quad \beta_l\in\mathbb{R}_+,\quad l=\overline{1,\ K},
\end{aligned}
\tag{0.0.1}
$$

описывает в магнитном поле Земли поток несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта ненулевого порядка K [39]. Здесь вектор-функции $v=(v_1(x,t),v_2(x,t),\ldots,v_n(x,t))$ и $b=(b_1(x,t),b_2(x,t),\ldots,b_n(x,t))$ характеризуют скорость жидкости и магнитную индукцию соответственно, $p=p(x,t)$ – давление, $\varkappa$ – коэффициент упругости, ν – коэффициент вязкости, Ω – угловая скорость, δ – магнитная вязкость, μ – магнитная проницаемость, ρ – плотность. Параметры $\beta_l,\quad l=\overline{1,\ K}$ – определяют время ретардации (запаздывания) давления. Свободные члены $f^1=(f^1_1,\ldots,f^1_n),\ f^1_i=f^1_i(x,t), f^2=f^2(x,t)$ характеризуют внешнее воздействие на жидкость.

Рассмотрим первую начально-краевую задачу для системы (0.0.1)

$$
\begin{gathered}
v(x,0)=v_0(x),\quad b(x,0)=b_0(x),\\
w_l(x,0)=w_{l0}(x)\quad x\in D,\\
v(x,t)=0,\quad b(x,t)=0,\\
w_l(x,t)=0\quad (x,t)\in\partial D\times\mathbb{R}_+,\quad l=\overline{1,\ K}
\end{gathered}
\tag{0.0.2}
$$

в предположении, что $\mu=1$ и $\rho=1$. Здесь $D\subset\mathbb{R}^n$, $n=2,3,4,$ – ограниченная область с границей ∂D класса C^∞.

Задачи, подобные задаче (0.0.1), (0.0.2), возникают, например, в магнитогидродинамике и геофизических науках [82]. Ранее в случае $f^1\equiv 0,\ f^2\equiv 0$ такие модели изучались в [22]. Заметим, что указанная система обобщает систему, приведенную в [74] при $\varkappa=0$, на неавтономный случай. А также является обобщением соответствующей системы [22] в нестационарном случае

$$\begin{gathered}(1-\varkappa\nabla^2)v_t=\nu\nabla^2 v-(v\cdot\nabla)v-\tfrac{1}{\rho}\nabla p-2\Omega\times v+\tfrac{1}{\rho\mu}(\nabla\times b)\times b,\\ \nabla\cdot v=0,\quad \nabla\cdot b=0,\quad b_t=\delta\nabla^2 b+\nabla\times(v\times b).\end{gathered}\tag{0.0.3}$$

В [95] изучалась первая начально-краевая задача

$$\begin{gathered}v(x,0)=v_0(x),\quad b(x,0)=b_0(x),\quad x\in D,\\ v(x,t)=0,\quad b(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial D\times\mathbb{R}_+\end{gathered}\tag{0.0.4}$$

для системы (0.0.3) в неавтономном случае.

В указанные задачи математической физики входят неклассические уравнения в частных производных, не разрешенные относительно производной по времени. Нелинейность и вырожденность таких моделей вызывает значительные трудности при их исследовании. Поэтому интерес к изучению подобного рода моделей постоянно возрастает. Задача (0.0.1), (0.0.2) в неавтономном случае рассматривается впервые.

Целью работы является исследование первой начально-краевой задачи (0.0.1), (0.0.2) на основе теории полулинейных неавтономных уравнений соболевского типа.

Методы исследования. Задача (0.0.1), (0.0.2) рассматривается как конкретная интерпретация задачи Коши

$$u(0)=u_0\tag{0.0.5}$$

для полулинейного неавтономного уравнения соболевского типа

$$L\,\dot u \;=\; M\,u \;+\; F(u) \;+f(t).\tag{0.0.6}$$

Здесь $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ – банаховы пространства, оператор $L\in\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, т.е. линеен и непрерывен $\ker L\neq\{0\}$; оператор $M:\ \operatorname{dom}M\to\mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определен в $\mathcal{U}$, т.е. $M\in\mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$, $\mathcal{U}_M=\{u\in\operatorname{dom}M:\ \|u\|=\|Mu\|_{\mathcal{F}}+\|u\|_{\mathcal{U}}\}$, а оператор $F\in C^\infty(\mathcal{U}_M;\mathcal{F})$. Вектор-функция $f:\mathbb{R}\to\mathcal{F}$.

Уравнение вида (0.0.6) часто называют уравнением соболевского типа [7, 40, 46, 79, 81, 90]. И это понятно, потому что впервые начально-краевые задачи для линейных уравнений в частных производных, не разрешенные относительно производных по времени, начал изучать С.Л. Соболев.

Основным методом исследования служит метод фазового пространства, содержание которого составляют различные результаты линейного и нелинейного функционального анализа. В частности, мы используем теорию относительно $p-$секториальных операторов и аналитических полугрупп операторов с ядрами, элементы теории дифференцируемых банаховых многообразий. Идея метода фазового пространства заключается в сведении неавтономного уравнения (0.0.6) к уравнению $\dot{u} = B(u)+g(t)$, заданному на так называемом расширенном фазовом пространстве этого уравнения, а не на всем пространстве.

В трудах великого французского математика А. Пуанкаре в конце девятнадцатого столетия впервые обращалось внимание на не разрешенные относительно старшей производной по времени уравнения [86]. Затем указанные уравнения появились в работах других ученых, занимавшихся исследованием важных гидродинамических задач. Сюда, например, можно отнести работы Буссинеска, Одквиста, и многих других.

С.Л. Соболев в 40-х годах прошлого века начал систематическое изучение начально-краевых задач для линейного уравнения вида

$$L\dot{u} = Mu \tag{0.0.7}$$

с возможно матричными дифференциальными операторами L и M в частных производных по "пространственным" переменным. В 1954 году им было получено уравнение

$$\Delta u_{tt} + \omega^2 u_{zz} = 0,$$

моделирующее малые колебания вращающейся жидкости [66] и изучена задача Коши для него. Эта пионерская работа положила начало новому направлению "Уравнения соболевского типа," которое получило мощное развитие в последние несколько десятилетий.

Абстрактные линейные уравнения (0.0.7) в их интерпретации в виде уравнений в частных производных впервые начал изучать Р. Е. Шоуолтер[89, 88]. М.И. Вишик [6] рассмотрел задачу Коши и разработал численные методы её решения для уравнения (0.0.7).

Р. Е. Шоуолтер [88] и независимо от него Н.А. Сидоров со своими учениками [64, 65] первыми начали изучать абстрактные полулинейные уравнения вида (0.0.6) с различными вырождениями оператора L и рассматривать приложения полученных абстрактных результатов к конкретным начально-краевым задачам для уравнений в частных производных.

Отметим большие заслуги воронежской математической школы, возглавляемой С.Г.Крейном, в исследовании разрешимости задачи Коши для абстрактного линейного операторного уравнения (0.0.7). В работах С.Г.Крейна [24] и его учеников впервые были отмечено, что задача (0.0.5), (0.0.7) однозначно разрешима не при всех начальных данных, лежащих в банаховом пространстве $\mathcal{U}$, причем ее решение при всех $t \in \mathbb{R}$ также принадлежит подпространству, из которого берутся начальные данные.

Уравнения вида (0.0.6) и конкретные их интерпретации называют уравнениями соболевского типа [40, 47, 84, 89, 91]. Уравнения соболевского типа — это самостоятельная часть обширной области неклассических уравнений математической физики. На важность и необходимость создания общей теории разрешимости уравнений вида (0.0.6), (0.0.7) указывали И.Г. Петровский [43] и Ж.-Л. Лионс [27] в 60-70-е годы прошлого века.

К абстрактной задаче (0.0.5), (0.0.6) можно редуцировать начально-краевые задачи для уравнений, описывающих движение вязкоупргих жидкостей, "которые способны к релаксации напряжений при деформировании или проявляют феномен задержанного развития деформации после снятия напряжений" [42]. Уравнениям Осколкова в работе посвящен третий параграф второй главы, поскольку именно работы А.П.Осколкова послужили отправной точкой исследований автора.

В настоящее время уравнения соболевского типа переживают пору бурного расцвета. Сформировались научные направления, вокруг которых сложились научные школы. Вышло много монографий, целиком или частично посвященных уравнениям (0.0.6), (0.0.7).

В монографии Х. Гаевского, К. Грегера, К. Захариаса [8] изучается задача Коши для псевдопараболического уравнения (0.0.6), содержащего равномерно липшиц-непрерывный оператор Вольтерра. Доказываются теоремы существования и единственности решения указанной задачи, устанавливается сходимость метода Галеркина.

В монографии Р.Е. Шоуолтера [88] изучаются уравнения (0.0.6), (0.0.7) в полугильбертовом пространстве с самосопряженным оператором L.

В монографии А. Фавини и А. Яги [80] излагается теория полугрупп операторов, разрешающих дифференциальные включения $x_t \in A(x)$ с линейным многозначным оператором. Линейное уравнение соболевского типа (0.0.7) с $(L, \sigma)-$ограниченным оператором M в случае устранимой особой точки в бесконечности сводится к включению такого типа.

Монография Ю.Е. Бояринцева, В.Ф. Чистякова [3] посвящена изучению алгебро-дифференциальных неоднородных систем вида (0.0.6) с прямоугольной матрицей или матрицей $L(t)$,вырожденной при всех $t \in [0, T]$.

В монографии Г.Е. Демиденко и С.В. Успенского [11] с помощью построения последовательностей приближенных решений и получения их оценок в соответсвующих нормах исследуется задача Коши и смешанная задача для уравнения

$$L_0(D_s)D_t^l x + \sum_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_s)D_t^k x = f(s, t)$$

с квазиэллиптическим оператором $L_0(D_s)$.

В монографии Н.А. Сидорова, Б.В. Логинова, А.В. Синицина и М.А. Фалалеева [87] изучаются приложения метода Ляпунова-Шмидта к задаче Коши для полулинейных уравнений. Установлено существование и единственность решения в классе непрерывных функций задачи Коши для неоднородного уравнения (0.0.6), причем неоднородность сильно измерима и интегрируема по Бохнеру, и оператор F удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. Доказано существование $w-$периодического решения указанной задачи Коши для уравнения с замкнутыми плотно определенными операторами и $w-$периодической неоднородностью.

В монографии И.Е. Егорова, С.Г. Пяткова и С.В. Попова [13] исследована разрешимость краевой нелокальной задачи для неоднородного уравнения (0.0.7), где L, M – самосопряженные (или диссипативные) операторы, определенные в гильбертовом пространстве. Получен результат о существовании сильного решения данной задачи и показано, что при выполнении некоторых условий разрешимости (ортогональности) решение краевой задачи является гладким.

В монографии А.Г. Свешникова, А.Б. Альшина, М.О. Корпусова, Ю. Д. Плетнера [44] исследуются проблемы глобальной и локальной разрешимости ширококого класса задач для линейных и нелинейных уравнений в частных производных, в том числе для псевдопараболических уравнений и уравнений соболевского типа.

Во всех рассмотренных монографиях отсутствует объяснение факта принципиальной неразрешимости задачи (0.0.5), (0.0.6) при произвольных начальных данных. Впервые данный факт был замечен в [78, 85], затем он отмечался многими авторами. И одно из объяснений этого факта было представлено Г.А. Свиридюком и автором данной работы [47, 58] с точки зрения предложенного ими метода фазового пространства. Изучение начально-краевых задач для различных линейных и полулинейных уравнений соболевского типа сводится к изучению их фазовых пространств. Последовательное применение метода фазового пространства к изучению уравнений вида (0.0.7) позволило не только построить стройную теорию вырожденных (полу)групп операторов, но и разработать приложения этой теории к задачам устойчивости и задачам оптимального управления.

Первые итоги этих исследований подведены в монографии Г.А. Свиридюка и В.Е. Федорова [91]. В эту работу вошли результаты Т.А. Бокаревой [1], Л.Л. Дудко [12], А.В. Келлер [20], В.Е. Федорова [72], А.А. Ефремова [14], Г.А. Кузнецова [25]. После выхода монографии были защищены кандидатские диссертации С.В. Брычева [4], И.В. Бурлачко [5], и докторские диссертации Т.Г. Сукачевой [67], В.Е. Федорова [73], А.В. Келлер [21], С.А. Загребиной [15], А.А. Замышляевой [16], Н.А. Манаковой [28].

Изучение фазовых пространств полулинейных уравнений соболевского типа начато Г.А. Свиридюком [53] в 1986 году для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинекса. Г.А. Свиридюком и М.М. Якуповым [61] было изучено фазовое пространство уравнения Осколкова

$$(1-\chi\nabla^2)\nabla^2\frac{\partial\psi}{\partial t}=\nu\nabla^4\psi-\frac{\partial(\psi,\nabla\psi)}{\partial x_1,x_2}+g,$$

и доказано, что фазовое пространство является простым банаховым

$C^\infty-$многообразием. В диссертации М.М. Якупова [76] была установлена простота фазового пространства задачи Коши-Бенара для гибрида уравнения Осколкова и уравнения теплопроводности в приближении Обербека-Буссинеска, моделирующего плоскопараллельную термоконвекцию вязкоупругой несжимаемой жидкости. Непосредственным продолжением [61] являются работы [57] и [59, 60].

