Математика

УДК 517.44: 519.64:519.21 DOI: 10.14529/mmph190101

УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ СО СЛУЧАЙНЫМИ ДАННЫМИ

В.И. Заляпин, Е.В. Харитонова
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: zaliapinvi@susu.ru

Обсуждается возможность использования преобразования Лапласа для решения интегральных уравнений типа свертки с неточно известными исходными данными. В предположении, что ошибки измерений могут быть описаны стационарным случайным процессом с нулевым средним (отсутствие систематических ошибок измерения) и известной корреляционной функцией, получены основные характеристики погрешности восстанавливаемого сигнала. Продемонстрировано, что численная реализация метода Лапласа технически значительно усложняет процедуру регуляризации.

Ключевые слова: уравнения типа свертки; преобразование Лапласа; регуляризация.

Введение

При решении различных прикладных задач, в частности задач теории динамических измерений, часто возникает потребность в решении интегральных уравнений Вольтерры типа свертки:

$$\int_0^t \mathrm{K}(t-\tau)z(\tau)d\tau = u(t)\,. \tag{1}$$

Здесь $z(t)$ – неизвестная функция, $u(t)$ – экспериментально измеренная функция, $K(s)$ – ядро уравнения (1), характеризующее исследуемую линейную систему. Предполагается, что уравнение (1) рассматривается на промежутке времени $[0;T]$, так что упомянутые функции определены для $0 \le t \le T$, $T \le +\infty$.

Хорошо известно (например, [1–3]), что задача решения уравнения (1) с неточно заданной правой частью неустойчива относительно ошибок измерения. Если допустить, что уравнение (1) обладает единственным решением $z_0(t)$ для некоторой правой части $u_0(t)$, то допущенные (может быть, даже малые) отклонения от $u_0(t)$ могут приводить к значительным отклонениям от $z_0(t)$. Подобная неустойчивость к настоящему времени хорошо изучена и предложены различные методы регуляризации (метод А.Н. Тихонова, метод М.М. Лаврентьева, метод В.К. Иванова и др.), позволяющие элиминировать ошибки правой части и минимизировать погрешности вычислительных процедур.

Метод Лапласа

Одним из теоретически эффективных методов решения уравнения (1) является переход из временной в частотную область с помощью преобразования Лапласа ([4]). Если $L[\varphi]$ – преобразование Лапласа функции $\varphi(t)$, определенной на полупрямой $[0;+\infty)$, то в силу теоремы о свертке уравнение (1) перейдет в алгебраическое уравнение:

$$L[\mathrm{u}] = \mathrm{L}[\mathrm{K}]\cdot\mathrm{L}[\mathrm{z}]\,,$$

относительно преобразований Лапласа (изображений) функций $u(t)$, $z(t)$ и $K(s)$, из которого легко находится изображение неизвестной функции. Для определения функции $z(t)$ теперь достаточно по изображению восстановить оригинал, положив:

$$z(t) = \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{L[u]}{L[k]}\right]. \tag{2}$$

Хорошо известно (например, [4]), что преобразование Лапласа функции $\varphi(t)$, такой, что $|\varphi(t)| \le M \exp(s_0 t)$ определено и представляет собой аналитическую функцию в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$. При этом, если $\psi(p) = L[\varphi]$, то обращение преобразования Лапласа задается формулой Меллина–Бромвича

$$\varphi(\mathrm{t}) = L^{-1}[\psi] = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\cdot\infty}^{s+i\cdot\infty} \psi(\mathrm{p}) \mathrm{e}^{tp} \mathrm{dp}, \quad s = \operatorname{Re} p > s_0 .$$

Регуляризация

Сам по себе метод Лапласа решения уравнения (1) не решает проблем, связанных с упомянутой выше неустойчивостью. Поэтому прямое использование соотношения (2) не приводит к удовлетворительному результату в ситуации, когда правая часть уравнения (1) известна неточно. Как показывает более тонкий анализ (например, [2]), связано это обстоятельство с наличием у измеряемого сигнала высокочастотных составляющих. Естественным выходом в этой ситуации является подавление высокочастотных составляющих правой части уравнения (1).

