

ДИАГНОСТИКА МГНОВЕННОГО РАЗРУШЕНИЯ РЕШЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ТЕОРИИ ВОЛН В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

М.О. Корпусов¹, А.К. Матвеева¹, Д.В. Лукьяненко¹

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва,
Российская Федерация

В работе рассматривается метод численной диагностики разрушения решения в нелинейном уравнении теории волн в полупроводниках. Особенность рассматриваемой задачи заключается в том, что на положительной полупрямой отсутствует даже локальное во времени слабое решение задачи, в то время как на отрезке от 0 до L существует локальное во времени классическое решение. Нашей задачей являлось численно показать, что при L , стремящемся к бесконечности, время существования решения стремится к нулю. Численная диагностика разрушения решения основана на методике вычисления апостериорной асимптотически точной оценки погрешности полученного численного решения по методике Рундсона.

Ключевые слова: численная диагностика мгновенного разрушения решения.

Введение

В работе [1] было показано, что решение задачи

$$\begin{cases} u_{xt} = |u|^q, & x \in (0, L], \quad t \in (0, T], \\ u(0, t) = 0, & t \in (0, T], \\ u(x, 0) = u_{init}(x), & x \in [0, L], \end{cases} \quad (1)$$

где $q > 0$, класса $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{(1)}[0, L])$ при некоторых условиях на начальную функцию $u_{init}(x)$ разрушается за конечное время $T > 0$ при заданном $L > 0$. С другой стороны, слабое решение задачи на полупрямой $L = +\infty$ разрушается мгновенно в достаточно широком классе начальных функций $u_{init}(x)$. В связи с тем, что получить аналитический результат о мгновенном разрушении решения задачи (1) при $L = +\infty$ для любой начальной функции $u_{init}(x)$ из широкого класса представляется затруднительным, мы предлагаем схему численной диагностики мгновенного разрушения решения и на примере нескольких конкретных начальных функций показываем, как определить, что время разрушения решения классического решения стремится к нулю при стремлении $L \rightarrow +\infty$, что дает основания предполагать наличие факта мгновенного разрушения решения уже в исходной задаче (1) при $L = +\infty$.

1. Численная диагностика разрушения решения

Метод диагностики факта разрушения решения, использованный в настоящей работе, основан на идеях апостериорной оценки точности полученного приближенного численного решения [2, 3]. Сначала мы опишем подход, который мы используем для численного решения задачи (1), а затем кратко опишем методику численной диагностики разрушения решения.

1.1. Поиск численного решения

Для численного решения задачи (1) мы будем использовать метод прямых (SMOL) [4, 5].

Сначала введем квазиравномерную сетку X_N [6] по пространственной переменной x :

$$X_N = \left\{ x_n, 0 \leq n \leq N : x_n \equiv x(\xi_n) = L \frac{e^{c\xi_n} - 1}{e^c - 1}, \xi_n = \frac{n}{N} \right\}, \quad (2)$$

где c — управляющий параметр, определяющий густоту сетки вблизи $x = 0$ (более детально этот вопрос описан в [6], включая описание других преобразований $x(\xi)$, которые порождают квазиравномерные сетки). Выбор неравномерной сетки связан с особенностями модельных решений задачи, которые будут рассмотрены в следующих разделах.

Далее перепишем задачу (1) в узлах введенной квазиравномерной сетки, используя конечно-разностные аппроксимации пространственной производной с первым порядком точности. В результате получим

$$\begin{cases} \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \frac{du_n}{dt} - \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \frac{du_{n-1}}{dt} = |u_n|^q, & n = \overline{1, N}, \quad t \in (0, T], \\ u_0 = 0, & t \in (0, T], \\ u_n(0) = u_{init}(x_n), & n = \overline{0, N}. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $u_n \equiv u_n(t) \equiv u(x_n, t)$, $n = \overline{1, N}$, — неизвестные функции одной переменной t , которые требуется определить.