В настоящее время теория относительно $p-$секториальных ($\sigma-$ограниченных) операторов и соответсвующих им полугрупп (групп) операторов с ядрами интенсивно развивается. Основной целью этой теории является поиск условий, при которых фазовое пространство уравнения (0.0.7) совпадает с образом полугруппы (группы) разрешающих операторов. В существующем ныне обзоре [49], учебном пособии [51] и монографии [91] приведены известные к настоящему времени результаты теории $\sigma-$ограниченных и $p-$секториальных операторов и соответствующих им групп и полугрупп разрешающих операторов с ядрами уравнения (0.0.7).

Данная ВКР выполнена в рамках направления, возглавляемого профессором Г.А.Свиридюком. В ней получены необходимые и достаточные условия существования единственного решения для задач Коши-Дирихле нестационарных уравнений, описывающих движение несжимаемых вязкоупругих жидкостей Кельвина–Фойгта ненулевого порядка в магнитном поле Земли.

ВКР содержит введение, две главы и заключение. Во введении поставлена задача, обсуждаются методы исследования и результаты. В первой главе содержатся вспомогательные сведения. Первый параграф посвящен уравнениям с относительно ограниченным оператором, второй - с относительно секториальным оператором; третий содержит информацию об уравнениях Осколкова. Во второй главе представлены основные результаты. В первом параграфе исследуется абстрактная задача Коши для полулинейного неавтономного уравнения соболевского типа. Второй параграф посвящен исследованию задачи Коши-Дирихле для нестационарных уравнений соболевского типа в магнитогидродинамике. Заключение содержит выводы и перспективы возможных дальнейших исследований. Результаты ВКР опубликованы в работах [92] - [97].

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

1.1. Уравнения с относительно ограниченными операторами

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ — банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, а оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$.

Введем в рассмотрение L-резольвентное множество

$$\rho^L(M) = \{ \mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U}) \}$$

и L-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M . Заметим, что в случае, когда оператор $L = I$, пространство $\mathcal{F} = \mathcal{U}$, L-резольвентное множество и L-спектр оператора M являются соответственно резольвентным множеством и спектром оператора M.

Лемма 1.1. Множество $\rho^L(M)$ открыто.

Следствие 1.1. Множество $\sigma^L(M)$ замкнуто.

Определение 1.1. Оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1} L$, $L^L_\mu(M) = L\,(\mu L - M)^{-1}$ называются соответственно L-резольвентой, правой L- резольвентой, левой L-резольвентой оператора M.

По построению операторы $R^L_\mu(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, $L^L_\mu(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$.

Пусть точка $\mu \in \rho^L(M)$. Тогда из тривиальных тождеств

$$\begin{aligned} (\lambda L - M)\,(\mu L - M)^{-1} = I + (\lambda - \mu)\,L^L_\mu(M), \\ (\mu L - M)^{-1}\,(\lambda L - M) = I + (\lambda - \mu)\,R^L_\mu(M), \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

которые в дальнейшем нам пригодятся при $(\lambda = 0)$

$$\begin{aligned} M\,(\mu L - M)^{-1} = \mu\,L^L_\mu(M) - I, \\ (\mu L - M)^{-1} M = \mu\,R^L_\mu(M) - I, \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

следует аналог резольвентного тождества Гильберта

$$(\lambda L - M)^{-1} - (\mu L - M)^{-1} = (\mu - \lambda)(\mu L - M)^{-1} L\,(\lambda L - M)^{-1}, \tag{1.1.3}$$

из которого в свою очередь следует правое

$$R_{\lambda}^{L}(M) - R_{\mu}^{L}(M) = (\mu - \lambda)\, R_{\mu}^{L}(M) R_{\lambda}^{L}(M) \tag{1.1.4}$$

и левое

$$L_{\lambda}^{L}(M) - L_{\mu}^{L}(M) = (\mu - \lambda)\, L_{\mu}^{L}(M) L_{\lambda}^{L}(M) \tag{1.1.5}$$

L-резольвентные тождества.

Теорема 1.1. Все L-резольвенты оператора M аналитичны на множестве $\rho^{L}(M)$.

Определение 1.2. Оператор M называется спектрально ограниченным относительно оператора L (в дальнейшем — (L, σ)-ограниченным), если

$$\exists a \in \mathbb{R}_{+} \ \ \forall \mu \in \mathbb{C} \ \ (\ |\mu| > a\ ) \Rightarrow (\mu \in \rho^{L}(M)\ ).$$

Пусть оператор M (L, σ)-ограничен, а контур $\Gamma = \{\, \mu \in \mathbb{C} : \ |\mu| = r > a \}$. Рассмотрим интегралы типа Ф.Рисса

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\mu}^{L}(M) d\mu, \qquad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L_{\mu}^{L}(M) d\mu. \tag{1.1.6}$$

Лемма 1.2. Пусть оператор M (L, σ)- ограничен. Тогда операторы $P : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ и $Q : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ являются проекторами.

Проекторы (1.1.6) расщепляют пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ следующим образом: $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$; $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$, где

$$\mathcal{U}^0 = \ker P; \quad \mathcal{U}^1 = \operatorname{im} P; \qquad \mathcal{F}^0 = \ker Q; \quad \mathcal{F}^1 = \operatorname{im} Q.$$

Обозначим через $L_k(M_k)$ сужение $L(M)$ на $\mathcal{U}^k$ $(\operatorname{dom} M \cap \mathcal{U}^k)$, $k = 0, 1$.

Теорема 1.2. (Теорема Г.А.Свиридюка о расщеплении)

Пусть оператор M (L, σ)-ограничен. Тогда

(i) $L_k : \mathcal{U}^k \to \mathcal{F}^k$, $M_k : (\operatorname{dom} M \cap \mathcal{U}^k) \to \mathcal{F}^k$, $k = 0, 1$;

(ii) существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0; \mathcal{U}^0)$;

(iii) существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1; \mathcal{U}^1)$;

(iv) оператор $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1; \mathcal{F}^1)$.

Ввиду теоремы 1.2 пары $(\mathcal{U}^k, \mathcal{F}^k)$, $k = 0, 1$ подпространств естественно назвать парами инвариантных пространств операторов L и M.

Пусть выполнены условия теоремы 1.2. Тогда в силу этой теоремы существуют операторы $R = M_0^{-1} L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0)$ и $S = L_1^{-1} M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1)$.

Теорема 1.3. Пусть оператор M (L, σ)-ограничен. Тогда $\sigma(R) = \{0\}$, а $\sigma(S) = \sigma^L(M)$.

Следствие 1.2. В условиях теоремы 1.2 имеет место разложение L-резольвенты оператора M в ряд Лорана

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k R^k M_0^{-1}(I - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} Q.$$

в области $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| > a\}$.

Определение 1.3. Точка ∞ называется

(i) устранимой особой точкой, если $R \equiv O$,

(ii) полюсом порядка p, если $R^p \neq O$, а $R^{p+1} \equiv O$,

(iii) существенно особой точкой, если $R^q \neq O$ при всех $q \in \mathbb{N}$.

В дальнейшем случаи (i) и (ii) будем объединять в случай "несущественно особая точка".

Любой вектор $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$ будем называть собственным вектором оператора L . Упорядоченное множество $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\} \subset \mathcal{U}$ назовем цепочкой M-присоединенных векторов собственного вектора φ_0 , если

$$L\varphi_{q+1} = M\varphi_q \quad q = 0, 1, \ldots; \quad \varphi_q \notin \ker L \setminus \{0\}, \quad q = 1, 2, \ldots .$$

Цепочка может быть бесконечной (в частности, она может быть заполнена нулями, если $\varphi_0 \in \ker M$), однако она обязательно конечна, если существует такой M-присоединенный вектор φ_p , что либо $\varphi_p \notin \operatorname{dom} M$, либо $M\varphi_p \notin \operatorname{im} L$. В частности, собственный вектор φ_0 не имеет M-присоединенных векторов, если либо $\varphi_0 \notin \operatorname{dom} M$, либо $M\varphi_0 \notin \operatorname{im} L$. Мощность конечной цепочки называется ее длиной. Когда цепочка бесконечна, то мы говорим, что у нее бесконечная длина.

Линейная оболочка всех собственных и M-присоединенных векторов оператора L называется M-корневым линеалом. Если M-корневой линеал замкнут, то он называется M-корневым пространством оператора L .

Лемма 1.3. Пусть φ_p — M- присоединенный вектор собственного вектора φ_0, и точка $\mu \in \rho^L(M)$. Тогда

$$-R_\mu^L(M)\varphi_p = \varphi_{p-1} + \mu\varphi_{p-2} + \cdots + \mu^{p-1}\varphi_0 \ .$$

Теорема 1.4. Пусть оператор M (L,σ)- ограничен, а точка ∞ является

(i) существенно особой точкой L- резольвенты оператора M . Тогда M-корневой линеал оператора L содержится в $\mathcal{U}^0$;

(ii) полюсом порядка $p \in \mathbb{N}$ L-резольвенты оператора M. Тогда M-корневое пространство оператора L совпадает с $\mathcal{U}^0$, и длина любой цепочки M-присоединенных векторов любого собственного вектора оператора L не превосходит числа p;

(iii) устранимой особой точкой L-резольвенты оператора M. Тогда $\ker L = \mathcal{U}^0$, $\operatorname{im} L = \mathcal{F}^1$, и любой собственный вектор оператора L не имеет M-присоединенных векторов.

Теорема 1.5. Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, и пусть

(i) $\operatorname{dom} M = \mathcal{U}$, тогда $M[\mathcal{U}^0] = \mathcal{F}^0$;

(ii) $\mathcal{U}^2 = \mathcal{U} \ominus \mathcal{U}^0$ — некоторое алгебраическое и топологическое дополнение к $\mathcal{U}^0$, тогда $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus L[\mathcal{U}^2]$.

Лемма 1.4. Пусть точки $\lambda, \mu \in \rho^L(M)$. Тогда

$$\text{(i)} \quad \operatorname{im} R_\lambda^L(M) = \operatorname{im} R_\mu^L(M), \qquad \operatorname{im} L_\lambda^L(M) = \operatorname{im} L_\mu^L(M); \tag{1.1.7}$$

$$\text{(ii)} \quad \ker R_\lambda^L(M) = \ker L, \quad \ker L_\lambda^L(M) = \{M\varphi : \varphi \in \operatorname{dom} M \cap \ker L\}. \tag{1.1.8}$$

Из теоремы 1.4 (iii) следует, что образ $\operatorname{im} L$ и ядро $\ker L$ оператора L дополняемы в пространствах $\mathcal{F}$ и $\mathcal{U}$ соответственно. Такие операторы названы в [2] бирасщепляющими.

Теорема 1.6. Пусть оператор $M \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ σ-ограничен относительно бирасщепляющего оператора L. Тогда любой собственный вектор оператора L имеет цепочку M-присоединенных векторов конечной длины.

Приступим к рассмотрению аналитических групп разрешающих операторов с ядрами. Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ — банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, а оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$, тогда уравнение соболевского типа

$$L\,\dot{u} \;=\; M\,u \;+ f \tag{1.1.9}$$

можно редуцировать к паре эквивалентных ему уравнений

$$R^L\alpha(M)\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1}Mu, \tag{1.1.10}$$

$$L^L\alpha(M)\dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1}f, \tag{1.1.11}$$

где $\alpha \in \rho^L(M)$. С учетом того, что операторы $(\alpha L - M)^{-1}M = (\alpha L - M)^{-1}\alpha L - I$ и $M(\alpha L - M)^{-1} = \alpha L(\alpha L - M)^{-1} - I$ непрерывны, а уравнения (1.1.10) и (1.1.11) заданы на пространствах $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ соответственно, их можно рассматривать как конкретные интерпретации уравнения

$$A\dot{v} = Bv, \tag{1.1.12}$$

где операторы $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$, а $\mathcal{V}$ — некоторое банахово пространство. Решением уравнения (1.1.12) называется вектор-функция $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathcal{V})$, удовлетворяющая этому уравнению.

Определение 1.4. Отображение $V^\bullet \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathcal{L}(\mathcal{V}))$ называется группой разрешающих операторов (короче, разрешающей группой) уравнения (1.1.12), если

(i) $\forall s \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad V^sV^t = V^{s+t}$;

(ii) при любом $v_0 \in \mathcal{V}$ вектор-функция $v(t) = V^tv_0$ есть решение уравнения (1.1.12).

Следуя традиции, отождествим группу с ее графиком $\{V^t : t \in \mathbb{R}\}$. Группу $\{V^t : t \in \mathbb{R}\}$ назовем аналитической, если она имеет аналитическое продолжение во всю комплексную плоскость с сохранением свойств (i) и (ii) из определения 1.4.

Теорема 1.7. Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда существуют аналитические разрешающие группы уравнений (1.1.10) и (1.1.11).

Нетрудно убедиться, что отображение

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \quad t\in\mathbb{R} \tag{1.1.13}$$

является аналитической разрешающей группой уравнения (1.1.10), а

$$F^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \quad t\in\mathbb{R} \tag{1.1.14}$$

аналитической разрешающей группой уравнения (1.1.11).

Замечание 1.1. Проекторы P и Q из (1.1.6) являются, очевидно, единицами разрешающих групп $\{U^t : t\in\mathbb{R}\}$ и $\{F^t : t\in\mathbb{R}\}$ соответственно. Поэтому

$$U^t = U^tP = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\mu L_1 - M_1)^{-1}L_1Pe^{\mu t}d\mu = \exp(tS)P,$$

где оператор $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1)$ в силу теоремы (1.2). Аналогично,

$$F^t = F^tQ = \exp(tT)Q,$$

где $T = M_1L_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{F}^1)$.

