УДК 519.63 DOI: 10.14529/mmph190105

БЫСТРОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А.Л. Ушаков
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: ushakoval@susu.ru

Рассматривается бигармоническое уравнение в области прямоугольной формы, когда краевые условия являются смешанными. Численное решение этой краевой задачи использует итерационную факторизацию на фиктивном продолжении после конечно-разностной аппроксимации решаемой задачи. В конечном итоге все сводится к решению линейных систем алгебраических уравнений, матрицы, которых треугольные с количеством ненулевых элементов в строках три и менее. Если погрешность аппроксимации исходной задачи достаточно мала, то требуемая относительная погрешность используемого итерационного процесса получается в несколько итераций. Разработанный итерационный метод оказывается в этом случае методом, имеющим оптимальную асимптотику по количеству действий в арифметических операциях. Предложенный итерационный метод существенно использует особенности найденной модельной задачи. Такая задача может возникать в методах типа фиктивных компонент, областей, пространств, когда решаются краевые задачи с эллиптическими уравнениями в областях достаточно произвольной формы. Приводится алгоритм при реализации итерационного процесса, когда выбор итерационных параметров производится автоматически при использовании метода минимальных поправок. Указывается критерий остановки процесса при достижении указываемой заранее относительной погрешности. Приведен графический результат вычислительного эксперимента, подтверждающего асимптотическую оптимальность итерационного метода в вычислительных затратах. Разработка метода существенно использует комплексный анализ.

Ключевые слова: фиктивное продолжение; итерационные факторизации.

Введение

Рассматривается бигармоническое уравнение, оно же уравнение Софи Жермен – Лагранжа в прямоугольной области, при однородных условиях шарнирного закрепления на паре смежных сторон прямоугольника и условиях симметрии на паре других смежных сторон этого прямоугольника. Для конечно-разностного аналога этой модельной задачи – системы алгебраических линейных уравнений – указывается факторизованный переобуславливатель, имеющий дважды попеременно треугольный вид. При реализации разрабатываемого итерационного метода выбор итерационных параметров проводится на основе метода минимальных поправок [1]. Исходная краевая задача, например, может получаться при моделировании перемещений у пластин. Предлагаемый метод аналогичен методам типа фиктивных компонент, пространств, но основывается на комплексном анализе.

Непрерывная задача

Исходная задача:

$$\breve{u}_1 \in \breve{Z}_1 : \Lambda(\breve{u}_1, \breve{v}_1) = g_1(\breve{v}_1)\ \forall \breve{v}_1 \in \breve{Z}_1,\ g_1 \in \breve{Z}_1' \qquad (1)$$

где

$$\breve{Z}_1 = \breve{Z}_1(\Omega) = \left\{ \breve{v}_1 \in W_2^2(\Omega) : \breve{v}\big|_{\Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial \breve{v}_1}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma_2} = 0 \right\};$$

пространство Соболева из функций на области прямоугольного вида:

$$\Omega = (0;b_1)\times(0;b_2),\ \text{с}\ \Gamma_1 = \{b_1\}\times(0;b_2)\cup(0;b_1)\times\{b_2\},\ \Gamma_2 = \{0\}\times(0;b_2)\cup(0;b_1)\times\{0\},$$

а

$$\Lambda(\breve{u}_1, \breve{v}_1) = \int\limits_{\Omega} \Delta\breve{u}_1 \Delta\breve{v}_1 d\Omega$$

– билинейная форма, где заданные константы $b_1, b_2 > 0$. Решение задачи (1) существует и единственно [2, 3].

При

$$g_1(\breve{v}_1) = \int_\Omega \breve{f}_1 \breve{v}_1 d\Omega,$$

где $\breve{f}_1$ – заданная функция, суммируемая с квадратом, задача из (1) записывается в виде:

$$\Delta^2 \breve{u}_1 = \breve{f}_1, \ \breve{u}_1\Big|_{\Gamma_1} = \Delta\breve{u}_1\Big|_{\Gamma_1} = 0, \ \frac{\partial \breve{u}_1}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta\breve{u}_1}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma_2} = 0, \quad (2)$$

где $\vec{n}$ – внешняя нормаль на границе области $\partial\Omega$.