Полученная дифференциально-алгебраическая система может быть сведена к чисто дифференциальной:

$$\begin{cases} M \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_{init}, \end{cases} \quad (4)$$

где $\mathbf{y} = (u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_N)^T$, $\mathbf{f} = (f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_N)^T$ и $\mathbf{y}_{init} = (u_{init}(x_1) \quad u_{init}(x_2) \quad \dots \quad u_{init}(x_N))^T$, вектор-функция \mathbf{f} имеет компоненты

$$f_n = |y_n|^q,$$

а матрица M имеет следующие ненулевые элементы:

$$M_{n,n} = \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \quad \text{для } n = \overline{1, N},$$

$$M_{n,n-1} = -\frac{1}{x_n - x_{n-1}} \quad \text{для } n = \overline{2, N}.$$

Для численного решения системы (4) введем равномерную сетку T_M по времени t с шагом $\tau = (T - 0)/M$, которая имеет M интервалов: $T_M = \{t_m, 0 \leq m \leq M : t_m = 0 + m\tau\}$. Теперь мы можем применить одностадийную схему Розенброка с

комплексным коэффициентом CROS1 [7] :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t_{m+1}) &= \mathbf{y}(t_m) + (t_{m+1} - t_m) \operatorname{Re} \mathbf{w}, \\ \text{где } \mathbf{w} &\text{ определяется, как решение системы} \\ \left[\mathbf{M} - \frac{1+i}{2} (t_{m+1} - t_m) \mathbf{f}_y(\mathbf{y}(t_m)) \right] \mathbf{w} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}(t_m)). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь \mathbf{f}_u – матрица Якоби, которая со следующими ненулевыми элементами:

$$(f_u)_{n,n} = q|y_n|^{q-1} \operatorname{sign} y_n \quad \text{для } n = \overline{1, N}.$$

1.2. Численная диагностика разрушения решения

Численная диагностика разрушения решения основана на методике выполнения апостериорной асимптотически точной оценки погрешности [2] и впервые была представлена в работах [2, 3, 6]. Далее эти идеи были развиты в [1, 8–14].

Построенный метод решения системы (1) имеет точность $O(\tau^2 + N^{-1})$ в связи с тем, что все пространственные производные в (1) были аппроксимированы с точностью $O(N^{-1})$, а при численном интегрировании системы (4) использовалась схема CROS1 (5), которая имеет точность $O(\tau^2)$.

Для реализации численной диагностики разрушения решения проведем расчеты на базовой сетке $X_N \times T_M: \{x_n, t_m\}, 0 \leq n \leq N, 0 \leq m \leq M$, а затем выполним последовательное сгущение этой сетки и вычислим решения $u^{(r_x^{s-1}N, r_t^{s-1}M)}(x, t)$ на сетках $X_{r_x^{s-1}N} \times T_{r_t^{s-1}M}$ (s – номер сетки). Коэффициенты сгущения сеток r_t и r_x должны быть согласованы как $r_t^p = r_x^q$ (подробности см. в [6]), где $p = 2$ и $q = 1$ – порядки точности по временной и пространственной переменным соответственно. В совпадающих на всех сетках узлах (x, t) можно оценить эффективный порядок точности [3, 6]:

$$p_s^{eff}(x, t) = \log_{r_t} \frac{|u^{(r_x^{s-2}N, r_t^{s-2}M)}(x, t) - u^{(r_x^{s-3}N, r_t^{s-3}M)}(x, t)|}{|u^{(r_x^{s-1}N, r_t^{s-1}M)}(x, t) - u^{(r_x^{s-2}N, r_t^{s-2}M)}(x, t)|}.$$

В точках (x, t) , в которых решение исходной задачи имеет непрерывные вторые производные по времени и первые по пространству, имеет место сходимость

$$p_s^{eff}(x, t) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} p^{theor} = 2, \quad (6)$$

и соответствующая оценка погрешности является асимптотически точной при $s \rightarrow \infty$. Если эта сходимость нарушается, то это свидетельствует о потере гладкости точного решения (в классическом смысле), а именно, в случае наличия факта разрушения приближенного численного решения, эффективный порядок точности принимает отрицательные значения. Момент разрушения решения T_b может быть найден с точностью до величины интервала базовой сетки по времени [3, 6].