Определение 1.5. Множество

$$\ker V^\bullet = \{v\in\mathcal{V} : \quad V^tv = 0 \quad \exists t\in\mathbb{R}\}$$

называется ядром, а множество

$$\operatorname{im} V^\bullet = \{v\in\mathcal{V} : \quad v = V^0v\} \quad -$$

образом аналитической группы $\{V^t : t\in\mathbb{R}\}$.

Очевидно,

$$\ker V^\bullet = \ker V^t, \quad \operatorname{im} V^\bullet = \operatorname{im} V^t \quad \forall t\in\mathbb{R},$$

поэтому определение (1.5) корректно.

Ввиду замечания (1.1) справедливо

Следствие 1.3. В условиях теоремы (1.7)

$$\ker U^{\bullet} = \mathcal{U}^0, \quad \operatorname{im} U^{\bullet} = \mathcal{U}^1; \quad \ker F^{\bullet} = \mathcal{F}^0, \quad \operatorname{im} F^{\bullet} = \mathcal{F}^1.$$

Обратимся вновь к уравнению (1.1.12).

Определение 1.6. Множество $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ называется фазовым пространством уравнения (1.1.12), если

(i) любое решение $v = v(t)$ уравнения (1.1.12) лежит в $\mathcal{B}$, т.е. $\forall t \in \mathbb{R} \quad v(t) \in \mathcal{B}$;

(ii) при любом $v_0 \in \mathcal{B}$ существует единственное решение $v \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}; \mathcal{V})$ задачи Коши $v(0) = v_0$ для уравнения (1.1.12).

Теорема 1.8. Пусть оператор M (L, σ)-ограничен, причем ∞ — устранимая особая точка либо полюс порядка $p \in \mathbb{N}$ L-резольвенты оператора M. Тогда фазовое пространство уравнения (1.1.10) (уравнения (1.1.11)) совпадает с образом разрешающей группы (1.1.13) (разрешающей группы (1.1.14)).

Замечание 1.2. Если оператор M (L, σ)-ограничен, причем его L-резольвента имеет в точке ∞ полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, то будем говорить, что оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Рассмотрим условия существования фазовых пространств. Нахождение L-спектра оператора M и исследование характера бесконечно удаленной точки в приложениях не всегда удобно. Поэтому приведем здесь условия на операторы L и M, необходимые и достаточные для существования фазовых пространств. Для простоты ограничимся случаем $M \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$.

Сформулируем ряд необходимых условий (L, σ)-ограниченности оператора M в случае, когда ∞ — несущественная особая точка L-резольвенты $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M .

(A1) Длина любой цепочки M-присоединенных векторов любого собственного вектора оператора L ограничена числом $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

(A2) M-корневое подпространство $\mathcal{U}^0$ оператора L — дополняемое подпространство пространства $\mathcal{U}$. Обозначим через $\mathcal{U}^2 = \mathcal{U} \ominus \mathcal{U}^0$ некоторое алгебраическое и топологическое дополнение к $\mathcal{U}^0$. Положим $M\,[\mathcal{U}^0\,] = \mathcal{F}^0, \quad L\,[\mathcal{U}^2\,] = \mathcal{F}^2$.

(A3) $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^2$.

Обозначим через M_0 сужение оператора M на $\mathcal{U}^0$.

(A4) Существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0;\mathcal{U}^0)$.

Обозначим через L_0 сужение оператора L на $\mathcal{U}^0$. По построению оператор $L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0;\mathcal{F}^0)$. Положим $R = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0)$.

Лемма 1.5. Предположим, что выполнены все условия (A1) – (A4). Тогда оператор R нильпотентен, причем степень его нильпотентности не превосходит числа p.

Обозначим через L_2 (M_2) сужение оператора L (M) на подпространство $\mathcal{U}^2$, а через P_2 (Q_2) — проектор вдоль $\mathcal{U}^0$ ($\mathcal{F}^0$) на $\mathcal{U}^2$ ($\mathcal{F}^2$). В силу теоремы Банаха существует оператор $L_2^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2;\mathcal{U}^2)$. Введем в рассмотрение оператор T , равный сужению оператора $M_0^{-1}(I - Q_2)M$ на $\mathcal{U}^2$, и оператор S_2 , равный сужению оператора $L_2^{-1}Q_2M$ на $\mathcal{U}^2$. Очевидно, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^2;\mathcal{U}^0)$, а $S_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^2)$. Построим множество

$$\mathcal{U}^1 = \{\ u \in \mathcal{U} : \quad u = (I - G)u^2, \quad u^2 \in \mathcal{U}^2\ \} ,$$

где оператор

$$G = \sum_{q=0}^{p} R^q T S_2^q \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^2;\mathcal{U}^0)\ . \tag{1.1.15}$$

Лемма 1.6. Пусть выполнены все условия (A1) — (A4). Тогда $\mathcal{U}^1$ — подпространство в $\mathcal{U}$, дополнительное к $\mathcal{U}^0$.

Положим $\mathcal{F}^1 = L\,[\mathcal{U}^1\,]$.

Лемма 1.7. Пусть выполнены все условия (A1) — (A4). Тогда $\mathcal{F}^1$ — подпространство в $\mathcal{F}$, дополнительное к $\mathcal{F}^0$.

Обозначим через L_1 (M_1) сужение оператора L (M) на $\mathcal{U}^1$. По построению оператор $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{F}^1)$, а в силу теоремы Банаха существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$.

Лемма 1.8. Пусть выполнены все условия (A1) — (A4). Тогда оператор $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{F}^1)$.

Обозначим через S сужение оператора $L_1^{-1}M_1P$ на $\mathcal{U}^1$. Оператор $S \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1)$, следовательно,

$$\exists\ a > 0\ \ \forall\ \mu \in\ \mathbb{C}\quad (\ |\mu| > a\ )\quad \Rightarrow\quad (\ \mu \in \rho(S)\ )\ ,$$

где $\rho(S)$ — резольвентное множество оператора S .

Теорема 1.9. Пусть выполнены все условия (A1) — (A4). Тогда оператор M (L,p)-ограничен.

Через $P_2 : \mathcal{U} \to \mathcal{U}^2 (Q_2 : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^2)$ обозначен проектор вдоль $\mathcal{U}^0(\mathcal{F}^0)$. Тогда уравнение (0.9) нетрудно редуцировать к системе уравнений

$$R\dot{u}^0 = u^0 + Tu^2, \quad \dot{u}^2 = S_2u^2, \tag{1.1.16}$$

где через R, T и S_2 обозначены соответственно сужения операторов $M_0^{-1}(I - Q_2)L$, $M_0^{-1}(I - Q_2)M$ и $L_2^{-1}Q_2M$ на подпространства $\mathcal{U}^0$, $\mathcal{U}^2$ и $\mathcal{U}^2$ соответственно, а через L_2 обозначено сужение оператора L на подпространство $\mathcal{U}^2$ (существование оператора $L_2^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2;\mathcal{U}^2)$ следует из теоремы Банаха). Заметим, что по построению операторы $R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0)$, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^2;\mathcal{U}^0)$, $S_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^2)$, причем оператор R нильпотентен, и его степень нильпотентности не превосходит числа p из условия $(A1)$.

Теорема 1.10. Пусть выполнены все условия (A1) — (A4). Тогда

(i) множество $\mathcal{U}^1$ — фазовое пространство уравнения (0.5);

(ii) множество $\mathcal{U}^1$ — подпространство в $\mathcal{U}$ топлинейно изоморфное подпространству $\mathcal{U}^2$, причем $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$;

(iii) $(\mathcal{U}^1 = \mathcal{U}^2) \Longleftrightarrow (T \equiv O)$.

Рассмотрим теперь случай бирасщепляющего оператора L. Напомним [2], что оператор L называется бирасщепляющим, если его ядро и образ дополняемы в пространствах $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ соответственно.

Итак, пусть $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ — бирасщепляющий оператор, и оператор $M \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Введем в рассмотрение два условия.

(B1) Любая цепочка M-присоединенных векторов любого собственного вектора оператора L имеет длину, равную $p \in \mathbb{N}$.

Обозначим через $\operatorname{coim} L = \mathcal{U} \ominus \ker L$ некоторое алгебраическое и топологическое дополнение к ядру $\ker L$. Пусть $\tilde{L}$ — сужение оператора L на $\operatorname{coim} L$. В силу теоремы Банаха существует оператор $\tilde{L}^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{im} L; \operatorname{coim} L)$. Пусть выполнено условие (B1). Тогда существуют линеалы

$$\mathcal{U}^{0q} = \tilde{L}^{-1} M[\mathcal{U}^{0q-1}], \quad \mathcal{U}^{00} = \ker L, \quad q = 1,\ 2,\ \ldots,\ p.$$

Очевидно, $M[\mathcal{U}^{0p}] \cap \operatorname{im} L = \{0\}$.

(B2) $M[\mathcal{U}^{0p}] \oplus \operatorname{im} L = \mathcal{F}$.

Теорема 1.11. Пусть операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, причем оператор L — бирасщепляющий. Пусть выполнены условия (B1) и (B2). Тогда оператор M (L,p)-ограничен.

1.2. Уравнения с относительно секториальными операторами

Рассмотрим вначале понятие (L,p)-секториального оператора. Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ — банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, а оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$. И пусть L-резольвентное множество $\rho^L(M)$ оператора M не пусто, и точки $\mu_0, \mu_1,\ \ldots\ , \mu_p \in \rho^L(M)$ (в частности, они могут совпадать). Наряду с правой $R^L_\mu(M)$ и левой $L^L_\mu(M)$ L-резольвентами оператора M введем в рассмотрение правую

$$R^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{p} R^L_{\mu_q}(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$$

и левую

$$L^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{p} L^L_{\mu_q}(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$$

(L,p)-резольвенты оператора M, $\mu = (\mu_0, \mu_1,\ \ldots\ , \mu_p)$.

Лемма 1.9. Пусть точки $\lambda_q,\ \mu_q \in \rho^L(M),\quad q = 0, 1,\ \ldots,\ p$. Тогда

(i) $\operatorname{im} R^L_{(\lambda,p)}(M) = \operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M),\quad \operatorname{im} L^L_{(\lambda,p)}(M) = \operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M)$;

(ii) $\ker\, R^L_{(\mu,p)}(M)$ есть линейная оболочка множества собственных и всех ненулевых M-присоединенных векторов высоты не больше p оператора M;

(iii) $\ker\, L^L_{(\mu,p)}(M) = \{M\varphi : \quad \varphi \in \operatorname{dom} M \cap \ker\, R^L_{(\lambda,p)}(M)\}$.

Определение 1.7. Оператор M называется p-секториальным относительно оператора L (короче, (L,p)-секториальным), если существуют константы $a \in \mathbb{R}$ и $\Theta \in (\dfrac{\pi}{2}, \pi)$ такие, что сектор

$$S^L_{\Theta,a}(M) = \{\mu \in \mathbb{C} :\ |\arg(\mu - a)|\ <\ \Theta\ ,\quad \mu \neq a\ \}\ \subset \rho^L(M)\ ,$$

причем

$$\max\{\ \|\, R^L_{(\mu,p)}(M)\,\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_L)}\ ,\ \|\, L^L_{(\mu,p)}(M)\,\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}\,\}\ \leq\ \frac{\mathrm{const}}{\prod\limits_{q=0}^{p} |\mu_q - a|}$$

при любых $\mu_0,\ \mu_1,\ \ldots\ ,\ \mu_p \in S^L_{\Theta,a}(M)$.

Замечание 1.3. Не теряя общности, положим $a = 0$ в определении 1.7.

Замечание 1.4. Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, причем ∞ — несущественная особая точка L-резольвенты оператора M (для определенности, ∞ — полюс порядка p). Тогда оператор M (L,p)-секториален.

Замечание 1.5. Если $p = 0$, то (L,p)-секториальный оператор M называется L-секториальным [45, 56, 62, 63].

Теорема 1.12. Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда

(i) $\ker\, R^L_{(\mu,p)}(M) \cap \operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M) = \{0\}$;

(ii) $\ker\, L^L_{(\mu,p)}(M) \cap \operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M) = \{0\}$.

Теорема 1.13. Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда

$$\|(\mu L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})} \leq \mathrm{const}(1 + |\mu|)^p$$

при всех $\mu \in S^L_{\Theta,a}(M)$.

Далее изучим аналитические полугруппы разрешающих операторов с ядрами. Для этого рассмотрим пару уравнений, эквивалентных линейному неоднородному уравнению соболевского типа (1.1.9)

$$R^L\alpha(M)\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1} M u, \tag{1.2.1}$$

$$L^L\alpha(M)\dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1} f, \tag{1.2.2}$$

где $\alpha \in \rho^L(M)$. Будем рассматривать их как конкретные интерпретации уравнения

$$A\dot{v} = Bv, \tag{1.2.3}$$

где операторы $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$, а $\mathcal{V}$ — некоторое банахово пространство. Решением уравнения (1.2.3) будем теперь называть вектор-функцию $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{V})$, удовлетворяющую этому уравнению.

Определение 1.8. Отображение $V^\bullet \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{V}))$ называется полугруппой разрешающих операторов (короче, разрешающей полугруппой) уравнения (1.2.3), если

(i) $\forall s \in \mathbb{R}_+ \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad V^s V^t = V^{s+t}$;

(ii) при любом $v_0 \in \mathcal{V}$ вектор-функция $v(t) = V^t v_0$ есть решение уравнения (1.2.3).