Дискретная задача и ее продолжение

Рассматривается линейная система алгебраических уравнений, получаемая при дискретизации (1), (2) на основе метода сумматорных тождеств:

$$\bar{u}_1 \in \mathbb{R}^N : \ \Lambda \bar{u}_1 = \bar{f}_1, \ \bar{f}_1 \in \mathbb{R}^N, \quad (3)$$

здесь векторы:

$$\bar{v}_1 \in \mathbb{R}^N : \ \bar{v}_1 = (v_{1,1}, \ldots, v_{1,N})', \ N = m \cdot n, \ m, \ n \in \mathbb{N},$$

полагается, что

$$v_{1,m(j-1)+i} = v_{1,i,j}, \ i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n,$$

а $v_{1,i,j}$ – значения функций при дискретных аргументах в узлах сетки соответственно:

$$(x_i, y_j) = \big((i-0{,}5)h_1, (j-0{,}5)h_2\big),$$

когда шаги сетки выбираются следующие:

$$h_1 = b_1/(n+0{,}5), \ h_2 = b_2/(n+0{,}5),$$

сетка состоит из узлов указанных выше, а матрица Λ размерности $N \times N$ определяется так:

$$\langle \Lambda \bar{u}_1, \bar{v}_1 \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} ((2u_{1,i,j} - u_{1,i-1,j} - u_{1,i+1,j})h_1^{-2} + (2u_{1,i,j} - u_{1,i,j-1} -$$

$$-u_{1,i,j+1})h_2^{-2})((2v_{1,i,j} - v_{1,i-1,j} - v_{1,i+1,j})h_1^{-2} + (2v_{1,i,j} - v_{1,i,j-1} - v_{1,i,j+1})h_2^{-2})h_1 h_2,$$

$$u_{1,i,n+1} = v_{1,i,n+1} = 0, \ u_{1,i,0} = u_{1,i,1}, \ v_{1,i,0} = v_{1,i,1}, \ i = 1, \ldots, m,$$

$$u_{1,m+1,j} = v_{1,m+1,j} = 0, \ u_{1,0,j} = u_{1,1,j}, \ v_{1,0,j} = v_{1,1,j}, \ j = 1, \ldots, n.$$

Здесь $\langle .,. \rangle$ – скалярное произведение следующего вида:

$$\langle \bar{u}_1, \bar{v}_1 \rangle = \sum_{k=1}^{N} u_{1,k} v_{1,k} h_1 h_2 \quad \forall \bar{u}_1, \bar{v}_1 \in \mathbb{R}^N.$$

Когда функция f_1 непрерывна в области Ω, то можно полагать

$$f_{1,i,j} = f(x_i, y_j), \ i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n.$$

Решение задачи (3) существует и единственно, потому что $A > 0$.

Строим продолжение задачи (3):

$$\vec{u} \in \mathbb{R}^{2N} : \ D\vec{u} = \vec{f}, \ \vec{f} \in \mathbb{R}^{2N}, \ \vec{f}_2 = \vec{0}, \quad (4)$$

когда векторы

$$\vec{v} \in \mathbb{R}^{2N} : \ \vec{v} = (\bar{v}_1', \bar{v}_2')',$$

здесь блочная, верхняя треугольная матрица D размерности $2N \times 2N$ такова, что:

$$D_{11} = \Lambda, \ D_{12} = 0, \ D_{21} = \theta_A, \ D_{22} = M_\theta,$$

и

$$D = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ \theta_A & M_\theta \end{bmatrix},$$

где матрицы

$$\theta_A = A\theta + \theta A\,,\ M_\theta = A^2 - \theta^2\,,\ \theta = \nabla_x{}'\nabla_y - \nabla_y{}'\nabla_x\,,\ A = \nabla_x{}'\nabla_x + \nabla_y{}'\nabla_y\,,$$