2. Численные эксперименты

2.1. Пример 1а

Рассмотрим пример для

$$q = 2, \quad L = 3\pi, \quad u_{init}(x) \equiv \begin{cases} \sin^4 x, & \text{если } x \in [0, \pi], \\ 0, & \text{если } x \in (\pi, L]. \end{cases} \quad (7)$$

Для численного решения задачи (1) мы будем использовать: $T = 4,0$, $N = 50$, $c = 2 \ln 2$, $M = 50$, $r_x = 4$, $r_t = 2$, число последовательно сгущающихся сеток $S = 5$. Численное решение $u^{(r_x^{S-1}N, r_t^{S-1}M)}$ представлено на рис. 1 (отмечены только узлы, совпадающие с узлами базовой сетки $X_N \times T_M$). Необходимо отметить, что численное решение рассматриваемой задачи для набора параметров (7) за счет применения схемы CROS1 существует для всех t_m , $0 \leq m \leq M$, а уход численного решения на бесконечность является мнимым.

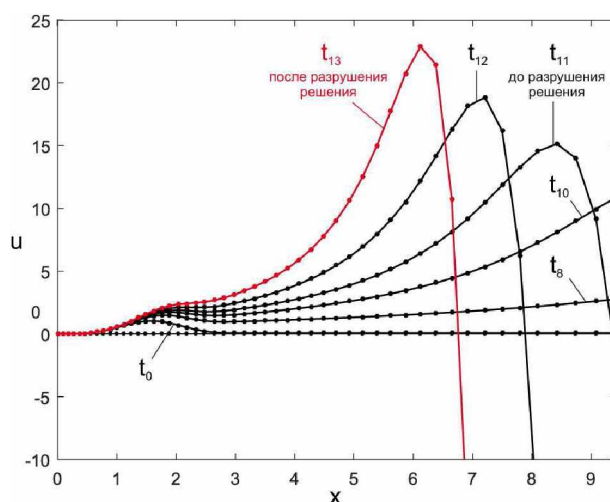


Рис. 1. Пример 1а: численное решение задачи в разные моменты времени

Далее можно проверить сходимость эффективного порядка точности к теоретическому для каждого временного слоя по формуле

$$p_s^{eff}(t_m) = \log_{r_t} \frac{\sqrt{\sum_{n=0}^N (u^{(r_x^{s-2}N, r_t^{s-2}M)}(x_n, t_m) - u^{(r_x^{s-3}N, r_t^{s-3}M)}(x_n, t_m))^2}}{\sqrt{\sum_{n=0}^N (u^{(r_x^{s-1}N, r_t^{s-1}M)}(x_n, t_m) - u^{(r_x^{s-2}N, r_t^{s-2}M)}(x_n, t_m))^2}}. \quad (8)$$

Напомним, что данная оценка может быть сделана только в совпадающих по значениям узлах (x_n, t_m) на разных. После вычислений на S вложенных сетках эффективный порядок точности p_s^{eff} для каждого временного слоя t_m сходится к $p^{theor} = 2$ (см. рис. 2) за исключением временных слоев, соответствующих моментам времени t_m , $m \geq 13$: $p^{eff}(t_{13}) < 0$, что означает, что $T_{bl} \in (t_{11}, t_{13}] \equiv (0, 8, 0, 96]$ является временем разрушения решения.

2.2. Пример 1б

В данном численном эксперименте мы рассматриваем серию задач из *Примера 1а* с набором входных данных (7) для различных значений параметра L с целью определения «предельного» значения L , при которых возникает мгновенное разрушение задачи (1).

Особенность численного алгоритма, реализованная в этом пункте, заключается в том, что при использовании равномерной сетки при увеличении L количество узлов сетки, попадающих на сегмент $x \in [0, \pi]$ будет уменьшаться, соответственно будет

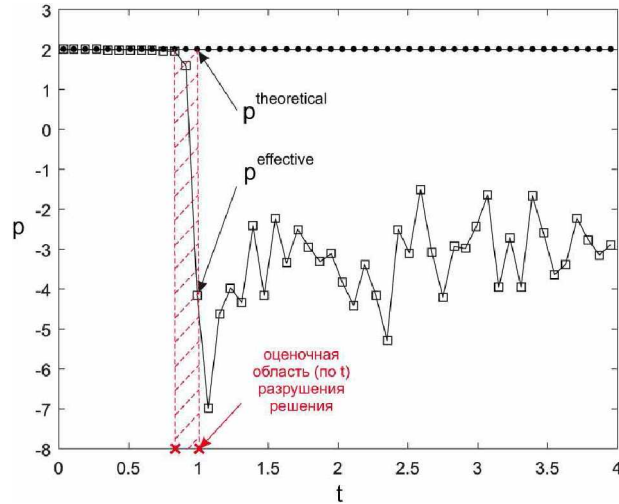


Рис. 2. Пример 1а: эффективный порядок точности численной схемы в каждый момент времени. Разрушение решения диагностировано в момент времени $T_{bl} \in (t_{11}, t_{13}] \equiv (0, 8, 0, 96]$.

