УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmp190213

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛОВ В КРИСТАЛЛИЧЕСКОМ ПОЛУПРОВОДНИКЕ

***Н.А. Манакова*[1], *К.В. Васючкова*[1]**
[1]Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск,
Российская Федерация

Статья посвящена исследованию задачи Коши для одной математической модели распределения потенциалов в кристаллическом полупроводнике. Под полупроводником мы будем понимать вещества, обладающие конечной электропроводностью, быстро возрастающей с ростом температуры. Математическая модель распределения потенциалов строится на основе полулинейного уравнения соболевского типа, дополненного условиями Дирихле и Коши. Строятся условия существования решения исследуемой модели на основе метода фазового пространства. Приводятся условия продолжимости решения по времени.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа; математическая модель распределения потенциалов в кристаллическом полупроводнике; метод фазового пространства; квазистационарные полутраектории.

К 60-летию со дня рождения
выдающегося математика Яцека Банасяка.

Введение

На современном этапе развития полупроводниковой промышленности не теряет своей важности изучение физики полупроводников. Главная особенность полупроводников заключается в том, что их электропроводность резко увеличивается с повышением температуры. Математическое моделирование играет важную роль в исследованиях данных процессов, так как проведение реальных натурных экспериментов требует больших финансовых, трудовых и иных затрат (в некоторых случаях проведение натурных экспериментов невозможно, так как нет возможности контролировать отдельные параметры) [1–3]. Многие процессы, протекающие в веществах полупроводникового типа, можно описать дифференциальными уравнениями, неразрешенными относительно старшей производной по времени. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Математическая модель распространения потенциалов в кристаллическом полупроводнике может быть описана задачей Коши – Дирихле для неклассического уравнения в частных производных:

- фазовая переменная $x \in C^k(0,T;\mathfrak{M})$ является решением нелинейного уравнения соболевского типа

$$(\lambda - \Delta)x_t - a_1\Delta x - a_2\mathrm{div}(|\nabla x|^2\nabla x) + a_3|x|^{p-2}x = f, \quad p \geq 2, \tag{1}$$

  где функция $x = x(s,t)$ описывает потенциал электрического поля, заданная функция $f = f(s,t)$ характеризует внешнее воздействие, например, внешнее электрическое поле, параметры $\lambda \in \mathbb{R},\ a_1\ a_2 \in \mathbb{R}, a_3 \in \{0\} \cup \mathbb{R}_+$;

- удовлетворяет начальному условию Коши
$$x(s,0) = x_0(s), \quad s \in \Omega; \tag{2}$$
- удовлетворяет краевому условию Дирихле
$$x(s,t) = 0, \quad (s,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+. \tag{3}$$

Уравнение (1) является многомерным обобщением модельных одномерных уравнений, описывающих волны малой частоты и длинноволнового характера, уравнениями данного типа описываются также «дрейфовые» волны в плазме, возникновение которых вызвано различными факторами. Так как в плазме и в полупроводниках возникают взаимодействия заряженных частиц посредством электромагнитного поля, то данные взаимодействия схожи по своей природе и поэтому явления, наблюдаемые при этих процессах, описываются уравнениями одного типа. Математическая модель физического процесса распределения потенциалов в полукристаллическом полупроводнике представлена в работе [4]. Причем, в случае $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$ было показано, что при наличии источников тока свободных зарядов или отрицательности дифференциальной проводимости существует пробой полупроводников (вследствие того, что потенциальная энергия системы превосходит кинетическую).

Уравнение (1) относится к классу полулинейных уравнений соболевского типа. Одним из основных методов изучения уравнений данного типа является метод фазового пространства, который впервые был предложен Г.А. Свиридюком в работе [5]. В дальнейшем такой подход к исследованию полулинейных уравнений соболевского типа был применен при исследованиях различных моделей математической физики [6–8]. Согласно методу фазового пространства сначала строится множество $\mathfrak{M}$ всех допустимых начальных значений x_0 (т.е. множество, состоящее из векторов, для которых существует локальное (единственное) решение задачи Коши). Фазовое пространство определяется как замыкание множества $\mathfrak{M}$. Затем находятся такие условия, при которых фазовое пространство является простым банаховым многообразием, а исходное уравнение соболевского типа в данной окрестности редуцируется к регулярному уравнению вида $\dot{u} = F(u)$. Существование однозначного локального решения задачи Коши для получившегося регулярного уравнения является следствием классической теоремы, описанной в [9].