Отождествим полугруппу с ее графиком $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$. Полугруппу $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ назовем аналитической, если она имеет аналитическое продолжение в некоторый сектор , содержащий луч $\mathbb{R}_+$; и равномерно ограниченной, если

$$\|V^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \leq \text{const} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Замечание 1.6. Наличие единицы у разрешающей полугруппы уравнения (1.2.3) не постулируется, в отличие от традиционного определения полугруппы [17, 19, 75]

Теорема 1.14. Пусть оператор $M(L,p)$-секториален. Тогда существует аналитическая и равномерно ограниченная разрешающая полугруппа уравнения (1.2.1) (уравнения (1.2.2)).

Пусть контур $\Gamma \subset S^L_\theta(M)$ такой , что $|\arg\mu| \to \theta$ при $|\mu| \to +\infty, \quad \mu \in \Gamma$.

Легко показать, что отображения

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma R^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.2.4}$$

$$F^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma L^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R}_+ \tag{1.2.5}$$

будут аналитическими и равномерно ограниченными разрешающими полугруппами уравнения (1.2.1), (1.2.2).

Замечание 1.7. Если оператор M (L, σ)-ограничен, причем ∞ — несущественная особая точка L-резольвенты оператора M, то полугруппы (1.2.4) и (1.2.5) продолжимы до групп (1.2.2) и (1.2.3) соответственно.

Замечание 1.8. Пусть оператор M $(L, 0)$-секториален, причем существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})$. Тогда операторы $S = L^{-1}M : \ \mathrm{dom}\, M \to \mathcal{U}$ и $T = M\, L^{-1} : \ L[\,\mathrm{dom}\, M\,] \to \mathcal{F}$ секториальны, причем $U^t = \exp(tS)$ и $F^t = \exp(tT)$ при любом $t \in \mathbb{R}_+$.

Пусть оператор M (L, p)-секториален. Тогда из конструкции разрешающих полугрупп $\{U^t : \ t \in \mathbb{R}_+\}$ и $\{F^t : \ t \in \mathbb{R}_+\}$ вытекает, что каждый оператор этих полугрупп имеет ядро $\ker\, U^t \supset \ker\, R^L_\mu(M)$ и $\ker\, F^t \supset \ker\, L^L_\mu(M)$.

Определение 1.9. Пусть $\{V^t : \ t \in \mathbb{R}_+\}$ — аналитическая разрешающая полугруппа уравнения (1.11). Множество

$$\ker\, V^\bullet = \{\varphi \in \mathcal{V} : \quad V^t\varphi = 0 \ \ \exists\, t \in \mathbb{R}_+ \},$$

называется ядром, а множество

$$\mathrm{im}\, V^\bullet = \{v \in \mathcal{V} : \quad \lim_{t \to 0+} V^t v = v \ \}$$

— образом этой полугруппы.

Замечание 1.9. Из аналитичности полугруппы $\{V^t \ : \ \ t \in \mathbb{R}_+\}$ следует, что $\ker\, V^\bullet = \ker\, V^t \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$.

Замечание 1.10. Очевидно, что $\operatorname{im} V^t \subset \operatorname{im} V^s \subset \operatorname{im} V^\bullet \quad \forall t > s$.

Обозначим через $\mathcal{U}^1(\mathcal{F}^1)$ замыкание образа $\operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)(\operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M)\ )$ в норме пространства $\mathcal{U}(\mathcal{F})$.

Теорема 1.15. Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда $\operatorname{im} U^\bullet = \mathcal{U}^1$ и $\operatorname{im} F^\bullet = \mathcal{F}^1$.

Теорема 1.16. Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда $\ker U^\bullet = \ker R^L_{(\mu,p)}(M)$ и $\ker F^\bullet = \ker L^L_{(\mu,p)}(M)$.

Положим $\mathcal{U}^0 = \ker R^L_{(\mu,p)}(M)$, $\mathcal{F}^0 = \ker L^L_{(\mu,p)}(M)$ и обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathcal{U}^k$ $(\mathcal{U}^k \cap \operatorname{dom} M)$, $k = 0,\ 1$.

Теорема 1.17. Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда

(i) операторы $L_0 : \mathcal{U}^0 \to \mathcal{F}^0$, $M_0 : \mathcal{U}^0 \cap \operatorname{dom} M \to \mathcal{F}^0$;

(ii) оператор $L_1 : \mathcal{U}^1 \to \mathcal{F}^1$;

(iii) существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0;\mathcal{U}^0)$.

Из теоремы 1.17 следует существование операторов $R = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0)$ и $\tilde{R} = L_0 M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0)$.

Следствие 1.4. В условиях теоремы 1.17 операторы R и $\tilde{R}$ нильпотентны, причем их степень нильпотентности не превосходит числа p.

Следствие 1.5. В условиях теоремы 1.17 $\mathcal{U}^0 \cap \mathcal{U}^1 = \{0\}$ и $\mathcal{F}^0 \cap \mathcal{F}^1 = \{0\}$.

Изучим теперь вопрос о фазовых пространствах уравнений (1.2.1) и (1.2.2). Рассмотрим задачу Коши

$$v(0) = v_0 \tag{1.2.6}$$

для уравнения (1.2.3). Решение $v = v(t)$ уравнения (1.2.3) называется решением задачи (1.2.3), (1.2.6), если $\lim_{t\to 0+} v(t) = v_0$.

Условие (1.2.6) для уравнений (1.2.1), (1.2.2) будет выглядеть соответственно

$$u(0) = u_0, \tag{1.2.7}$$

$$f(0) = f_0. \tag{1.2.8}$$

Определение 1.10. Множество $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ называется фазовым пространством уравнения (1.2.3), если

(i) любое решение $v = v(t)$ этого уравнения лежит в $\mathcal{B}$, т.е. $v = v(t) \in \mathcal{B} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$.

(ii) при любом $v_0 \in \mathcal{B}$ существует единственное решение задачи (1.2.3), (1.2.6).

Теорема 1.18. Пусть оператор $M(L,p)$-секториален. Тогда фазовое пространство уравнения (1.2.1)((1.2.2)) совпадает с образом $\operatorname{im} U^\bullet(\operatorname{im} F^\bullet)$.

Замечание 1.11. Если существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$, а оператор $A^{-1}B$ (или BA^{-1}) секториален, то фазовым пространством уравнения (1.2.3) служит все пространство $\mathcal{V}$.

Рассмотрим вопрос о единицах разрешающих полугрупп и существовании обратного оператора.

Определение 1.11. Пусть $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ — полугруппа, определенная на банаховом пространстве $\mathcal{V}$. Оператор $V^0 \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ называется единицей этой полугруппы, если

$$V^0 = s\text{–}\lim_{t \to 0+} V^t \ .$$

Замечание 1.12. Единица V^0 полугруппы $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ является проектором на пространстве $\mathcal{V}$, причем $\ker V^0 = \ker V^\bullet$ и $\operatorname{im} V^0 = \operatorname{im} V^\bullet$.

Определение 1.12. Оператор M называется сильно (L,p)-секториальным справа (слева), если он (L,p)-секториален и при всех $\lambda, \ \mu_0, \ \mu_1, \ \ldots, \ \mu_q \in S^L_{a,\Theta}(M)$

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1} M\, u\|_{\mathcal{U}} \leq \frac{\text{const}}{|\lambda| \prod\limits_{q=o}^{p} |\mu_q|} \qquad \forall u \in \operatorname{dom} M,$$

где $\text{const} = \text{const}(u)$

(существует плотный в $\mathcal{F}$ линеал $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ такой, что

$$\|M\,(\lambda L - M)^{-1} L^L_{(\mu,p)}(M)\, f\|_{\mathcal{F}} \leq \frac{\text{const}}{|\lambda| \prod\limits_{q=o}^{p} |\mu_q|} \qquad \forall f \in \overset{\circ}{\mathcal{F}},$$

где $\text{const} = \text{const}(f)$).

Замечание 1.13. Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, причем ∞ — несущественная особая точка L-резольвенты оператора M. Тогда оператор M сильно (L,p)-секториален справа и слева.

Теорема 1.19. Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален справа (слева). Тогда существует единица полугруппы $\{U^t:\ t\in\mathbb{R}_+\}$ $(\{F^t:\ t\in\mathbb{R}_+\})$.

Следствие 1.6. Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален справа и слева. Тогда

(i) $L\,P\,u = Q\,L\,u \qquad \forall\, u\in\mathcal{U}$;

(ii) $M\,P\,u = Q\,M\,u \qquad \forall\, u\in \operatorname{dom} M$.

Обозначим через L_1 (M_1) сужение оператора L (M) на $\mathcal{U}^1$ $(\operatorname{dom} M\cap\mathcal{U}^1)$.

Следствие 1.7. В условиях следствия 1.6 оператор $L_1\in\mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{F}^1)$, а оператор $M_1:\ \mathcal{U}^1\cap\operatorname{dom} M\to\mathcal{F}^1$.

Замечание 1.14. Из следствия 1.6 (ii) вытекает, что проектор P "не портит" элементы $u\in\operatorname{dom} M$, то есть $P\,u\in\operatorname{dom} M$, если $u\in\operatorname{dom} M$. Отсюда следует, что множество $\mathcal{U}^k\cap\operatorname{dom} M$ плотно в $\mathcal{U}^k$, $\ k=0,1$. Поэтому в силу теоремы 1.17 (iii) и следствия 1.7 оператор $M_k:\ \operatorname{dom} M\cap\mathcal{U}^k\to\mathcal{F}^k\ \ k=0,1$ линеен замкнут и плотно определен, а оператор M_0 еще и биективен.

Рассмотрим вопрос о существовании обратного оператора $L_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U}^1)$. Для этого в предположении (L,p)-секториальности оператора M построим оператор

$$R^t=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\mu L-M)^{-1}e^{\mu t}d\mu,\qquad t\in\mathbb{R}_+\ ,$$

где контур $\Gamma\subset S^L_{a,\Theta}(M)$ такой же, как в (1.2.4) и (1.2.5).

Лемма 1.10. Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда семейство $\{R^t:\ t\in\mathbb{R}_+\}$ аналитично продолжимо в сектор $\{\tau\in\ \mathbb{C}:\ |\arg\tau|<\Theta-\dfrac{\pi}{2}\}$ и $R^{s+t}=U^sR^t=R^sF^t\quad\forall\, s,t\in\mathbb{R}_+$.

Лемма 1.11. Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален справа и слева. Тогда $\operatorname{im} R^t\subset\mathcal{U}^1$ и $\ker\, R^t\supset\mathcal{F}^0\quad\forall\, t\in\mathbb{R}_+$.

Определение 1.13. Оператор M называется сильно (L,p)-секториальным, если он сильно (L,p)-секториален слева и при любых $\lambda, \mu_q \in S^L_\Theta(M), \quad q = 0,\ 1, \ldots,\ p$

$$\|(\lambda L - M)^{-1} L^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})} \leq \frac{\text{const}}{|\lambda| \prod\limits_{q=o}^{p} |\mu_q|}.$$

Замечание 1.15. Сильно (L,p)-секториальный оператор M сильно (L,p)- секториален справа.

Замечание 1.16. Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, причем ∞ – несущественная особая точка L-резольвенты оператора M. Тогда, как нетрудно видеть из разложений (1.2.1) и (1.2.2), оператор M сильно (L,p)-секториален.

Замечание 1.17. Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})$, то оператор M сильно L- секториален (то есть $p = 0$) точно тогда, когда секториален оператор $L^{-1}M$ (или ML^{-1}).

Лемма 1.12. Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален. Тогда

$$\|R^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})} \leq \text{const} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}_+.$$

Теорема 1.20. Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален. Тогда существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$.

1.3. Уравнения Осколкова

К абстрактной задаче (0.0.5), (0.0.6) можно редуцировать начально-краевые задачи для уравнений, описывающих движение вязкоупругих жидкостей, "которые способны к релаксации напряжений при деформировании или проявляют феномен задержанного развития деформаций после снятия напряжений" [38]. Связь тензора напряжений σ и тензора скоростей деформаций D определяет тип жидкости. Соотношение между σ и D, называемое определяющим или реологическим, имеет вид

$$(1+\sum_{l=1}^{L}\lambda_l\frac{\partial^l}{\partial t^l})\sigma = 2\nu(1+\sum_{m=1}^{M}\kappa_m\nu^{-1}\frac{\partial^m}{\partial t^m})D - pE,$$

где $\{\lambda_l\} \quad l=1,\ \ldots,\ L$ — времена релаксаций, $\{\kappa_m\} \quad m=1,\ \ldots,\ M$ — времена запаздывания , p — давление жидкости.

Простейшими из них являются жидкости Максвелла ($L=1,\ M=0$), жидкости Кельвина-Фойгта ($L=0,\ M=1$) и жидкости Олдройта ($L=M=1$). В жидкостях Максвелла напряжения после прекращения движения уменьшаются как $\exp(-t{\lambda_1}^{-1})$, в жидкостях Кельвина-Фойгта при снятии напряжений скорость деформации уменьшается как $\exp(-t{\kappa_1}^{-1})$, а в жидкостях Олдройта наблюдается как экспоненциальное релаксирование напряжений, так и экспоненциальное запаздывание деформаций.