уменьшаться и точность результатов. С этим фактом и связан выбор квазиравномерной сетки, введенной в предыдущем разделе.

Для каждого значения L будем выбирать управляющий параметр c таким образом, чтобы в сегмент $x \in [0, \pi]$ попала половина всех узлов сетки (для этого надо, чтобы $\xi = 1/2$ соответствовал узел $x = \pi$). Это требование даст нам следующее соотношение

$$L \frac{e^{0,5c} - 1}{e^c - 1} = \pi, \tag{9}$$

откуда получим:

$$c = 2 \ln \left(\frac{L + \sqrt{L^2 - 4\pi(L - \pi)}}{2\pi} \right). \tag{10}$$

На рис. 3 представлен график зависимости времени разрушения решения данной задачи от параметра L . Видно, что с увеличением L время разрушения решения стремится к нулю. Из этого можно сделать предположение, что решение задачи (1) рассматриваемой на полупрямой ($L \equiv +\infty$) терпит мгновенное разрушение.

2.3. Пример 2а

Теперь рассмотрим пример для следующего набора входных данных:

$$q = 2, \quad L = 5\pi, \quad u_{init}(x) \equiv \begin{cases} \sin^3 x, & \text{если } x \in [0, 2\pi], \\ 0, & \text{если } x \in (2\pi, L]. \end{cases} \tag{11}$$

Для численного решения задачи (1) мы будем использовать: $T = 4, 0$, $N = 50$, $c = 2 \ln 1, 5$, $M = 50$, $r_x = 4$, $r_t = 2$, число последовательно сгущающихся сеток $S = 5$. Численное решение $u^{(r_x^{S-1}N, r_t^{S-1}M)}$ представлено на рис. 4 (отмечены только узлы, совпадающие с узлами базовой сетки $X_N \times T_M$). Еще раз отметим, что численное решение рассматриваемой задачи для набора параметров (11) за счет применения

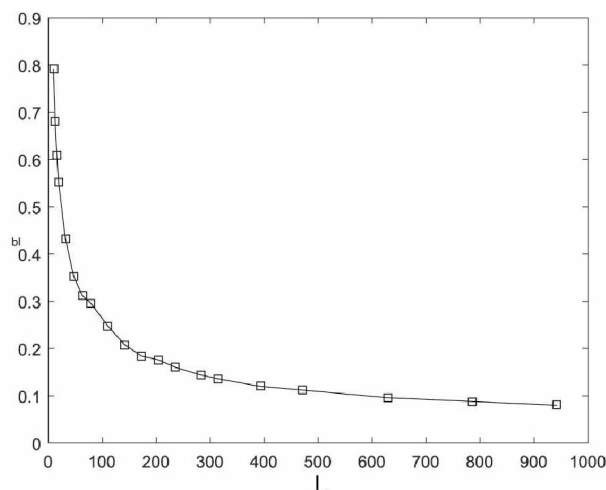


Рис. 3. Пример 1б: график зависимости времени разрушения решения задачи (1) с набором входных данных (7) от размера L области $[0, L]$, на которой ищется решение схемы CROS1 существует для всех $t_m, 0 \leq m \leq M$, а уход численного решения «на бесконечность» для отдельных t_m является мнимым.