Достигается это следующим образом. Пусть $h(\alpha;\mu)$ – функция двух действительных переменных, определенная для всех μ и $\alpha > 0$, такая, что:

1) $\forall\, \alpha, \mu \quad 0 \le h(\alpha, \mu) \le 1;$

2) $h(0;\mu) = 1;$

3) $\exists \lim_{|\mu| \to \infty} h(\alpha;\mu) = 0;$

4) $\exists \lim_{\alpha \to 0} h(\alpha;\mu) = 1$.

Полагая

$$\hat{z}(p) = \frac{L[\mathrm{u}]}{L[\mathrm{K}]} h(\alpha;\mu), \quad \mu = \operatorname{Im} \mathrm{p},$$

рассмотрим

$$z_\alpha(t) = L^{-1}[\hat{\mathrm{z}}] = \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{L[\mathrm{u}]}{L[\mathrm{K}]} h \right].$$

Пусть

$$u(t) = u_0(t) + \Delta u(t).$$

Тогда:

$$L[\mathrm{u}] = \mathrm{L}[\mathrm{u}_0] + \mathrm{L}[\Delta\,\mathrm{u}]$$

и

$$z_\alpha(t) - z_0(t) = L^{-1}\left[\frac{L[\mathrm{u}_0]}{L[\mathrm{K}]} (h-1) \right] + L^{-1}\left[\frac{L[\Delta\,\mathrm{u}]}{L[\mathrm{K}]} h \right]. \tag{3}$$

В этом соотношении первое слагаемое описывает точность замены решения $z_0(t)$ функцией $z_\alpha(t)$ (т.н. *точность регуляризации*), второе – погрешность решения, обусловленную ошибками $\Delta u(t)$ измерения правой части уравнения (1). Можно доказать ([2]), что при $\alpha \to 0$ первое слагаемое стремится к нулю, в то время как второе может неограниченно возрастать. При надлежащем выборе параметра регуляризации α и стабилизирующей функции $h(\alpha;\mu)$ точность замены решения $z_0(t)$ функцией $z_\alpha(t)$ будет иметь тот же порядок, что и ошибки измерения правой части уравнения (1). Заметим, что уклонение $z_\alpha(t)$ от $z_0(t)$ оценивается в соответствии с выбором нормированного пространства, в которое погружены эти функции. Чаще всего рассматриваются пространства $C_{[0;\mathrm{T}]}$, $C^r_{[0;\mathrm{T}]}$, $L_{[0;\mathrm{T}]}$ и $L^2_{[0;\mathrm{T}]}$.

Случайные ошибки измерений

Пусть теперь ошибки $\Delta u(t)$ описываются стационарным случайным процессом $\Delta u(t) = \xi(\mathrm{t})$ с нулевым средним ($M\xi(t) = 0$) и корреляционной функцией $R_\xi(t-\tau)$ ([5]). В этом случае и решение уравнения (1) – случайный процесс (вообще говоря, необязательно стационарный). Разумной мерой уклонения $z_\alpha(t)$ от $z(t)$ в конкретной точке $t \in [0;\mathrm{T}]$ может служить величина дисперсии разности (3) в этой точке:

$$\rho^2(\mathrm{z}_\alpha; z) = M\,|\,z_\alpha - z\,|^2,$$

а мерой уклонения $z_\alpha(t)$ от $z_0(t)$ как элементов функционального пространства – норма функции ρ как функции переменной t в этом пространстве.