матрицы ∇_x, ∇_y с размерностями $N \times N$ определяются так:

$$\left\langle \nabla_x \bar{u}_1, \bar{v}_1 \right\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-(u_{1,i+1,j} - u_{1,i,j})h_1^{-1}v_{1,i,j})h_1h_2,\ u_{1,m+1,j} = v_{1,m+1,j} = 0,\ \ j = 1,\ldots,n,$$

$$\left\langle \nabla_y \bar{u}_1, \bar{v}_1 \right\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-(u_{1,i,j+1} - u_{1,i,j})h_2^{-1}v_{1,i,j})h_1h_2,\ u_{1,i,n+1} = v_{1,i,n+1} = 0,\ \ i = 1,\ldots,m.$$

Вводятся подпространства из векторов в пространстве $\mathbb{R}^{2N}$:

$$\vec{Z}_1 = \left\{ \vec{v} = (\bar{v}_1{}', \bar{v}_2{}')' : \theta_A \bar{v}_1 + M_\theta \bar{v}_2 = \bar{0} \right\},\ \ \vec{Z}_2 = \left\{ \vec{v} = (\bar{v}_1{}', \bar{v}_2{}')' : \bar{v}_1 = \bar{0} \right\}.$$

Лемма 1. *Решение задачи (4) $\vec{u} \in \vec{Z}_1$ существует, единственно.*

Метод итерационных факторизаций при фиктивном продолжении

Дополнительно определяется блочная матрица C размерности $2N \times 2N$, когда

$$C_{11} = C_{22} = M_\theta\,,\ C_{12} = -\theta_A\,,\ C_{21} = \theta_A\,,$$

тогда

$$C = \begin{bmatrix} M_\theta & -\theta_A \\ \theta_A & M_\theta \end{bmatrix}.$$

Чтобы решать задачу (4), предлагается итерационный процесс:

$$\vec{u}^k \in \mathbb{R}^{2N} :\ C(\vec{u}^k - \vec{u}^{k-1}) = -\tau_k (D\vec{u}^{k-1} - \vec{f})\,,\ k \in \mathbb{N}\,,\ \tau_k > 0\,, \forall \vec{u}^0 \in \vec{Z}_1\,. \qquad (5)$$

В итерационном процессе (5) на каждом шаге получается задача с факторизованным оператором такого вида:

$$\bar{U} \in \mathbb{C}^N :\ (LL^*)^2 \bar{U} = \bar{F}\,,\ \bar{F} \in \mathbb{C}^N\,,$$

которая расщепляется на простые задачи

а) $\bar{T} \in \mathbb{C}^N$, $L\bar{T} = \bar{F}$, $\bar{F} \in \mathbb{C}^N$,

б) $\bar{P} \in \mathbb{C}^N$, $L^*\bar{P} = \bar{T}$, $\bar{T} \in \mathbb{C}^N$,

в) $\bar{Q} \in \mathbb{C}^N$, $L\bar{Q} = \bar{P}$, $\bar{P} \in \mathbb{C}^N$,

г) $\bar{U} \in \mathbb{C}^N$, $L^*\bar{U} = \bar{Q}$, $\bar{Q} \in \mathbb{C}^N$,

здесь матрицы:

$$L = \nabla_x{}' - \mathrm{i}\nabla_y{}'\,,\ L^* = \overline{L}' = \nabla_x + \mathrm{i}\nabla_y\,,\ LL^* = (\nabla_x{}' - \mathrm{i}\nabla_y{}')(\nabla_x + \mathrm{i}\nabla_y) = A + \mathrm{i}\theta\,,$$

$$(LL^*)^2 = (A + \mathrm{i}\theta)^2 = M_\theta + \mathrm{i}\theta_A\,,$$

поэтому

$$(M_\theta + \mathrm{i}\theta_A)(\bar{u}_1 + \mathrm{i}\bar{u}_2) = \bar{f}_1 + \mathrm{i}\bar{f}_2$$

или

$$\begin{cases} M_\theta \bar{u}_1 - \theta_A \bar{u}_2 = \bar{f}, & \bar{u}_1 + \mathrm{i}\bar{u}_2 = \bar{U}, \\ \theta_A \bar{u}_1 + M_\theta \bar{u}_2 = \bar{f}_2, & \bar{f}_1 + \mathrm{i}\bar{f}_2 = \bar{F}, \end{cases}$$