Подстановкой соответствующего реологического соотношения в уравнения движения несжимаемой жидкости

$$u_t + (u\cdot\nabla)u = \nabla\sigma + f, \quad \nabla\cdot u = 0.$$

в [37] получена система, представляющая собой обобщение системы уравнений Навье-Стокса, в которую она переходит при $L=M=0$.

А.П.Осколков [31, 39] исследовал разрешимость в гельдеровых и соболевских пространствах начально-краевой задачи в цилиндре $\quad \Omega\times(0,T)$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x\in\Omega, \qquad u(x,t) = 0, \quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T)$$

для уравнения

$$(\lambda-\nabla^2)u_t = \nu\nabla^2 u - \nabla p + f, \quad \nabla\cdot u = 0,$$

ν – положительный параметр, $\lambda > -\lambda_1 \quad (\lambda_1$ — наименьшее собственное число спектральной задачи $\quad -\nabla^2 v + \nabla p = \lambda v, \quad \nabla\cdot v = 0, \quad v = 0$ н $\partial\Omega)$.

В [31, 37] исследована разрешимость в пространстве $L^2(\Omega)$ начально-краевой задачи для "квазилинейной" системы уравнений

$$(\lambda-\nabla^2)u_t = \nu\nabla^2 u - (u\cdot\nabla)u - \nabla p + f, \quad \nabla\cdot u = 0$$

в цилиндре $\Omega \times (0,T), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad n = 2,\ 3,\ 4$ при $\lambda > -\lambda_1$.

А.П.Осколков вместе с учениками Н.А.Каразеевой, А.А.Котсиолисом и Р.Д.Шадиевым [18, 23] построил теорию глобальной разрешимости на $[0,\infty]$ начально-краевых задач для течений жидкостей Олдройта ($n = 2$) и жидкостей Кельвина-Фойгта ($n = 3$), на основе которой возникла теория аттракторов и динамических систем, порождаемых этими начально-краевыми задачами. В [23] получены глобальные априорные оценки на полуоси $\mathbb{R}_+$ для решений уравнений движения жидкостей Олдройта и жидкостей Кельвина-Фойгта.

В [33] уравнение движения жидкостей Кельвина-Фойгта сводится к операторному уравнению (0.0.6), $t \in \mathbb{R}_+$, для которого исследуется ряд нелокальных проблем. Заметим, что в [32, 34, 35] А.П.Осколковым рассматривались ε-аппроксимации для уравнений вязкоупругих сред и уравнений водных растворов полимеров.

В середине восьмидесятых годов прошлого столетия А.П.Осколков предложил Г.А.Свиридюку с помощью метода фазового пространства исследовать первую начально-краевую задачу для полученных им уравнений, описывающих движение вязкоупругих несжимаемых жидкостей Кельвина-Фойгта различного порядка. Основы таких исследований были заложены в работах [47] и [58]. а впоследствии были продолжены в кандидатской диссертации [68], а потом и докторской диссертации автора [67]. В последней была построена теория разрешимости задачи Коши для полулинейного неавтономного уравнения соболевского типа и рассмотрены в качестве приложений начально-краевые задачи для нестационарных уравнений, полученных А.П.Осколковым. Поэтому такие уравнения мы называем "уравнениями Осколкова". В монографии [30] с помощью метода фазового пространства исследованы автономные уравнения соболевского типа и их приложения к уравнениям Осколкова. В [22] исследованы начально-краевые задачи для порожденных уравнениями Осколкова вырожденных уравнений магнитогидродинамики в автономном случае. В данной магистерской диссертации на основе разработанной автором вышеуказанной теории изучены соответствующие начально-краевые задачи магнитогидродинамики в неавтономном случае. Заметим, что сходным образом ранее исследовалась задача термоконвекции несжимаемой вязкоупругой жидкости [94].

2. ПЕРВАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

2.1. Задача Коши для нестационарного полулинейного уравнения соболевского типа

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ – банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, т.е. линеен и непрерывен; оператор $M : \operatorname{dom} M \to \mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определен в $\mathcal{U}$, т.е. $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Обозначим через $\mathcal{U}_M = \{u \in \operatorname{dom} M : \|u\| = \|Mu\|_{\mathcal{F}} + \|u\|_{\mathcal{U}}\}$ Пусть оператор $F \in C^{\infty}(\mathcal{U}_M;\mathcal{F})$. Вектор-функция $f : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{F}$.

Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{2.1.1}$$

для полулинейного нестационарного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + F(u) + f(t). \tag{2.1.2}$$

Определение 2.1. Локальным решением (далее просто — решением) задачи (2.1.1), (2.1.2) назовем вектор-функцию $u \in \mathcal{C}^{\infty}((0,T);\mathcal{U}_M)$, удовлетворяющую уравнению (2.1.2) и такую, что $u(t) \to u_0$ при $t \to 0+$.

Введем в рассмотрение L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathcal{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})\}$ и L-спектр $\sigma^L(M) = \mathcal{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M.

Определение 2.2. Пусть пространство $\mathcal{U}$ расщепляется в прямую сумму $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \oplus \mathcal{U}_1$ так, чтобы $\ker L \subset \mathcal{U}_0$. Решение $u = v + w$, где $v(t) \in \mathcal{U}_0$, а $w(t) \in \mathcal{U}_1$ при всех $t \in (0,T)$, уравнения (2.1.2) назовем квазистационарной полутраекторией, если $L\dot{v} \equiv 0$.

Известно [58, 47, 85], что решение задачи (2.1.1), (2.1.2) существует не для всех $u_0 \in \mathcal{U}_M$. Поэтому введем следующее определение.

Определение 2.3. Множество $\mathcal{B}^t \subset \mathcal{U}_M \times \bar{\mathbb{R}}_+$ назовем расширенным фазовым пространством уравнения (2.1.2), если для любой точки $u_0 \in \mathcal{U}_M$ такой, что $(u_0, 0) \in \mathcal{B}^0$ существует единственное решение задачи (2.1.1), (2.1.2), причем $(u(t), t) \in \mathcal{B}^t$.

Так как оператор M сильно $(L,p)-$ секториален, то пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ расщепляются в прямые суммы $\mathcal{U}=\mathcal{U}^0\oplus\mathcal{U}^1$, $\mathcal{F}=\mathcal{F}^0\oplus\mathcal{F}^1$, где $\mathcal{U}^0$ и $\mathcal{F}^0$ – ядра, а $\mathcal{U}^1$ и $\mathcal{F}^1$ – образы аналитических разрешающих полугрупп U^t и F^t линейного однородного уравнения $L\,\dot{u}\;=\;M\,u$.

Указанные полугруппы имеют следующий вид:

$$U^t=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu,\qquad F^t=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu.$$

Здесь $\Gamma\subset\rho^L(M)$ – контур, такой, что $\arg\mu\to\pm\theta$ при $|\mu|\to+\infty$, $\rho^L(M)=\{\mu\in\mathcal{C}:(\mu L-M)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})\}$ – L-резольвентное множество оператора M. $R^L_\mu(M)=(\mu L-M)^{-1}L$ ($L^L_\mu(M)=L\,(\mu L-M)^{-1}$) правая (левая) L-резольвента оператора M.

В силу этих результатов [49, 91] приведем задачу (2.1.1), (2.1.2) к эквивалентной системе, которую назовем нормальной формой задачи (2.1.1), (2.1.2)

$$\begin{aligned}R\dot{u}^0&=u^0+G(u)+g(t),\quad u^0(0)=u^0_0,\\ \dot{u}^1&=Su^1+H(u)+h(t)\quad u^1(0)=u^1_0,\end{aligned}\tag{2.1.3}$$

Здесь $u^k\in\mathcal{U}^k$, $k=0,1$, $u=u^0+u^1$, операторы $R=M_0^{-1}L_0$, $S=L_1^{-1}M_1$, $G=M_0^{-1}(I-Q)F$, $H=L_1^{-1}QF$, $g=M_0^{-1}(I-Q)f$, $h=L_1^{-1}Qf$. $((Q\in\mathcal{L}(F)(\equiv\mathcal{L}(F;F))$ — проектор, расщепляющий пространство $\mathcal{F}$ требуемым образом). Далее будем изучать такие квазистационарные полутраектории уравнения (2.1.2), для которых $R\dot{u}^0\equiv0$. Для этого предположим, что оператор R — бирасщепляющий [2], т.е. его ядро $\ker\,R$ и образ $\operatorname{im}R$ дополняемы в пространстве $\mathcal{U}$. Положим $\mathcal{U}^{00}=\ker\,R$, а через $\mathcal{U}^{01}=\mathcal{U}^0\ominus\mathcal{U}^{00}$ обозначим некоторое дополнение к подпространству $\mathcal{U}^{00}$. Тогда первое уравнение (2.1.3) примет вид

$$R\dot{u}^{01}=u^{00}+u^{01}+G(u)+g(t),\tag{2.1.4}$$

где $u=u^{00}+u^{01}+u^1$.

Теорема 2.1. Пусть оператор M сильно $(L,p)-$ секториален, а оператор R — бирасщепляющий. Пусть существует квазистационарная полутраектория (2.1.2). Тогда она удовлетворяет соотношениям

$$0=u^{00}+u^{01}+G(u)+g(t),\quad u^{01}=\text{const}.\tag{2.1.5}$$

Перейдем теперь к рассмотрению достаточных условий. Известно, что при условии сильной (L,p)-секториальности оператора M оператор S секториален. Значит, он порождает на $\mathcal{U}^1$ аналитическую полугруппу, которую мы обозначим через $\{U_1^t : t \geq 0\}$, так как в действительности оператор U_1^t есть сужение оператора U^t на $\mathcal{U}^1$. Из того, что $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ следует, что существует проектор $P \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, соответствующий данному расщеплению. Но $P \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M)$, и следовательно, $\mathcal{U}_M$ расщепляется в прямую сумму $\mathcal{U}_M = \mathcal{U}_M^0 \oplus \mathcal{U}_M^1$ так, что вложение $\mathcal{U}_M^k \subset \mathcal{U}^k, \quad k = 0,\ 1$, плотно и непрерывно [49].

Теорема 2.2. Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален, оператор R — бирасщепляющий, оператор $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M;\mathcal{F})$, а вектор-функция $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+;\mathcal{F})$. Пусть

(A1) в некоторой окрестности $\mathcal{O}_{u_0} \subset \mathcal{U}_M$ точки u_0 выполнено соотношение

$$0 = u_0^{01} + (I - P_R)(G(u^{00} + u_0^{01} + u^1) + g(t)); \tag{2.1.6}$$

(A2) проектор $P_R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$, и оператор $I + P_R G'_{u_0^0} : \mathcal{U}_M^{00} \to \mathcal{U}_M^{00}$ — топлинейный изоморфизм ($\mathcal{U}_M^{00} = \mathcal{U}_M \cap \mathcal{U}^{00}$);

(A3) для аналитической полугруппы $\{U_1^t : t \geq 0\}$ выполнено соотношение

$$\int_0^\tau \|U_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{U}_M^1)} dt < \infty \qquad \forall \tau \in \mathbb{R}_+. \tag{2.1.7}$$

Тогда существует единственное решение задачи (2.1.1), (2.1.2), являющееся квазистационарной полутраекторией уравнения (2.1.2).

Замечание 2.18. Второе соотношение в (2.1.5) поясняет смысл термина "квазистацинарные полутраектории," т.е. это такие полутраектории, которые "стационарны по некоторым переменным". В динамическом случае понятие квазистационарной полутраектории совпадает с понятием квазистационарной траектории [50].

Замечание 2.19. Из условия (A1) теоремы 2.2 следует, что окрестность $\mathcal{O}_{u_0}$ является частью фазового пространства уравнения (2.1.2).

Замечание 2.20. Условие (2.1.7) для обычных аналитических полугрупп, имеющих оценку $\|U_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{U}_M^1)} < t^{-1}\text{const}$, не выполняется. Обозначим через $\mathcal{U}_\alpha^1 =$

$[\mathcal{U}^1;\mathcal{U}^1_M]_\alpha$, $\alpha\in[0,1]$ — некоторое интерполяционное пространство, построенное по оператору S. В теореме 2.2 условие "$F\in\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}^1_M;\mathcal{F})$"дополним условием "$H\in\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}^1_M;\mathcal{U}^1_\alpha)$," а соотношение (2.1.7) заменим соотношением

$$\int_0^\tau \|U_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{U}^1_\alpha)}dt<\infty \qquad \forall\tau\in\mathbb{R}_+. \tag{2.1.8}$$

Тогда утверждение теоремы 2.2 не изменится. Обсуждение этого круга вопросов см. в [29, глава 9].

Пусть теперь $\mathcal{U}_k$ и $\mathcal{F}_k$ – банаховы пространства, операторы $A_k\in\mathcal{L}(\mathcal{U}_k,\ \mathcal{F}_k)$, а операторы $B_k:\quad \operatorname{dom}B_k\to\mathcal{F}$ линейны и замкнуты с областями определений $\operatorname{dom}B_k$ плотными в $\mathcal{U}_k$, $\quad k=1,2$. Построим пространства $\mathcal{U}=\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2$, $\quad\mathcal{F}=\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2$ и операторы $L=A_1\otimes A_2$, $\quad M=B_1\otimes B_2$. По построению оператор $L\in\mathcal{L}(\mathcal{U};\ \mathcal{F})$, а оператор $M:\quad\operatorname{dom}M\to\mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определен, $\operatorname{dom}M=\operatorname{dom}B_1\times\operatorname{dom}B_2$.