Целью нашей работы является построение условий, при которых фазовое пространство $\mathfrak{M}$ уравнения (1) является простым банаховым многообразием. Напомним, что банахово многообразие называется простым, если его атлас эквивалентен атласу, содержащему одну карту. Ограничимся рассмотрением решений задачи (1) – (3), определенных только на $\mathfrak{M}$. Такие решения будем называть квазистационарными полутраекториями [10] (т.е. траекториями, которые проходят через точку x_0 и лежат поточечно в фазовом пространстве $\mathfrak{M}$). В работе получены условия существования квазистационарной полутраектории уравнения (1) и продолжимости локального решения по времени.

1. Построение математической модели

Рассмотрим функциональные пространства $\mathfrak{N} = \overset{\circ}{W}{}^1_4(\Omega)$, $\mathfrak{B} = L_p(\Omega)$, $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$, определенные в области Ω. Через $\mathfrak{B}^*$ и $\mathfrak{N}^*$ обозначим сопряженные пространства к $\mathfrak{B}$

и $\mathfrak{N}$ относительно скалярного произведения $< \cdot,\cdot >$ в $\mathcal{H}$ соответственно. Если $n > 2$ и $2 \leq p \leq 2 + \dfrac{4}{n-2}$ в силу теоремы Соболева имеют место плотные и непрерывные вложения

$$\mathfrak{N} \hookrightarrow \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}^* \hookrightarrow \mathfrak{N}^*. \tag{4}$$

Определим в $\mathcal{H}$ скалярное произведение формулой $< x, y >= \int\limits_\Omega xyds, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$. Операторы L, M, N_1, N_2 определим следующим образом:

$$< Lx, y >= \int\limits_\Omega (\lambda xy + \nabla x \cdot \nabla y)ds, \quad \forall x, y \in \mathfrak{N},$$

$$< Mx, y >= -a_1 \int\limits_\Omega \nabla x \cdot \nabla yds, \quad \forall x, y \in \mathfrak{N},$$

$$< N_1(x), y >= -a_2 \int\limits_\Omega |\nabla x|^2 \nabla x \cdot \nabla yds, \quad \forall x, y \in \mathfrak{N},$$

$$< N_2(x), y >= -a_3 \int\limits_\Omega |x|^{p-2} xyds, \quad \forall x, y \in \mathfrak{B}.$$

По построению операторов и с учетом выбора функциональных пространств задача (1) – (3) редуцируется к задаче Коши

$$x(0) = x_0 \tag{5}$$

для абстрактного полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{x} = Mx + N_1(x) + N_2(x) + f, \quad \ker L \neq \{0\}. \tag{6}$$

Обозначим через $\{\varphi_k\}$ последовательность собственных функций однородной задачи Дирихле для оператора $(-\Delta)$ в области Ω, а через $\{\lambda_k\}$ – соответствующую им последовательность собственных значений, занумерованную по неубыванию с учетом кратности. Система собственных векторов $\{\varphi_k\}$ образует базис в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и в пространствах $\mathfrak{N}$, $\mathcal{H}$ в силу вложений (4). Тогда $\ker L = \text{span}\{\varphi_1, ..., \varphi_l\}$, где $\{\varphi_1, ..., \varphi_l\}$ – собственные векторы, соответствующие λ_1, в случае $\lambda = \lambda_1$.

Замечание 1. В дальнейшем мы будем рассматривать диссипативные и p-коэрцитивные операторы. Оператор N_2 называется диссипативным, если $< N_2(x) - N_2(y), x - y > \leq 0, \quad \forall x, y \in \mathfrak{B}$. Причем, диссипативность оператора N_2 эквивалентна монотонности оператора $(-N_2)$. Заметим также, что из s-монотонности (т.е. $< -N'_{2x}y, y > \geq 0 \ \ \forall x, y \in \mathfrak{B}$) оператора $(-N_2)$ вытекает его строгая монотонность [11] и, как следствие, диссипативность.

Оператор N_2 называется p-коэрцитивным [11], если $\exists\, C_{N_2}, C^{N_2}$ и $\exists\, p \geq 2$ такие, что $< N_2(x), x > \geq C_{N_2} \parallel x \parallel^p$ и $\parallel N_2(x) \parallel_* \leq C^{N_2} \parallel x \parallel^{p-1} \ \ \forall x \in \mathfrak{B}$. Следует отметить, что из p-коэрцитивности оператора вытекает его сильная коэрцитивность.