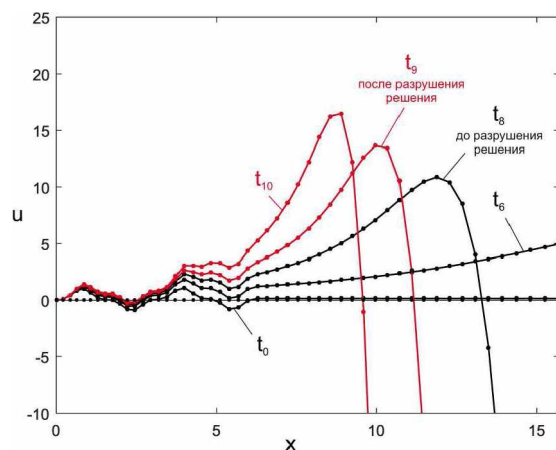


Рис. 4. Пример 2а: численное решение задачи в разные моменты времени

Аналогично *Примеру 1а* можно показать, что эффективный порядок точности p_s^{eff} для каждого временного слоя t_m сходится к $p^{theor} = 2$ (см. рис. 5) за исключением временных слоев, соответствующих моментам времени $t_m, m \geq 9$: $p^{eff}(t_9) < 0$, что означает, что $T_{bl} \in (t_8, t_9] \equiv (0, 64, 0, 72]$ является временем разрушения решения.

2.4. Пример 2б

Аналогично *Примеру 1б* рассмотрим серию задач из *Примера 2а* с набором входных данных (11) для различных значений параметра L с целью определения «предельного» значения L , при которых возникает мгновенное разрушение задачи (1).

На рис. 6 представлен график зависимости времени разрушения решения данной задачи от параметра L . Видно, что с увеличением L время разрушения решения также уменьшается, при этом точки графика хорошо аппроксимируются функцией вида $T_{bl} \sim L^{-a}$, из чего мы делаем предположение о стремлении его к нулю.

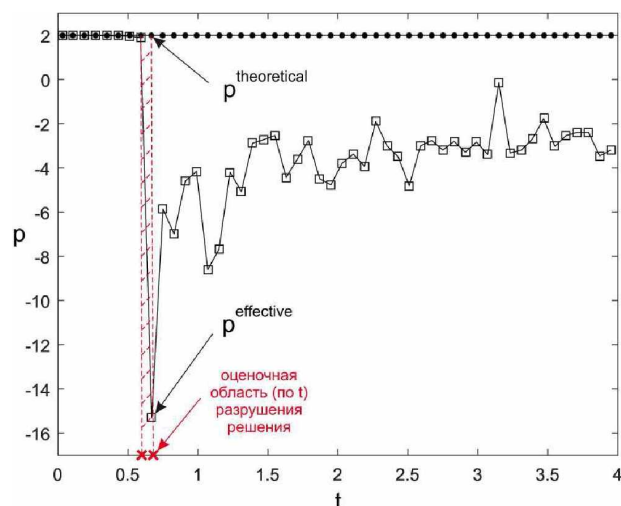


Рис. 5. Пример 1а: эффективный порядок точности численной схемы в каждый момент времени. Разрушение решения диагностировано в момент времени $T_{bl} \in (t_8, t_9] \equiv (0, 64, 0, 72]$

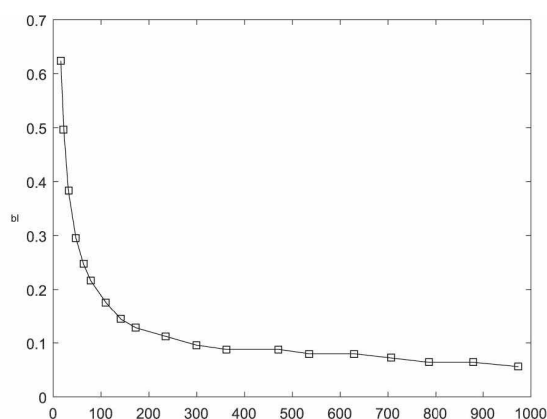


Рис. 6. Пример 1б: график зависимости времени разрушения решения задачи (1) с набором входных данных (11) от размера L области $[0, L]$, на которой ищется решение

Литература

1. Korpusov, M.O. Blow-Up for One Sobolev Problem: Theoretical Approach and Numerical Analysis / M.O. Korpusov, D.V. Lukyanenko, A.A. Panin, E.V. Yushkov // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2016. – V. 442, № 52. – P. 451–468.
2. Al'shin, A.B. Diagnostics of Singularities of Exact Solutions in Computations with Error Control / A.B. Al'shin, N.N. Kalitkin, P.V. Koryakin // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2005. – V. 45, № 19. – P. 1769–1779.
3. Al'shin, A.B. Numerical Diagnosis of Blow-Up of Solutions of Pseudoparabolic Equations / A.B. Al'shin, E.A. Al'shina // Journal of Mathematical Sciences. – 2008. – V. 148, № 1. – P. 143–162.
4. Hairer, E. Solving of Ordinary Differential Equations. Stiff and Differential-Algebraic Problems / E. Hairer, G. Wanner. – Berlin: Springer, 2002.
5. Калиткин, Н.Н. Численные методы решения жестких систем / Н.Н. Калиткин // Математическое моделирование. – 1995. – Т. 7, № 5. – С. 8–11.