Теорема 2.3. Пусть операторы B_k сильно (A_k,p_k)-секториальны, $k=1,2;$. Тогда оператор M сильно (L,p)-секториален, $p=max(p_1,p_2)$.

2.2. Нестационарные уравнения движения жидкости в магнитном поле Земли

Система

$$\begin{aligned}
&(1-\varkappa\nabla^2)v_t=\nu\nabla^2v-(v\cdot\nabla)v+\sum_{l=1}^K\beta_l\nabla^2w_l-\frac{1}{\rho}\nabla p-2\Omega\times v+\\
&\tfrac{1}{\rho\mu}(\nabla\times b)\times b+f^1,\\
&\nabla\cdot v=0,\quad \nabla\cdot b=0,\quad b_t=\delta\nabla^2b+\nabla\times(v\times b)+f^2.\\
&\frac{\partial w_l}{\partial t}=v+\alpha_lw_l,\quad \alpha_l\in\mathbb{R}_-,\quad \beta_l\in\mathbb{R}_+,\quad l=\overline{1,\ K},
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

моделирует поток несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта ненулевого порядка K [39] в магнитном поле Земли. Здесь вектор-функции $v=(v_1(x,t),v_2(x,t),\dots,v_n(x,t))$ и $b=(b_1(x,t),b_2(x,t),\dots,b_n(x,t))$ характеризуют скорость жидкости и магнитную индукцию соответственно, $p=p(x,t)$ – давление, $\varkappa$ – коэффициент упругости, ν – коэффициент вязкости, Ω – угловая скорость, δ – магнитная вязкость, μ – магнитная проницаемость, ρ – плотность, параметры $\beta_l, \quad l=\overline{1,\ K}$ – определяют время ретардации (запаздывания) давления. Свободные члены $f^1=(f^1_1,\ldots,f^1_n),\ f^1_i=f^1_i(x,t), f^2=f^2(x,t)$ отвечают внешнему воздействию на жидкость.

Рассмотрим первую начально-краевую задачу для системы (2.2.1)

$$
\begin{aligned}
&v(x,0)=v_0(x), \quad b(x,0)=b_0(x), \quad w_l(x,0)=w_{l0}(x) \quad x\in D,\\
&v(x,t)=0, \quad b(x,t)=0, \quad w_l(x,t)=0 \quad (x,t)\in\partial D\times\mathbb{R}_+, \quad l=\overline{1,\ K}
\end{aligned}
\tag{2.2.2}
$$

в предположении, что $\mu=1$ и $\rho=1$. Здесь $D\subset\mathbb{R}^n$, $n=2,3,4,$ – ограниченная область с границей ∂D класса C^∞.

В данном параграфе устанавливается локальная однозначная разрешимость задачи (2.2.1), (2.2.2). Эта задача рассматривается в рамках теории уравнений соболевского типа. Задача (2.2.1), (2.2.2) изучается как конкретная интерпретация абстрактной задачи (2.1.1), (2.1.2).

Для того, чтобы редуцировать задачу (2.2.1), (2.2.2) к задаче (2.1.1), (2.1.2), перейдем от системы (2.2.1)к системе

$$
\begin{aligned}
&(1-\varkappa\nabla^2)v_t=\nu\nabla^2 v-(v\cdot\nabla)v+\sum_{l=1}^{K}\beta_l\nabla^2 w_l-\bar{p}-2\Omega\times v+(\nabla\times b)\times b+f^1,\\
&\nabla\cdot v=0, \quad \nabla\cdot b=0, \quad b_t=\delta\nabla^2 b+\nabla\times(v\times b)+f^2.\\
&\frac{\partial w_l}{\partial t}=v+\alpha_l w_l, \quad \alpha_l\in\mathbb{R}_-, \quad \beta_l\in\mathbb{R}_+, \quad l=\overline{1,\ K},
\end{aligned}
\tag{2.2.3}
$$

Следуя [94, 67] , введем пространства $\mathbf{H}^2_\sigma, \mathbf{H}^2_\pi, \mathbf{H}_\sigma$ и $\mathbf{H}_\pi$. Здесь $\mathbf{H}^2_\sigma$ и $\mathbf{H}_\sigma$ – подпространства соленоидальных функций в пространствах $(W^2_2(D))^n\cap(\overset{\circ}{W}{}^1_2(D))^n$ и $(L_2(D))^n$ соответственно, а $\mathbf{H}^2_\pi$ и $\mathbf{H}_\pi$ – их ортогональные (в смысле $(L_2(D))^n$) дополнения. Через Σ обозначим ортопроектор на $\mathbf{H}_\sigma$, причем его сужение на пространство $(W^2_2(D))^n\cap(\overset{\circ}{W}{}^1_2(D))^n$ будем также обозначать через Σ. Положим $\Pi=I-\Sigma$.

Равенством $A=\nabla^2 E_n:\ \mathbf{H}^2_\sigma\oplus\mathbf{H}^2_\pi\to\mathbf{H}_\sigma\oplus\mathbf{H}_\pi$, где E_n – единичная матрица порядка n, зададим линейный непрерывный оператор с дискретным конечнократным спектром $\sigma(A)\subset\mathbb{R}$, сгущающимся лишь на $-\infty$. Формулой $B_v:\ v\to\nabla(\nabla\cdot v)(B_b:\ b\to\nabla(\nabla\cdot b))$ зададим линейный непрерывный сюръективный оператор $B_v(B_b):\ \mathbf{H}^2_\sigma\oplus\mathbf{H}^2_\pi\to\mathbf{H}_\pi$ с ядром $\ker B_v=B_b=\mathbf{H}^2_\sigma$. Используя естественный изоморфизм прямой суммы и декартова произведения банаховых пространств, введем в рассмотрение пространства $\mathcal{U}_{10} = \mathbf{H}^2_\sigma \times \mathbf{H}^2_\pi \times \mathbf{H}_p$, $\mathcal{F}_{10} = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \mathbf{H}_p$, где $\mathbf{H}_p = \mathbf{H}_\pi$; $\mathcal{U}_{1i} = \mathbf{H}^2 \cap \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1 = \mathbf{H}^2_\sigma \times \mathbf{H}^2_\pi$, и $\mathcal{F}_{1i} = \mathbf{L}_2 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi$, $i = \overline{1,\ K}$. Тогда пространства $\mathcal{U}_1 = \oplus_{l=0}^K \mathcal{U}_{1l}$, $\mathcal{F}_1 = \oplus_{l=0}^K \mathcal{F}_{1l}$. Операторы A_1 и B_1 определены формулами $A_1 = \operatorname{diag}[\hat{A}_1 , E_k]$, где

$$\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} \check{A}_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \check{A}_1 = \begin{pmatrix} \Sigma(I - \lambda A)\Sigma & \Sigma A(I - \lambda A)\Pi \\ \Pi(I - \lambda A)\Sigma & \Pi A(I - \lambda A)\Pi \end{pmatrix};$$

$B_1 = (B_1^{ij})^2_{i,j=1}$, где

$$B_1^{11} = \begin{pmatrix} \nu\Sigma A & \nu\Sigma A & O \\ \nu\Pi A & \nu\Pi A & -I \\ O & B & O \end{pmatrix}, \quad B_1^{12} = \begin{pmatrix} \beta_1\Sigma A & \dots & \beta_K\Sigma A \\ \beta_1\Pi A & \dots & \beta_K\Pi A \\ O & \dots & O \end{pmatrix},$$

В матрице B_1^{11} $B = \nabla(\nabla \cdot v) - \nabla(\nabla \cdot b) = B_v - B_b$. Матрица B_1^{21} содержит K строк вида $(I,\ I,\ O)$, $B_1^{22} = \operatorname{diag}[\alpha_1, \dots, \alpha_K]$.

Замечание 2.21. Обозначим через A_σ сужение оператора ΣA на $\mathbf{H}^2_\sigma$. Согласно теореме Солонникова–Воровича–Юдовича, спектр $\sigma(A_\sigma)$ вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается лишь на $-\infty$.

Теорема 2.4. i) Операторы A_1, B_1 принадлежат $\mathcal{L}(\mathcal{U}_1; \mathcal{F}_1)$ и если $\varkappa^{-1} \notin \sigma(A)$, то оператор A_1 бирасщепляющий, $\ker A_1 = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{H}_p \times \underbrace{\{0\} \times \ldots \times \{0\}}_{K}$, $\operatorname{im} A_1 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \{0\} \times \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \ldots \times \mathcal{F}_K$.

ii) Если $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$, то оператор B_1 $(A_1, 1)$-ограничен.

Доказательство. Утверждение теоремы 2.2.1 есть прямое следствие соответствующих результатов [30]. ■

Символом ■ здесь и далее обозначается конец доказательства.

Замечание 2.22. Понятие (L, p)-ограниченного оператора можно найти, например, в работе [30] .

Далее положим $\mathcal{U}_2 = \mathcal{F}_2 = L_2(D)$ и равенством $B_2 = \delta\nabla^2 : \operatorname{dom} B_2 \to \mathcal{F}_2$ определим линейный замкнутый и плотно определенный оператор B_2, $\operatorname{dom} B_2 = W_2^2(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$.

Положим $A_2 \equiv I$.

Теорема 2.5. Оператор B_2 сильно A_2-секториален.

Доказательство. Утверждение теоремы 2.5 следует из секториальности оператора B_2 [74]. ■

Положим $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$.

Вектор u пространства $\mathcal{U}$ имеет вид $u = (u_\sigma, u_\pi, u_p, w_1, \ldots, w_K, u_b)$, где $(u_\sigma, u_\pi, u_p, w_1, \ldots, w_K) \in \mathcal{U}_1$, а $u_b \in \mathcal{U}_2$, $u_b = (b_\sigma, b_\pi)$, $b_\sigma \in \mathbf{H}_\sigma^2$, $b_\pi \in \mathbf{H}_\pi^2$. Аналогичный вид имеет вектор $f \in \mathcal{F}$. Операторы L и M определим равенствами $L = A_1 \otimes A_2$ и $M = B_1 \otimes B_2$. Оператор L принадлежит $\mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, а оператор $M : \operatorname{dom} M \to \mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определен, $\operatorname{dom} M = \mathcal{U}_1 \times \operatorname{dom} B_2$.

Теорема 2.6. Пусть $\varkappa^{-1} \notin \sigma(A)$, тогда оператор M сильно $(L, 1)$-секториален.

Доказательство. Из теоремы 2.4 и результатов пункта 3.1. работы [30] следует, что оператор B_1 сильно $(A_1, 1)$-секториален. В силу этого и теорем 2.3 и 2.5 справедливо утверждение теоремы 2.6. ■

Перейдем к построению нелинейного оператора F. Представим его в виде

$$F = F_1 \otimes F_2,$$

где

$$F_1 = F_1(u_\sigma, u_\pi, b) = (-\Sigma(((u_\sigma + u_\pi)\cdot\nabla)(u_\sigma + u_\pi) - 2\Omega \times (u_\sigma + u_\pi) + (\nabla \times b) \times b),$$

$$-\Pi(((u_\sigma + u_\pi)\cdot\nabla)(u_\sigma + u_\pi) - 2\Omega \times (u_\sigma + u_\pi) + (\nabla \times b) \times b), \underbrace{0, \ldots, 0}_{K+1}),$$

$$F_2 = F_2(u_\sigma, u_\pi, b) = \nabla \times ((u_\sigma + u_\pi) \times b).$$

В нашем случае $\mathcal{U}_M = \mathcal{U}_1 \times \operatorname{dom} B_2$ (в силу непрерывности оператора B_1).

Теорема 2.7. Оператор F принадлежит $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$.

Доказательство. Утверждение теоремы 2.7 вытекает из того, что что при любых $u \in \mathcal{U}_M$ оператор F'_u принадлежит $\mathcal{L}(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$, вторая производная Фреше F''_u оператора F – непрерывный билинейный оператор из $\mathcal{U}_M \times \mathcal{U}_M$ в $\mathcal{F}$, а $F'''_u \equiv O$ (аналогично [58, 47]). ■

Итак, редукция задачи (2.2.1), (2.2.2) к задаче (2.1.1), (2.1.2) закончена. В дальнейшем мы их отождествляем. Перейдем к проверке условий теорем 2.1 и 2.2.

В силу теоремы 2.4 и результатов пункта 3.1. работы [30] существует аналитическая полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ разрешающих операторов уравнения 2.2, которую в данном случае естественно представить в виде $U^t = V^t \times W^t$, где $V^t(W^t)$ – сужение оператора U^t на $\mathcal{U}_1(\mathcal{U}_2)$. Так как оператор B_2 секториален, то $W^t = \exp(tB_2)$, откуда следует, что ядро этой полугруппы $\mathcal{W}^\circ = \{0\}$, а образ $\mathcal{W}^1 = \mathcal{U}_2$.