тогда на каждом шаге процесса (5) возникает следующая задача:

$$C\vec{u} = \vec{f}\,,\ \vec{u} = (\bar{u}_1', \bar{u}_2')'\,,\ \vec{f} = (\bar{f}_1{}', \bar{f}_2{}')'\,.$$

Вводится норма:

$$\left\| \bar{v}_1 \right\|_\Lambda = \sqrt{\left\langle \Lambda \bar{v}_1, \bar{v}_1 \right\rangle}\,.$$

Теорема 1. *Для итерационного процесса (5) в оценке относительной ошибки:*

$$\left\| \bar{u}_1^{\,k} - \bar{u}_1 \right\|_\Lambda \le \varepsilon_1 \left\| \bar{u}_1^{\,0} - \bar{u}_1 \right\|_\Lambda\,,$$

если τ_k, $k \in \mathbb{N}$ выбирать на основе метода минимальных поправок, то получается, что:

$$\varepsilon_1 \le c\rho^k,\ c\in(0;+\infty),\ \rho\in(0;1).$$

Вывод. По виду матриц L, L^* замечается, что задача (3) с N неизвестными по теореме 1 с помощью итерационного процесса (5) решается при относительной погрешности ε_1 за $O(N\ln\varepsilon_1^{-1})$ арифметических действий. А при довольно малых значениях параметров дискретизации решение требует $O(N)$ операций, а итерационный процесс будет сходиться в несколько итераций и превратится в почти прямой метод.

Алгоритм численного решения модельной задачи для бигармонического уравнения

Решается задача:

$$\Lambda\bar{u}_1 = \bar{f}_1,$$

итерационным процессом (5). При выборе итерационных параметров применяется метод минимальных поправок. Тогда для решаемой задачи в итерационном процессе применяется следующий алгоритм вычислений, где $\vec{\psi}^k = \vec{u}^k - \vec{u}$ – ошибка:

1) выбирается начальное приближение:

$$\vec{u}^0 = \vec{0}\in\vec{Z}_1;$$

2) вычисляется невязка:

$$\vec{r}^{\,k-1}:\bar{r}_1^{k-1} = \Lambda\bar{u}_1^{k-1} - \bar{f}_1,\ \bar{r}_2^{k-1} = \bar{0},\ k\in\mathbb{N};$$

3) ищется поправка:

$$\vec{w}^{k-1}\in\mathbb{R}^{2N}:\ C\vec{w}^{k-1} = \vec{r}^{\,k-1},\ k\in\mathbb{N};$$

4) определяется квадрат нормы ошибки:

$$\mathrm{E}_{k-1} = \left\|\vec{\psi}^{k-1}\right\|^2_{D'C^{-1}D} = \left\langle\vec{r}^{\,k-1},\vec{w}^{k-1}\right\rangle = \left\langle\bar{r}_1^{k-1},\bar{w}_1^{k-1}\right\rangle,\ k\in\mathbb{N};$$

5) ставится условие остановки итераций:

$$\mathrm{E}_{k-1}/\mathrm{E}_1 < \mathrm{E}^2,\ \mathrm{E}\in(0;1),\ k\in\mathbb{N};$$

6) вычисляется дополнительно вектор:

$$\vec{\eta}^{k-1}:\bar{\eta}_1^{k-1} = \Lambda\bar{w}_1^{k-1},\ \bar{\eta}_2^{k-1} = \bar{0},\ k\in\mathbb{N};$$

7) находится дополнительно вектор:

$$\vec{\xi}^{k-1}\in\mathbb{R}^{2N}:\ C\vec{\xi}^{k-1} = \vec{\eta}^{k-1},\ k\in\mathbb{N};$$

8) определяется итерационный параметр:

$$\tau_k = \frac{\left\langle D\vec{w}^{k-1},\vec{w}^{k-1}\right\rangle}{\left\langle C^{-1}D\vec{w}^{k-1},D\vec{w}^{k-1}\right\rangle} = \frac{\left\langle\vec{\eta}^{k-1},\vec{w}^{k-1}\right\rangle}{\left\langle\vec{\xi}^{k-1},\vec{\eta}^{k-1}\right\rangle} = \frac{\left\langle\bar{\eta}_1^{k-1},\bar{w}_1^{k-1}\right\rangle}{\left\langle\bar{\xi}_1^{k-1},\bar{\eta}_1^{k-1}\right\rangle},\ k\in\mathbb{N};$$

9) вычисляется новое приближение:

$$\vec{u}^k = \vec{u}^{k-1} - \tau_k\vec{w}^{k-1},\ k\in\mathbb{N};$$

$\mathrm{E}\in(0;1)$ – задаваемая относительная погрешность.