Лемма 1. *(i) При всех $\lambda \geq -\lambda_1$ оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^*)$ самосопряженный, фредгольмов и неотрицательно определенный.*
(ii) При всех $a_1 \in \mathbb{R}_+$ оператор $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^*)$ диссипативный, а оператор $(-M)$ 2-коэрцитивный.

(iii) При всех $a_2, a_3 \in \mathbb{R}_+$ оператор $N_1 \in C^\infty(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^*)$ диссипативный, а оператор $(-N_1)$ 4-коэрцитивный. Оператор $N_2 \in C^\infty(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^*)$ диссипативный, а оператор $(-N_2)$ p-коэрцитивный.

Доказательство. Утверждение (i) является классическим результатом, так как

$$|< Ly, y >| = \Big| \int_\Omega (\lambda y^2 + \nabla y \cdot \nabla y)\, ds \Big| \leq |\, \lambda \,| \cdot \| \, y \, \|^2_{L_2(\Omega)} + \| \, y \, \|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)} \leq C \, \| \, y \, \|^2_{\mathfrak{N}}, \quad \forall y \in \mathfrak{N}.$$

В утверждении (ii) диссипативность оператора $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^*)$ является следствием s-монотонности оператора $(-M)$:

$$< -M_x' y, y >= a_1 \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla y \, ds > 0, \quad \forall x, y \in \mathfrak{N}, \quad x, y \neq 0,$$

кроме того, в работе [11] была получена 2-коэрцитивность оператора $(-M)$.
(iii) Диссипативность операторов N_1 и N_2 является следствием s-монотонности операторов $(-N_1)$, $(-N_2)$ соответственно:

$$< -N_{1x}' y, y >= a_2 \int_\Omega \left[2(\nabla x \cdot \nabla y)^2 + |\nabla x|^2 \nabla y \cdot \nabla y \right] ds > 0, \quad \forall x, y \in \mathfrak{N}, \quad x, y \neq 0,$$

$$< -N_{2x}' y, y >= a_3(p-1) \int_\Omega |x|^{p-2} y^2 \, ds > 0, \quad \forall x, y \in \mathfrak{B}, \quad x, y \neq 0.$$

Кроме того, оператор $(-N_1)$ является 4-коэрцитивным, так как

$$< N_1(x), x >= a_2 \int_\Omega |\nabla x|^2 \nabla x \cdot \nabla x \, ds = a_2 \, \| \, x \, \|^4_{\mathfrak{N}}, \quad \forall x \in \mathfrak{N}.$$

В [11] показана p-коэрцитивность оператора $(-N_2)$. $\square$

2. Исследование фазового пространства

В силу самосопряженности и фредгольмовости оператора L отождествим $\mathfrak{N} \supset \ker L \equiv \operatorname{coker} L \subset \mathfrak{N}^*$, тогда $\mathfrak{N}^* = \operatorname{coker} L \oplus \operatorname{im} L$ и $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^0 \oplus \mathfrak{N}^1$, где $\mathfrak{N}^0 = \ker L$, $\mathfrak{N}^1 = \operatorname{coim} L$. Следовательно,

$$\operatorname{im} L = \begin{cases} \mathfrak{N}^*, & \text{если} \ \ \lambda > -\lambda_1, \\ \{x \in \mathfrak{N}^* | < x, \varphi_k >= 0\}, & \text{если} \ \ \lambda = -\lambda_1, \end{cases} \qquad k = \overline{1, l},$$

$$\operatorname{coim} L = \begin{cases} \mathfrak{N}, & \text{если} \ \ \lambda > -\lambda_1, \\ \{x \in \mathfrak{N} | < x, \varphi_k >= 0\}, & \text{если} \ \ \lambda = -\lambda_1, \end{cases} \qquad k = \overline{1, l}.$$

Построим проектор P в пространстве $\mathfrak{N}$ вдоль $\mathfrak{N}^0$ на $\mathfrak{N}^1$ и проектор Q в пространстве $\mathfrak{N}^*$ вдоль $\operatorname{coker} L$ на $\operatorname{im} L$:

$$P = Q = \begin{cases} I, & \text{если} \ \ \lambda > -\lambda_1, \\ I - < \cdot, \varphi_k >= 0\}, & \text{если} \ \ \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$$