Рассмотрим полугруппу $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$. В силу теорем 2.4 и 2.6 и результатов пункта 3.1. работы [30] данная полугруппа продолжима до группы $\{V^t : t \in \mathbb{R}\}$. Ее ядро $\mathcal{V}^0 = \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$, где $\mathcal{U}_1^{00} = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{H}_p \times \{0\} \times \ldots \times \{0\}(= \ker A_1$ в силу теоремы 2.4), а $\mathcal{U}_1^{01} = \Sigma A_\varkappa^{-1} A_{\varkappa\pi}^{-1}[\mathbf{H}_\pi^2] \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \underbrace{\{0\} \times \ldots \times \{0\}}_{K+1}$. Здесь $A_\varkappa = I - \varkappa A$, $A_{\varkappa\pi}$ – сужение оператора $\Pi A_\varkappa^{-1}$ на $\mathbf{H}_\pi$. Известно, что если $\varkappa^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$, то оператор $A_{\varkappa\pi} : \mathbf{H}_\pi \to \mathbf{H}_\pi^2$ – топлинейный изоморфизм. Обозначим через $\mathcal{U}_1^1$ образ $\mathcal{V}^1$. Тогда в силу сильной $(A_1, 1)$-секториальности оператора B_1 пространство $\mathcal{U}_1$ разлагается в прямую сумму подпространств $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01} \oplus \mathcal{U}_1^1$.

Построим оператор R (см. (2.1.3), (2.1.4)). В нашем случае $R = B_{10}^{-1} A_{10} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01})$, где $A_{10}(B_{10})$ – сужение оператора $A_1(B_1)$ на $\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$. (Оператор B_{10}^{-1} существует в силу теоремы 2.6 и соответствующих результатов из [30]). По построению $\ker R = \mathcal{U}_1^{00}$, а в работе [54] показано, что $\operatorname{im} R = \mathcal{U}_1^{01}$. Следовательно, оператор R бирасщепляющий. Обозначим через P_R проектор пространства $\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$ на $\mathcal{U}_1^{00}$ вдоль $\mathcal{U}_1^{01}$. В силу конструкции пространства $\mathcal{U}_M$ проектор P_R принадлежит $\mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$, где $\mathcal{U}_M^0 = \mathcal{U}_M \cap (\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}) (\equiv \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01})$. Итак, справедлива

Лемма 2.1. Пусть $\varkappa^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$. Тогда оператор R бирасщепляющий, причем $P_R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$.

Введем в рассмотрение проекторы

$$P_k = \operatorname{diag}[\hat{P}_k, 0], \quad Q_k = \operatorname{diag}[\hat{Q}_k, 0], \quad k = 0,\ 1.$$

(Из результатов [30] и в силу того, что ядро $\mathcal{W}^0 = \{0\}$, следует, что $I - P = (P_0 + P_1) \times O, \quad Q = (I - Q_0 - Q_1) \times I, \quad P : \mathcal{U} \to \mathcal{U}^1, \quad Q : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^1$.) Тогда, применяя проектор $I - P$ к уравнению (2.1.2), получаем уравнения

$$\Pi(\nu A(u_\sigma + u_\pi) - ((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) + \sum_{l=1}^{K} \beta_l \nabla^2 w_l - u_p - 2\Omega \times (u_\sigma + u_\pi) +$$
$$(\nabla \times b) \times b + f^1(t)) = 0, \quad B\, u_\pi = 0, \quad B b_\pi = 0. \tag{2.2.4}$$

Отсюда в силу теоремы 2.1 и свойств оператора B получаем необходимое условие квазистационарности полутраектории $u_\pi \equiv 0$, $b_\pi \equiv 0$, т.е. все решения нашей задачи (если они существуют) с необходимостью должны лежать в плоскости $\mathcal{B} = \{u \in \mathcal{U}_M :\ u_\pi = 0,\ b_\pi = 0\}$.

В силу того что $\Pi u_p = u_p$, из первого уравнения (2.2.4) получаем соотношение (2.1.5), т.е. в нашем случае

$$u_p = \Pi(\nu A u_\sigma - (u_\sigma \cdot \nabla) u_\sigma + \sum_{l=1}^{K} \beta_l \nabla^2 w_l - 2\Omega \times u_\sigma + (\nabla \times b_\sigma) \times b_\sigma + f^1(t)). \tag{2.2.5}$$

Из тождества $P_0 \equiv P_R$ следует, что второе и третье уравнения в (2.2.4) есть соотношение (2.1.6) применительно к нашему случаю. Таким образом, справедлива

Лемма 2.2. В условиях леммы 2.1 любое решение задачи (2.2.1), (2.2.2) лежит во множестве

$$\mathfrak{M} = \{u \in \mathcal{U}_M :\ u_\pi = 0,\ b_\pi = 0,\ u_p = \Pi(\nu A_\sigma - (u_\sigma \cdot \nabla) u_\sigma + \sum_{l=1}^{K} \beta_l \nabla^2 w_l -$$
$$2\Omega \times u_\sigma + (\nabla \times b_\sigma) \times b_\sigma) + f^1(t)\}.$$

Замечание 2.23. Из соотношения (2.2.5) вытекает условие A_2) теоремы 2.2 для любой точки $u_0^0 \in \mathcal{U}_M^{00} (\equiv \mathcal{U}_1^{00} \times \{0\})$. Поэтому аналогично [30] получаем, что множество $\mathfrak{M}$ – простое банахово многообразие, $\mathcal{C}^\infty$-диффеоморфное подпространству $\mathcal{U}_1^1 \times \mathcal{U}_2$, является кандидатом на роль расширенного фазового пространства задачи (2.2.1),(2.2.2) ((2.2.3), (2.2.2)).

Проверим условия (2.1.7), (2.1.8). Построим пространство $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}_1 \times \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. Данное пространство, очевидно, будет интерполяционным пространством для пары $[\mathcal{U},\mathcal{U}_M]_\alpha$, причем $\alpha = 1/2$. Как отмечено ранее, полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ продолжима до группы $\{V_1^t : t \in \mathbb{R}\}$ на $\mathcal{U}_1^1$, где V_1^t – сужение оператора V^t на $\mathcal{U}_1^1$. В силу того что $\mathcal{U}_M^1 = \mathcal{U}_M \cap \mathcal{U}_1^1$ по построению, оператор B_1 непрерывен в силу теоремы 2.4 и полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ равномерно ограничена, получим неравенство

$$\int\limits_0^\tau \|V_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1^1;\mathcal{U}_M^1)}\, dt \le const \times \|B_1\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1;\mathcal{F}_1)} \int\limits_0^\tau \|V_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1^1)}\, dt < \infty, \quad \tau \in \mathbb{R}_+. \tag{2.2.6}$$

Согласно неравенству Соболева [29], полугруппа $\{W^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$ удовлетворяет оценке

$$\int\limits_0^\tau \|W^t\|_{\mathcal{L}(\operatorname{dom} B_2;\overset{\circ}{W}{}_2^1(D))}\, dt < \infty. \tag{2.2.7}$$

Положим $\mathcal{U}_\alpha^1 = \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}^1$, где $\mathcal{U}^1 = \mathcal{U}_1^1 \times \mathcal{U}_2$. Тогда из неравенств (2.2.6) и (2.2.7) следует

Лемма 2.3. В условиях леммы 2.1 выполняется соотношение (2.1.7).

Теперь, учитывая условие (2.1.8), найдем оператор H. Оператор H естественно представить в виде $H = H_1 \otimes H_2$, где $H_1 = A_{11}^{-1}(I - Q_0 - Q_1)F_1$, а $H_2 \equiv F_2$ (A_{11} – сужение оператора A_1 на $\mathcal{U}_1^1$). Для оператора H справедливо утверждение, аналогичное теореме (2.7) для оператора F, т.е. $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M^1;\mathcal{U}_\alpha^1)$, где $\mathcal{U}_\alpha^1 = \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}^1$.

Таким образом, все условия теоремы 2.2 выполнены. Поэтому справедлива

Теорема 2.8. Пусть $\varkappa^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$. Тогда при любом u_0, таком, что $u_0 \in \mathfrak{M}$, и некотором $T \in \mathbb{R}_+$ существует единственное решение $u = (u_\sigma, 0, u_p, u_b)$ задачи (2.2.1), (2.2.2), являющееся квазистационарной полутраекторией, причем $u(t) \in \mathfrak{M}$ при всех $t \in (0, T)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, на основе метода фазового пространства в работе исследованы начально-краевые задачи для нестационарных уравнений соболевского типа, возникающие в геофизике и магнитогидродинамике. В рамках теории полулинейных неавтономных уравнений соболевского типа доказана теорема о существовании и единственности решения, которое является квазистационарной полутраекторией, а также дано описание расширенного фазового пространства. Полученные результаты обобщают соответствующие результаты [22] на неавтономный случай. Они могут быть применены при рассмотрении обратных задач, задач оптимального управления, начально-конечных и многоточечных задач, а также при рассмотрении стохастических уравнений. Также полученные результаты можно применять при разработке численных методов решения уравнений геофизики и магнитогидродинамики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бокарева, Т.А. Исследование фазовых пространств уравнений типа Соболева с относительно секториальными операторами: дис. ... канд. физ.-мат. наук./Т.А. Бокарева; РГПУ им. А.И.Герцена. – СПб, 1993. – 107 с.
2. Борисович, Ю.Г Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере–Шаудера / Ю.Г. Борисович, В.Г. Звягин, Ю.И. Сапронов // Успехи мат. наук, 1977. – Т. 32, N 4. – С. 3-54.
3. Бояринцев, Ю.Е. Алгебро-дифференциальные системы: методы решения и исследования / Ю.Е. Бояринцев, В.Ф. Чистяков. – Новосибирск: Наука, 1998. – 224 с.
4. Брычев, С.В. Исследование математической модели экономики коммунального хозяйства малых городов: дис. ... канд. физ.-мат. наук / С.В. Брычев; ЧелГУ. – Челябинск, 2002. – 124 с.
5. Бурлачко, И.В. Исследование оптимального управления системами леонтьевского типа: дис. ... канд. физ.-мат. наук / С.В. Бурлачко; ЧелГУ. – Челябинск, 2005. – 122 с.
6. Вишик, М. И. Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения /М.И. Вишик// Матем. сб., 1956. – Т. 39 (81). – Вып. 1. – С. 51-148.
7. Габов, С.А. Об одном дифференциальном уравнении типа уравнения Соболева/ С.А, Габов, В.А. Шевцов// ДАН СССР, 1984. - Т. 286, N 1. – С. 14-17.
8. Гаевский, Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас. – М.:Мир, 1978. – 336 с.
9. Гохберг И.Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов / И.Ц.Гохберг, М.Г.Крейн. – М.: Наука, 1965. – 448 с.
10. Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория. / Н. Данфорд , Дж.Т.М.Шварц. – ИЛ, 1962. – 726 с.

11. Демиденко, Г.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной/ Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. – Новосибирск: Научная книга, 1998. – 438 с.

12. Дудко, Л.Л. Исследование полугрупп операторов с ядрами: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Л.Л. Дудко. – Новгород, 1996. – 88 с.

13. Егоров, И.Е. Неклассические дифференциально-операторные уравнения / И.Е. Егоров, С.Г. Пятков, С.В. Попов. - Новосибирск: Наука, 2000. – 336 с.

14. Ефремов, А.А. Исследование оптимального управления линейными уравнениями типа Соболева: дис. ... канд. физ.- мат. наук / А.А. Ефремов; ЧелГУ. – Челябинск. – 1996. – 102 с.

15. Загребина, С.А. Исследование многоточечных начально-конечных задач для неклассических моделей математической физики : дис. ... докт. физ.-мат. наук / С. А. Загребина. – Челябинск, 2013. – 228 с.

16. Замышляева, А.А. Исследование линейных математических моделей соболевского типа высокого порядка: дис. ... докт. физ. - мат. наук / А.А. Замышляева. – Челябинск, 2013. – 276 с.

17. Иосида К. Функциональный анализ / К.Иосида . – М.: Мир, 1967. – 524 с.

18. Каразеева, Н.А. Об аттракторах и динамических системах, порождаемых начально-краевыми задачами для уравнений движения линейных вязкоупругих жидкостей / Н.А. Каразеева, А.А. Котсилис, А.П. Осколков// Препринт ЛОМИ им. В.А. Стеклова. – Л., 1988. – 58 с.

19. Като Т. Теория возмущений линейных операторов / Т.Като. – М.: Мир, 1972. – 740 с.

20. Келлер, А.В. Исследование ограниченных решений линейных уравнений типа Соболева: дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.В. Келлер. – Челябинск, 1997. – 115 с.

21. Келлер, А.В. Численное исследование задач оптимального управления для моделей леонтьевского типа: дис. ... д-ра физ. - мат. наук / А.В. Келлер; ЮУрГУ. – Челябинск, 2011. – 249 с.

22. Кондюков, А.О. Математичесчкие модели движения несжимаемых вязкоупругих жидкостей в магнитном поле Земли: дис. … канд. физ.-мат наук / А.О. Кондюков; ЮУрГУГУ. – Челябинск, 2017. – 116 с.

23. Котсиолис А.А. Глобальные априорные оценки на полуоси $t \geq 0$, асимптотическая устойчивость и периодичность по времени "малых"решений уравнений движения жидкостей Олдройта и жидкостей Кельвина-Фойгта / А.А.Котсиолис , А.П.Осколков , Р.Д.Шадиев // Препринт ЛОМИ. Р-10-89. Л., 1989. — 65 с.

24. Крейн, С.Г. Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн, К.И. Чернышов// Препринт ин-та математики СО АН СССР. – Новосибирск. – 1979. – 18 с.

25. Кузнецов, Г.А. Исследование относительно спектральных свойств линейных операторов: дис. … канд. физ.- мат. наук/ Г.А.Кузнецов; ЧелГУ. – Челябинск, 1999. – 105 с.

26. Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. - М.: Наука, 1961. – 288 с.

27. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. - М.: Мир, 1972. – 587 с.