Найдем вероятностные характеристики процесса $L[\xi]$. Несложные выкладки дают:

$$ML[\xi] = 0, \quad \mathrm{Cov}\,L[\xi] = \frac{1}{p_1 + \bar{p}_2}(L[R_\xi](p_1) + L[R_\xi](\bar{p}_2)).$$

В частности, рассеяние преобразования Лапласа случайной ошибки измерений описывается дисперсией, даваемой предыдущим соотношением при $p_1 = p_2$:

$$D(L[\xi]) = M\,|\,L[\xi]\,|^2 = \frac{L[R_\xi](p) + L[R_\xi](\bar{p})}{2\,\mathrm{Re}\,p}.$$

Пусть теперь $\Delta(\alpha;t)$ – составляющая погрешности (3), обусловленная ошибками измерения правой части уравнения (1):

$$\Delta(\alpha;t) = L^{-1}\left[\frac{L[\xi]}{L[K]}h(\alpha;\mathrm{Im}\,p)\right].$$

В силу стационарности процесса $\xi(t)$ его преобразование Лапласа представимо в виде:

$$L[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta(dw)}{p - iw}, \quad \mathrm{Re}\,p > s_0,$$

где $\zeta(w)$ – спектральный процесс для $\xi(t)$:

$$M\,|\,\zeta(dw)\,|^2 = dF_\xi(w) = f_\xi(w)dw,$$

а $F_\xi(w)$, $f_\xi(w)$ – спектральная функция и спектральная плотность, соответственно, процесса $\xi(t)$. Применяя формулу Меллина–Бромвича, заключаем, что

$$\Delta(\alpha;t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\alpha(t;w)\zeta(dw),$$

где

$$g_\alpha(t;w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\cdot\infty}^{s+i\cdot\infty} \frac{h(\alpha;\mathrm{Re}\,p)}{L[K](p)(p - iw)}e^{pt}dp, \quad \mathrm{Re}\,p > s_0.$$

Отсюда, дисперсия величины $\Delta(\alpha;t)$ дается соотношением:

$$D\big(\Delta(\alpha;t)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\,g_\alpha(t;w)\,|^2\,dF_\xi(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\,g_\alpha(t;w)\,|^2\,f_\xi(w)dw. \tag{4}$$

Заметим, что:

$$|\,g_\alpha(t;w)\,|^2 \le \frac{e^{2st}}{4\pi^2}\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\,h(\alpha;\mu)\,|}{|\,L[K]\,|}\frac{e^{i\mu t}}{\sqrt{s^2 + (\mu - w)^2}}d\mu\right)^2.$$

Применяя к интегралу в правой части неравенство Коши–Буняковского, получаем неравенство:

$$|\,g_\alpha(t;w)\,|^2 \le \frac{e^{2st}}{4\pi s}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{h(\alpha;\mu)}{L[K]}\right|^2 d\mu,$$

и следующую из него оценку для дисперсии величины $\Delta(\alpha;t)$:

$$D(\Delta(t;\alpha) \le R_\xi(0) \cdot \frac{e^{2st}}{4\pi s} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{h(\alpha;\mu)}{L[K]} \right|^2 d\mu, s > s_0.$$

Замечание о численной реализации

При реализации метода Лапласа для решения уравнения (1) наиболее проблематичным моментом является обращение скорректированного изображения, т.е. вычисление интеграла Меллина–Бромвича. Классические аналитические методы обращения преобразования Лапласа (например, [4, 6]) в реальных прикладных задачах, как правило, неприменимы и возникает необходимость использования численных методов. Достаточно полный обзор возможных численных процедур решения этой задачи представлен, например, в книгах [7, 8].

Следует, однако, заметить, что задача приближенного обращения преобразования Лапласа некорректна и требует регуляризации в той же мере, что и исходная задача решения уравнения (1).

Действительно, если мы хотим по изображению $\psi(p), \mathrm{Re}\, p > s_0$ восстановить оригинал $\varphi(t), t > 0$, то фактически мы ставим задачу решения интегрального уравнения:

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-pt} dt = \psi(p),$$

относительно функции $\varphi(t)$ по заданной (неточно!) функции $\psi(p)$.