В дальнейшем будем считать, что

$$(I-Q)f \quad \text{не зависит от } t \in (0,T]. \tag{7}$$

Построим множество

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \{x \in \mathfrak{N} : \int\limits_{\Omega}(-a_1\Delta x - a_2\mathrm{div}(|\nabla x|^2\nabla x) + a_3|x|^{p-2}x)\varphi_k ds = \int\limits_{\Omega} f\varphi_k ds\}, & \lambda = -\lambda_1, \\ \mathfrak{N}, \qquad \lambda > -\lambda_1. \end{cases}$$

Определение 1. *Вектор-функцию $x \in C^1((0,T];\mathfrak{N})$, $k \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ назовем решением уравнения (1), если она при некотором $T \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет ему. Решение $x = x(t)$ уравнения (1) назовем решением задачи Коши (1), (2), если оно также удовлетворяет начальному условию (2).*

Замечание 2. Немного отходя от стандарта [10], решение $x = x(t)$ уравнения (1) будем называть *квазистационарной полутраекторией уравнения* (1), если $x(t) \in \mathfrak{M}$ при всех $t \in (0,T]$. Если квазистационарная полутраектория уравнения (1) удовлетворяет условию (3), то она называется квазистационарной полутраекторией уравнения (1), проходящей через точку x_0.

Определение 2. [10] *Пусть точка $x_0 \in \mathfrak{M}$, положим $x_0^1 = Px_0 \in \mathfrak{N}^1$. Множество $\mathfrak{M}$ в точке x_0 является банаховым C^k-многообразием, если существуют окрестности $\mathfrak{O}_0^{\mathfrak{M}} \subset \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{O}_0^1 \subset \mathfrak{N}^1$ точек x_0 и x_0^1 соответственно и C^k-диффеоморфизм $\delta : \mathfrak{O}_0^1 \to \mathfrak{O}_0^{\mathfrak{M}}$ такой, что δ^{-1} равен сужению проектора P на $\mathfrak{O}_0^{\mathfrak{M}}$. Множество $\mathfrak{M}$ называется банаховым C^k-многообразием, моделируемым подпространством $\mathfrak{N}^1$, если оно является банаховым C^k-многообразием в каждой своей точке. Связное банахово C^k-многообразие называется простым, если любой его атлас эквивалентен атласу, содержащему единственную карту.*

Теорема 1. *Пусть $n > 2$, $2 \leq p \leq 2 + \dfrac{4}{n-2}$, $\lambda \geq -\lambda_1$, $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}_+$, и выполнено условие (7), тогда*
(i) множество $\mathfrak{M}$ является простым банаховым C^1-многообразием, моделируемым подпространством $\mathrm{coim}L$;
(ii) существует единственная квазистационарная полутраектория $x \in C^1((0,+\infty);\mathfrak{M})$ уравнения (2), проходящая через точку x_0.

Доказательство. Рассмотрим доказательство утверждения (i). Так как уравнение (1) редуцируется к уравнению соболевского типа (6) и операторы M, N_1 и N_2 удовлетворяют условиям [11, Лемма 1.2], то построенное ранее множество $\mathfrak{M}$ является простым банаховым C^1-многообразием всюду, за исключением, может быть, точки нуль. Идея доказательства основывается на свойствах диссипативности и p-коэрцитивности операторов M, N_1 и N_2, теореме Вишика – Минти – Браудера [12], а также теореме о неявной функции.

Рассмотрим доказательство утверждения (ii). В силу представления пространства $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^0 \oplus \mathfrak{N}^1$ и существования проекторов P и Q любой вектор можно представить в виде $x = x^0 + x^1$, где $(\mathbb{I}-P)x = x^0 \in \mathfrak{N}^0$, а $Px = x^1 \in \mathfrak{N}^1$. Так как оператор L линеен, то

$$Lx = L(x^1 + x^0) = L_1 x^1,$$

где L_1 – сужение оператора L на подпространство $\mathfrak{N}^1$. Пусть $\mathfrak{O}_0^{\mathfrak{M}}$ и $\mathfrak{O}_0^1$ являются окрестностями точек $x_0 \in \mathfrak{M}$ и $x_0^1 \in Px_0$ соответственно. Так как множество $\mathfrak{M}$ в точке x_0 является простым банаховым C^1-многообразием, то существует диффеоморфизм $\delta \in C^1(\mathfrak{O}_0^1; \mathfrak{O}_0^{\mathfrak{M}})$. Следовательно, при каждой фиксированной точке $x^1 \in \mathfrak{O}_0^1$ оператор $\delta'_{x^1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{N}^1; T_x\mathfrak{M})$, где δ'_{x^1} – производная Фреше оператора δ в точке $x^1 \in \mathfrak{O}_0^1$, а $T_x\mathfrak{M}$ – касательное пространство в точке $x = \delta(x^1)$.