28. Манакова, Н.А. Аналитическое и численное исследования оптимального управления в полулинейных моделях гидродинамики и упругости: дис. … докт. физ. - мат. наук / Н.А. Манакова. – Челябинск, 2015. – 255 с.

29. Марсден, Дж. Бифуркация рождения цикла и ее приложения/ Дж. Марсден, М. М. Мак-Кракен. – М.: Мир, 1980. – 368 с.

30. Матвеева, О.П., Сукачева Т.Г.Математические модели вязкоупругих несжимаемых жидкостей ненулевого порядка/ О.П. Матвеева, Т.Г. Сукачева – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – 101 с.

31. Осколков, А.П. К теории жидкостей Фойгта / А.П. Осколков// Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1980. – Т.96. – С. 233-236.

32. Осколков, А.П. Метод штрафа для уравнений вязкоупругих сред. The penalty method for the equations of viscoelastic media / А.П. Осколков// Зап. научн. сем. ПОМИ, 1995. – Т. 224. – С. 267 — 278. Англ.

33. Осколков, А.П. Нелокальные проблемы для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С.Л.Соболева / А.П. Осколков// Записки научн. семин. ЛОМИ, 1991. – Т. 198. – С. 31-48.

34. Осколков, А.П. Нелокальные проблемы для уравнений жидкостей Кельвина-Фойгта и их ε-аппроксимаций / А.П. Осколков // Записки научн. семин. ПОМИ, 1995. – Т. 221. – С. 185-207.

35. Осколков, А.П. Начально-краевая задача с проскальзыванием для уравнений водных растворов полимеров со штрафом / А.П. Осколков // Зап. научн. сем. ПОМИ, 1994. – Т. 210. – С. 241-250.

36. Осколков, А.П. Об асимптотическом поведении при $t \to \infty$ решений начально-краевых задач для уравнений движения вязкоупругих жидкостей / А.П. Осколков// Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1989. – Т. 171.– С. 174-181.

37. Осколков, А.П. О некоторых нестационарных линейных и квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей / А.П. Осколков// Зап. науч. семин. ЛОМИ АН СССР, 1976. – Т. 59. – С. 133-177.

38. Осколков, А.П.О нестационарных течениях вязкоупругих жидкостей / А.П. Осколков// // Труды матем. ин-та АН СССР, 1983. – N 159. С. 101-130.

39. Осколков, А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и Олдройта/ А.П. Осколков // Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1988. – Т. 179. – С. 126-164.

40. Осколков, А.П. Нелокальные проблемы для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С.Л. Соболева/ А.П. Осколков// Записки научн. семин. ЛОМИ, 1991.– Т. 198. – С. 31-48.

41. Осколков, А.П. Об одной квазилинейной параболической системе с малым параметром, аппроксимирующей систему Навье–Стокса/ А.П. Осколков // Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1971. – Т. 21. – С. 79-103.

42. Осколков, А.П. Об уравнениях движения линейных вязкоупругих жидкостей и уравнениях фильтрации жидкостей с запаздыванием / А.П. Осколков, М. М. Ахматов, А. А. Котсиолис // Зап. науч. семин. ЛОМИ АН СССР, 1987. – Т. 163. – С. 132-136.

43. Петровский, И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными/ И.Г. Петровский. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.

44. Свешников, Г.А. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешниоков, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 736 с.

45. Свиридюк, Г.А. Аналитические полугруппы с ядрами и линейные уравнения типа Соболева / Г.А.Свиридюк, В.Е.Федоров // Сиб. матем. журн, 1995. – Т. 36, N 5. – С. 1130-1145.

46. Свиридюк Г.А. Задача Коши для линейного сингулярного операторного уравнения типа Соболева /Г.А. Свиридюк// Дифференц. уравнения, 1987.– Т. 23, N 12.– С. 2168-2171.

47. Свиридюк, Г.А., Сукачева Т.Г.Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева // Сиб. мат. журн., 1990. – Т. 31, N 5. – С. 109-119.

48. Свиридюк, Г.А. Исследование полулинейных уравнений типа Соболева в банаховых пространствах: дис. ... докт. физ.-матем. наук / Г.А.Свиридюк; ЧелГУ. – Челябинск, 1993. – 213 с.

49. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи матем. наук, 1994. – Т. 49, N 4. – С. 47-74.

50. Свиридюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А.Свиридюк // Изв. РАН. Сер. матем., 1993. – Т. 57, N 3. – С. 192-207.

51. Свиридюк, Г.А. Линейные уравнения соболевского типа / Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров. – Челябинск: ЧелГУ. – 2003. – 179 с.

52. Свиридюк, Г.А. Линейные уравнения типа Соболева и сильно непрерывные полугруппы разрешающих операторов с ядрами / Г.А.Свиридюк// Докл. РАН, 1994. – Т. 337, N 5. – С. 581-584.

53. Свиридюк, Г.А. Многообразие решений одного сингулярного псевдопараболического уравнения / Г.А. Свиридюк // ДАН СССР, 1986. – Т. 289. – N 6. – С. 1315-1318.

54. Свиридюк, Г.А.Об одной модели слабосжимаемой вязкоупругой жидкости // Изв. вузов. Математика, 1994. – N 1. – С. 62-70.

55. Свиридюк, Г.А. О единицах аналитических полугрупп ператоров с ядрами / Г.А.Свиридюк, В.Е.Федоров // Сиб. матем. журн., 1999. – Т. 40, N 3. – С. 604-616.

56. Свиридюк Г.А. Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно секториальными операторами / Г.А.Свиридюк // Докл. РАН, 1993. – Т. 329, N 3. – С. 274-277.

57. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, В.О. Казак // Матем. заметки, 2002. – Т. 71, N 2. – С. 292-297.

58. Свиридюк, Г.А., Сукачева Т.Г. Фазовые пространства одного класса операторных уравнений/ Г.А.Свиридюк // Дифференц. уравнения, 1990. Т. 26. N 2. С. 250–258.

59. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство задачи Коши-Дирихле для одного неклассического уравнения / Г.А. Свиридюк, А.В. Анкудинов //Дифференц. уравнения, 2003. – Т. 39, N 11. – С. 1556-1561.

60. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство задачи Коши-Дирихле для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Изв. вузов. Математика, 2003. – N 9. – С. 36-41.

61. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова / Г.А. Свиридюк, М.М. Якупов // Дифференц. уравн., 1996. – Т. 32, N 11. – С. 1538-1543.

62. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором / Г.А.Свиридюк // Алгебра и анализ, 1994. – Т. 6, N 5. – С. 216-237.

63. Свиридюк, Г.А. Число Деборы и один класс полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А.Свиридюк, Т.А.Бокарева // ДАН, 1991. – Т. 319, N 5. – С. 1082-1086.

64. Сидоров, Н. А. О применении некоторых результатов теории ветвлений при решении дифференциальных уравнений с вырождением / Н.А. Сидоров, О.А. Романов// Дифференц. уравнения, 1983. – Т. 19, N 9. – С. 1516-1526.

65. Сидоров, Н. А. Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной / Н.А. Сидоров, М. В. Фалалеев // Дифференц. уравнения, 1987. – Т. 23, N 4. – С. 726-728.

66. Соболев, С.Л. Об одной новой задаче математической физики/С.Л. Соболев// Изв. АН СССР, сер. матем., 1954. – Т. 18. – С. 3-50.

67. Сукачева, Т.Г.Исследование математических моделей несжимаемых вязкоупругих жидкостей: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Великий Новгород, 2004. – 249 с.

68. Сукачева, Т.Г. Исследование фазовых пространств полулинейных сингулярных уравнений динамического типа: дис. ... канд. физ.-мат. наук/ Т.Г. Сукачева; НГПИ. – Новгород. – 1990. – 112 с.

69. Сукачева, Т.Г. Фазовое пространство одной задачи магнитогидродинамики / Т.Г. Сукачева, А.О. Кондюков // Дифференциальные уравнения, 2015. – Т. 51, N 4. – С. 495-501.

70. Сукачева, Т.Г. Фазовое пространство начально- краевой задачи для системы Осколкова ненулевого порядка / Т.Г. Сукачева, А.О. Кондюков // Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики, 2015, – Т. 55, N 5. – С. 823-829.

71. Темам, Р. Уравнение Навье–Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам М., 1981.

72. Федоров, В.Е. Исследование разрешающих полугрупп линейных уравнений типа Соболева: дис. ... канд. физ.-мат наук / В.Е. Федоров; ЧелГУ. – Челябинск, 1996. – 116 с.

73. Федоров, В.Е. Исследование разрешающих полугрупп линейных уравнений соболевского типа в банаховых и локально выпуклых пространствах: дис. ... д-ра физ. - мат. наук / В.Е. Федоров. – Челябинск, 2005. – 271 с.

74. Хенри, Д. Геомерическая теория полулинейных параболических уравнений /Д. Хенри – М: Мир, 1985.

75. Хилле, Е. Функциональный анализ и полугруппы / Е.Хилле, Р.С.Филлипс . – М.: ИЛ, 1962. – 829 с.

76. Якупов, М.М. Фазовые пространства некоторых задач гидродинамики: дис. ... канд. физ. - мат. наук / М.М. Якупов. – Челябинск, 1999. – 83 с.

77. Chen, F. On the differential system governing fluids in magnetic field with data in L^p / F. Chen , P. Wang, C. Qu // Internat. J. Math. & Math. Sci., 1998. – V. 21, – N 2. – P. 299–306.

78. Coleman, B.D. Instability, uniqness and nonexistance theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xxt}$ on a strip / B.D. Coleman, R.J. Duffin, V.J. Mizel // Arch. Rat. Mech. Anal., 1965. – V. 19. – P. 100-116.

79. Demidenko, G.V. L_p-theory of boundary value problems for Sobolev type equations/G.V. Demidenko// Part. Diff. Eq. Banach center publ. - Warzava. – V. 27. – 1991. – P. 101-109.

80. Favini A. Degenerate differential equations in Banach spaces/ A. Favini, A. Yagi. - New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 1998. – 336 p.

81. Favini A. Sobolev type equations/A. Favini// Part. Diff. Eq. Banach center publ. - Warzava. – V. 27. – 1991.- P. 101-109.

82. Hide R. On planetary atmospheres and interiors/R.Hide – Mathematical Problems in the Geophisical Sciences, 1, W.H.Raid, ed. Am. Math. Soc., Providence R.I., 1971.

83. Kadchenko, S.I. Numerical study of a flow of viscoelastic fluid of Kelvin-Voigt having zero order in a magnetic field / S.I. Kadchenko, A.O. Kondyukov //

Jurnal of Computational and Engineering Mathematics, 2016. – V. 3, N 2. – P. 40-47.

84. Lightbourne, J.H.A. Partial functional equations of Sobolev type /J.H.A. Lightbourne// J. Math. Anal. Appl., 1983. – V. 93, N 2. – P. 328-337.

85. Levine, H.A. Some nonexistance and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Du_t = -Au + F(u)$ / H.A. Levine // Arch. Rat. Mech. Anal.,1973. – V. 51, N 5. – P. 371-386.

86. Poincare, H. Sur l'equilibre d'une masse fluid anime d'un mouvement de rotation / H. Poincare // Acta Mathematica, 1885. – V. 7. – P. 259-380.

87. Sidorov, N. Lyapunov-Shmidt methods in nonlinear analisis and applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinithyn, M. Falaleev. – Dotrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2002.

88. Showalter, R.E.Hilbert space methods for partial differential equations / R. E. Showalter. – London; San Francisco; Melbourn: Pitman, 1977. – 219 p.

89. Showalter, R.E. Partial differential equations of Sobolev-Galpern type /R. E. Showalter // Pacific J. Math., 1963. – V. 31, N 3. – P. 787-794.

90. Showalter, R.E. The Sobolev type equations. I (II)/R.E. Showalter// Appl. Anal., 1975. – V.5, N 1. – P. 15-22, (N 2.–P. 81–89).

91. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht: VSP, 2003. – 228 p.

92. Сукачева, Т.Г. Об одной модели движения несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-фойгта ненулевого порядка/Т.Г. Сукачева/ Дифференц. уравнения, 1997. – Т. 33, N 4. – С. 552-557.

93. Сукачева, Т.Г. О разрешимости нестационарной задачи динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта ненулевого порядка/ Т.Г. Сукачева/ Изв. вузов. Матем.,1998. N 3 (430). – С. 47-54.

94. Сукачева, Т.Г. О разрешимости нестационарной задачи термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости / Т.Г. Сукачева// Дифференц. уравн., 2000. – Т. 36, N 8. – С. 1106-1112.

95. Kondyukov, A.O. Computational Experiment for a Class of Mathematical Models of Magnetohydrodynamics / A.O. Kondyukov, T.G. Sukacheva, S.I. Kadchenko, L.S. Ryazanova // Вестник ЮУрГУ. Серия: Мат. моделирование и программирование, 2017. – Т. 10, N 1. – С. 149-155.

96. Кондюков,А.О. Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова высшего порядка / А.О. Кондюков, Т.Г. Сукачева //Вестник ЮУрГУ. Серия “Математическое моделирование и программирование”, 2018. – Т. 11. N 4. – С. 67-77.

97. Kondyukov, A.O. A Non-stationary Model of the Incompressible Viscoelastic Kelvin-Voigt Fluid of Non-zero Order in the Magnetic Field of the Earth /A.O. Kondyukov, T.G. Sukacheva/ // Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS), 2019. – vol. 12, N 3. – P. 42–51.