Это обстоятельство технически значительно усложняет предложенную процедуру решения уравнения (1) и ориентирует исследователей в прикладных областях на использование для решения уравнения (1) прямых методов регуляризации (метод невязки, метод квазирешений и т.п.), технически более простых в численной реализации, нежели метод Лапласа.

Литература

1. Верлань, А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы и программы. Справочное пособие / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – Киев: Наукова думка, 1986. – 542 с.

2. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1986. – 286 с.

3. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач и её приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М.: Наука, 1978. – 206 с.

4. Диткин, В.А. Операционное исчисление / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М.: Высшая школа, 1975. – 407 с.

5. Гихман, И.И. Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – М.: Наука, 1977. – 567 с.

6. Bateman, H. Tables of integral transforms. Vol. I / H. Bateman, A. Erdelyi. – New York–Toronto–London, McGrawhill, 1954. – 391 p.

7. Рябов, В.М. Численное обращение преобразования Лапласа / В.М. Рябов. – СПб.: Изд. дом Санкт-Петербургского гос. ун-та, 2013. – 185 с.

8. Крылов, В.И. Методы приближенного преобразования Фурье и обращение преобразования Лапласа / В.И. Крылов, Н.С. Скобля. – М.: Наука, 1974. – 223 с.

Поступила в редакцию 22 ноября 2018 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2019, vol. 11, no. 1, pp. 5–9

DOI: 10.14529/mmph190101

EQUATIONS OF CONVOLUTION TYPE WITH RANDOM DATA

V.I. Zalyapin, E.V. Kharitonova
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: zaliapinvi@susu.ru

The possibility of using the Laplace transform to solve integral equations of convolution type with imprecise initial data is being discussed. Theoretically, the possibility of reducing the integral equation to an algebraic equation should greatly simplify the procedure for its solution. However, the measurement errors present in the actual measuring process cause the need to filter the interference in the frequency domain. Assuming that measurement errors can be described with a stationary random process with zero mean (the absence of systematic measurement errors) and a given correlation function, the main characteristics of the error in the signal under regeneration are obtained.

It is shown that technically, numerical implementation of the Laplace method, connected with the restoration of the Laplace original from its image, significantly complicates the procedure of its regularization due to impossibility of using the Mellin–Bromwich inversion formula.

Keywords: equations of convolution type; Laplace transform; regularization.

References

1. Verlan' A.F., Sizikov V.S. *Integral'nye uravneniya: metody, algoritmy i programmy. Spravochnoe posobie* (Integral equations: Methods, algorithms and programs. Reference manual). Kiev, Naukova dumka Publ., 1986, 542 p. (in Russ.).

2. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* (Methods for solving ill-posed problems). Moscow, Nauka Publ., 1986, 286 p. (in Russ.).

3. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineynykh nekorrektnykh zadach i eye prilozheniya* (The theory of linear ill-posed problems and its applications). Moscow, Nauka Publ., 1978, 206 p. (in Russ.).

4. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Operatsionnoe ischislenie* (Operational calculus). Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1975, 407 p. (in Russ.).

5. Gikhman I.I., Skorokhod A.V. *Vvedenie v teoriyu sluchaynykh protsessov* (Introduction to the theory of random processes). Moscow, Nauka Publ., 1977, 567 p. (in Russ.).

6. Bateman H., Erdelyi A. *Tables of integral transforms. Vol. I.* New York–Toronto–London, McGrawhill, 1954, 391 p.

7. Ryabov V.M. *Chislennoe obrashchenie preobrazovaniya Laplasa* (Numerical inversion of the Laplace transform). Sankt-Peterburg, Izd. dom Sankt-Peterburgskogo gos. un-ta Publ., 2013, 185 p. (in Russ.).

8. Krylov V.I., Skoblya N.S. *Metody priblizhennogo preobrazovaniya Fur'e i obrashchenie preobrazovaniya Laplasa* (Methods for the approximate Fourier transform and the inversion of the Laplace transform). Moscow, Nauka Publ., 1974, 223 p. (in Russ.).

Received November 22, 2018