В окрестности $\mathfrak{O}_0^0$ уравнение (1) редуцируется к регулярному уравнению $\dot{x} = F(x)$, где $F = \delta'_{x^1} L_1^{-1} Q(M+N_1+N_2) : x \to T_x\mathfrak{M}$, тогда $F \in C^1(\mathfrak{O}_0^{\mathfrak{M}}; T_0\mathfrak{M})$, где $T_0\mathfrak{M}$ – сужение касательного расслоения $T\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{O}_0^{\mathfrak{M}}$. В силу классической теоремы существования единственного решение задачи Коши [9] получим однозначную локальную разрешимость задачи (1) – (3).

Далее необходимо показать, что полученное решение является квазистационарной полутраекторией. Поскольку $x = \delta(x^1)$, то $x(t) \in \mathfrak{M}$ при каждом $t \in (0, T)$. Вектор-функция $x^1(t) = Px(t)$ удовлетворяет уравнению (1), так как $\delta'_{x^1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{N}^1; T_x\mathfrak{M})$ – топлинейный изоморфизм. То есть, если $x = x(t)$ – решение задачи (1) – (3), то $x = x(t)$ – квазистационарная полутраектория уравнения (1), проходящая через точку x_0. Рассмотрим стационарное уравнение

$$My + N_1(y) + N_2(y) + f = 0. \tag{8}$$

В силу теоремы Вишика – Минти – Браудера [12] $\forall f \in \mathfrak{N}^*$ существует единственное решение уравнения (8). Введем в $\operatorname{coim} L$ норму $|u|^2 = \langle Lu, u\rangle$. В силу принципа Куранта эта норма эквивалента норме, индуцированной из надпространства $\mathcal{H}$. Применив свойство диссипативности операторов, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x|^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x-y|^2 \le \langle Mx + N_1(x) + N_2(x) - My + N_1(y) + N_2(y), x - y\rangle \le 0,$$

где $y = y(s)$ – решение уравнения (8), в свою очередь, являющееся стационарным решением уравнения (1), $x = x(s,t)$ – решение уравнения (1). Отсюда, в силу единственности решения задачи Коши (1) – (3), получим продолжимость решения на интервал $(0, +\infty)$. $\square$

Статья выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление № 211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.A03.21.0011.

Литература

1. Al'shin, A.B. Blow-Up in Nonlinear Sobolev Type Equations / A.B. Al'shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov. – Berlin: Walter de Gruyter, 2011.

2. Banasiak, J. Asynchronous Exponential Growth of a General Structured Population Model / J. Banasiak, K. Pichor, R. Rudnicki // Acta Applicandae Mathematicae. – 2012. – V. 119, № 1. – P. 149–166.

3. Banasiak, J. Asymptotic State Lumping in Transport and Diffusion Problems on Networks with Applications to Population Problems / J. Banasiak, A. Falkiewicz, P. Namayanja // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. – 2016. – V. 26, № 2. – P. 215–247.

4. Корпусов, М.О. Трехмерные нелинейные эволюционные уравнения псевдопараболического типа в задачах математической физики / М.О. Корпусов, А.Г. Свешников // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2003. – Т. 43, № 12. – С. 1835–1869.
5. Свиридюк, Г.А. Многообразие решений одного сингулярного псевдопараболического уравнения / Г.А. Свиридюк // ДАН СССР. – 1986. – Т. 289, № 6. – С. 1–31.
6. Манакова, Н.А. Неклассические уравнения математической физики. Фазовые пространства полулинейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова, Г.А. Свиридюк // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика, Механика, Физика. – 2016. – Т. 8, № 3. – С. 31–51.
7. Kondyukov, A.O. Phase Space of the Initial-Boundary Value Problem for the Oskolkov System of Nonzero Order / T.G. Sukacheva, A.O. Kondyukov // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2015. – V. 55, № 5. – P. 823–828.
8. Свиридюк, Г.А. О складке фазового пространства одного неклассического уравнения / Г.А. Свиридюк, А.Ф. Карамова // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41, № 10. – С. 1400–1405.
9. Leng, S. Introduction to Differentiable Manifolds / S. Leng. – New York: Springer, 2002.
10. Свиридюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк // Известия РАН. Серия математическая. – 1994. – Т. 42, № 3. – С. 601–614.
11. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство уравнений типа соболева с s-монотонными и p-коэрцитивными операторами / Г.А. Свиридюк, М.В. Климентьев // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1994. – Т. 38, № 11. – С. 72–79.
12. Гаевский, Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас. – М.: Мир, 1978.