6. Калиткин, Н.Н. Вычисления на квазиравномерных сетках / Н.Н. Калиткин, А.Б. Альшин, Е.А. Альшина, Б.В. Рогов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
7. Al'shinn, A.B. Rosenbrock Schemes with Complex Coefficients for Stiff and Differential Algebraic Systems / A.B. Al'shinn, E.A. Al'shina, N.N. Kalitkin, A.B. Koryagina // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2006. – V. 46, № 8. – P. 1320–1340.
8. Korpusov, M.O. Blow-Up Phenomena in the Model of a Space Charge Stratification in Semiconductors: Analytical and Numerical Analysis / M.O. Korpusov, D.V. Lukyanenko, A.A. Panin, E.V. Yushkov // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2017. – V. 40, № 7. – P. 2336–2346.
9. Лукьяненко, Д.В. Разрушение решения уравнения стратификации объемного заряда в полупроводниках: численный анализ при сведении исходного уравнения к дифференциально-алгебраической системе / Д.В. Лукьяненко, А.А. Панин // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. – 2016. – Т. 17, № 1. – С. 437–446.
10. Korpusov, M.O. Local Solvability and Decay of the Solution of an Equation with Quadratic Noncoercive Nonlinearity / M.O. Korpusov, D.V. Lukyanenko, E.A. Ovsyannikov, A.A. Panin // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2017. – Т. 10, № 2. – С. 107–123.
11. Korpusov, M.O. Instantaneous Blow-Up Versus Local Solvability for One Problem of Propagation of Nonlinear Waves in Semiconductors / M.O. Korpusov, D.V. Lukyanenko // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2018. – V. 459, № 1. – P. 159–181.
12. Korpusov, M.O. On the Blow-Up Phenomena for a One-Dimensional Equation of Ion-Sound Waves in a Plasma: Analytical and Numerical Investigation / M.O. Korpusov, D.V. Lukyanenko, A.A. Panin, G.I. Shlyapugin // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2018. – V. 41, № 8. – P. 2906–2929.
13. Korpusov, M.O. On the Blow-Up of Solutions of a Full Non-Linear Equation That Describes Ion-Sound Waves in Plasma with Non-Coercive Non-Linearities / M.O. Korpusov, D.V. Lukyanenko, A.A. Panin, E.V. Yushkov // Известия. Серия: Математика. – 2018. – Т. 82, № 2. – С. 283–317.
14. Korpusov, M.O. Analytic-Numerical Investigation of Combustion in a Nonlinear Medium / M.O. Korpusov, D.V. Lukyanenko, A.D. Nekrasov // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2018. – V. 58, № 9. – P. 1499–1509.

Максим Олегович Корпусов, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математики, физический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (г. Москва, Российская Федерация), korpusov@gmail.com.

Александра Константиновна Матвеева, студент, кафедра математики, физический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (г. Москва, Российская Федерация), matveeva2778@yandex.ru.

Дмитрий Витальевич Лукьяненко, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики, физический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (г. Москва, Российская Федерация), lukyanenko@physics.msu.ru.

Поступила в редакцию 15 июля 2019 г.

**DIAGNOSTICS OF INSTANT DECOMPOSITION OF SOLUTION
IN THE NONLINEAR EQUATION OF THEORY OF WAVES
IN SEMICONDUCTORS**

M.O. Korpusov¹, A.K. Matveeva¹, D.V. Lukyanenko¹

¹Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

E-mails: korpusov@gmail.com, matveeva2778@yandex.ru, lukyanenko@physics.msu.ru

The paper considers a method for numerical diagnostics of the solution's blow-up in a nonlinear equation of the theory of waves in semiconductors. One feature of the problem under consideration is that there is not even a weak local solution to the problem in time on the positive half-line in spatial variable, while there exists a classical solution local in time in the spatial interval from 0 to L . We numerically show that the lifetime of the solution tends to zero as L tends to infinity. The numerical diagnostics of the solution's blow-up is based on the method of calculating a posterior asymptotically accurate estimate of the error of the obtained numerical solution according to the Richardson extrapolation method.

Keywords: numerical diagnostics of instantaneous solution's blow-up.

References

1. Korpusov M.O., Lukyanenko D.V., Panin A.A., Yushkov E.V. Blow-Up for One Sobolev Problem: Theoretical Approach and Numerical Analysis. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2016, vol. 442, no. 52, pp. 451–468. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.04.069
2. Al'shin A.B., Kalitkin N.N., Koryakin P.V. Diagnostics of Singularities of Exact Solutions in Computations with Error Control. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2005, vol. 45, no. 19, pp. 1769–1779.
3. Al'shin A.B., Al'shina E.A. Numerical Diagnosis of Blow-Up of Solutions of Pseudoparabolic Equations. *Journal of Mathematical Sciences*, 2008, vol. 148, no. 1, pp. 143–162. DOI: 10.1007/s10958-007-0542-2
4. Hairer E., Wanner G. *Solving of Ordinary Differential Equations. Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Berlin, Springer, 2002.
5. Kalitkin N.N. [Numerical Methods for Solving Stiff Systems]. *Matematicheskoye modelirovanie*, 1995, vol. 7, no. 5, pp. 8–11. (in Russian)
6. Kalitkin N.N., Al'shin A.B., Al'shina E.A., Rogov B.V. *Vychisleniya na kvaziodnorodnykh setkakh* [Computations on Quasi-Uniform Grids]. Moscow, Fizmatlit. 2005. (in Russian)
7. Al'shinn A.B., Al'shina E.A., Kalitkin N.N., Koryagina A.B. Rosenbrock Schemes with Complex Coefficients for Stiff and Differential Algebraic Systems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2006, vol. 46, no. 8, pp. 1320–1340. DOI: 10.1134/S0965542506080057
8. Korpusov M.O., Lukyanenko D.V., Panin A.A., Yushkov E.V. Blow-Up Phenomena in the Model of a Space Charge Stratification in Semiconductors: Analytical and Numerical Analysis. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2017, vol. 40, no. 7, pp. 2336–2346. DOI: 10.1002/mma.4142
9. Luk'yanenko D.V., Panin A.A. [Destruction of the Solution of the Space Charge Stratification Equation in Semiconductors: Numerical Analysis when Reducing the Initial Equation to a Differential-Algebraic System]. *Computational Methods and Programming: New Computing Technologies*, 2016, vol. 17, no. 1, pp. 437–446. (in Russian)

10. Korpusov M.O., Lukyanenko D.V., Ovsyannikov E.A., Panin A.A. Local Solvability and Decay of the Solution of an Equation with Quadratic Noncoercive Nonlinearity. *Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2017, vol. 10, no. 2, pp. 107–123. DOI: 10.14529/mmp170209
11. Korpusov M.O., Lukyanenko D.V. Instantaneous Blow-Up Versus Local Solvability for One Problem of Propagation of Nonlinear Waves in Semiconductors. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2018, vol. 459, no. 1, pp. 159–181. DOI: 10.1016/j.jmaa.2017.10.062
12. Korpusov M.O., Lukyanenko D.V., Panin A.A., Shlyapugin G.I. On the Blow-Up Phenomena for a One-Dimensional Equation of Ion-Sound Waves in a Plasma: Analytical and Numerical Investigation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2018, vol. 41, no. 8, pp. 2906–2929. DOI: 10.1002/mma.4791
13. Korpusov M.O., Lukyanenko D.V., Panin A.A., Yushkov E.V. On the Blow-Up of Solutions of a Full Non-Linear Equation That Describes Ion-Sound Waves in Plasma with Non-Coercive Non-Linearities. *Izvestiya. Mathematics*, 2018, vol. 82, no. 2, pp. 283–317. DOI: 10.1070/IM8579
14. Korpusov M.O., Lukyanenko D.V., Nekrasov A.D. Analytic-Numerical Investigation of Combustion in a Nonlinear Medium. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2018, vol. 58, no. 9, pp. 1499–1509. DOI: 10.1134/S0965542518090105

Received July 15, 2019