Наталья Александровна Манакова, доктор физико-математических наук, доцент, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), manakovana@susu.ru.

Ксения Владимировна Васючкова, аспирант, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), vasiuchkovakv@susu.ru.

Поступила в редакцию 27 декабря 2018 г.

MSC 60H30 **DOI: 10.14529/mmp190213**

RESEARCH OF ONE MATHEMATICAL MODEL OF THE DISTRIBUTION OF POTENTIALS IN A CRYSTALLINE SEMICONDUCTOR

***N.A. Manakova*[1], *K.V. Vasiuchkova*[1]**
[1] South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation,
E-mails: manakovana@susu.ru, vasiuchkovakv@susu.ru

The article is devoted to the research of the Cauchy problem for a mathematical model of the distribution of potentials in a crystalline semiconductor. By a semiconductor we mean a substance with finite electrical conductivity, which rapidly increases with increase in the temperature. The mathematical model of the distribution of potentials is based on the semilinear Sobolev type equation supplemented by the Dirichlet and Cauchy conditions. We use the phase space method to construct sufficient conditions for the existence of the solution to the model under study. The conditions for the continuability of the solution are given.

Keywords: Sobolev type equations; mathematical model of distribution of potentials in crystalline semiconductor; phase space method; quasi-stationary trajectories.

References

1. Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. *Blow-Up in Nonlinear Sobolev Type Equations.* Berlin, Walter de Gruyter, 2011. DOI:10.1134/S001226610603013X
2. Banasiak J., Pichor K., Rudnicki R. Asynchronous Exponential Growth of a General Structured Population Model. *Acta Applicandae Mathematicae*, 2012, vol. 119, no. 1, pp. 149–166. DOI: 10.1007/s10440-011-9666-y
3. Banasiak J., Falkiewicz A., Namayanya P. Asymptotic State Lumping in Transport and Diffusion Problems on Networks with Applications to Population Problems. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2016, vol. 26, no. 2, pp. 215–247. DOI: 10.1142/S0218202516400017
4. Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. Three-Dimensional Nonlinear Evolution Equations of Pseudoparabolic Type in Problems of Mathematical Physics. II. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2003, vol. 43, no. 12, pp. 1835–1869.
5. Sviridyuk G.A. The Manifold of Solutions of an Operator Singular Pseudoparabolic Equation. *DAN SSSR*, 1986, vol. 289, no. 6, pp. 1–31. (in Russian)
6. Manakova N.A., Sviridyuk G.A. Non-Classical Equations of Mathematical Physics. Phase Spaces of Semilinear Sobolev Equations. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*, 2016, vol. 8, no. 3, pp. 31–51. DOI:10.14529/mmph160304 (in Russian)
7. Kondyukov A.O., Sukacheva T.G. Phase Space of the Initial-Boundary Value Problem for the Oskolkov System of Nonzero Order. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, vol. 55, no. 5, pp. 823–828. DOI:10.1134/S0965542515050127
8. Sviridyuk G.A., Karamova A.F. On the Phase Space Fold of a Nonclassical Equation. *Differential Equation*, 2005, vol. 41, no. 10, pp. 1476–1481. DOI: 10.1007/s10625-005-0300-5
9. Leng S. *Introduction to Differentiable Manifolds.* N.Y., Springer, 2002.
10. Sviridyuk G.A. Quasistationary Trajectories of Semilinear Dynamical Equations of Sobolev Type. *Izvestiya RAN. Seriya Matematicheskaya*, 1994, vol. 42, no. 3, pp. 601–614.
11. Sviridyuk G.A., Klimentev M.V. Phase Spaces of Sobolev-Type Equations with s-Monotone or Strongly Coercive Operators. *Russian Mathematics*, 1994, vol. 38, no 11, pp. 72–79.
12. Gaevskiy H., Zaharias K. *Nichtlineare operatorgleichungen und operatordifferentialgleichungen.* Berlin, Akademie Verlag, 1974. (in German)

Received December 27, 2018