Программируемый алгоритм численного решения модельной задачи для бигармонического уравнения

Решается задача:

$$\Lambda\bar{u}_1 = \bar{f}_1,$$

которая может записываться в виде:

$$h^4\Lambda\bar{u}_1 = h^4\bar{f}_1$$

или

$$\text{а) } h^2A\bar{u}_1 = \bar{q}_1,\ \text{б) } h^2A\bar{q}_1 = h^4\bar{f}_1,$$

если

$$h_1 = b_1/(m+0{,}5),\ h_2 = b_2/(n+0{,}5),\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n,\ m=n,\ b_1=b_2,\ h=h_1=h_2,$$

итерационным процессом (5). При выборе итерационных параметров применяется метод минимальных поправок. Тогда для решаемой задачи в итерационном процессе программируется приведенный ранее алгоритм вычислений. Решаемая задач получается из разностной схемы, которая записывается в следующем виде:

$$4u_{1,i,j}-u_{1,i-1,j}-u_{1,i+1,j}-u_{1,i,j-1}-u_{1,i,j+1}=q_{1,i,j},\quad i=1,...,m,\ j=1,...,n,$$

где

$$u_{1,m+1,j}=0,\ u_{1,0,j}=u_{1,1,j},\ j=1,...,n,$$

$$u_{1,i,n+1}=0,\ u_{1,i,0}=u_{1,i,1},\ i=1,...,m$$

и

$$4q_{1,i,j}-q_{1,i-1,j}-q_{1,i+1,j}-q_{1,i,j-1}-q_{1,i,j+1}+h^4au_{1,i,j}=h^4f_{1,i,j},\quad i=1,...,m,\ j=1,...,n,$$

где

$$q_{1,m+1,j}=0,\ q_{1,0,j}=q_{1,1,j},\ j=1,...,n,$$

$$q_{1,i,n+1}=0,\ q_{1,i,0}=q_{1,i,1},\ i=1,...,m.$$

1. Выбирается начальное приближение:

$$\vec{u}^0=\vec{0}\in\vec{Z}_1.$$

При программировании элементы массива $u^0_{1,i,j}$ $i,j=0,...,n+1$. Полагается, что $u^0_{1,i,j}=0,\ i,j=1,...,n$.

2. Вычисляется невязка:

$$\vec{r}^{\,k-1}:\overline{r}_1^{k-1}=h^4\Lambda\overline{u}_1^{k-1}-h^4\overline{f}_1,\ \overline{r}_2^{k-1}=\overline{0},\ k\in\mathbb{N},$$

подробнее так:

$$\text{а)}\ \overline{q}_1^{k-1}=h^2A\overline{u}_1^{k-1},\ \text{б)}\ \overline{r}_1^{k-1}=h^2A\overline{q}_1^{k-1}-h^4\overline{f}_1.$$

При программировании полагается, что

$$u^{k-1}_{1,i,n+1}=0,\ u^{k-1}_{1,i,0}=u^{k-1}_{1,i,1},\ i=1,...,n,\quad u^{k-1}_{1,n+1,j}=0,\ u^{k-1}_{1,0,j}=u^{k-1}_{1,1,j},\ j=1,...,n.$$

При программировании $q^{k-1}_{1,i,j}$ $i,j=0,...,n+1$ – элементы массива. Элементы этого массива вычисляются по формуле:

$$\text{а)}\ q^{k-1}_{1,i,j}=4u^{k-1}_{1,i,j}-u^{k-1}_{1,i-1,j}-u^{k-1}_{1,i+1,j}-u^{k-1}_{1,i,j-1}-u^{k-1}_{1,i,j+1},\ i,j=1,...,n,$$

а затем полагается, что

$$q^{k-1}_{1,i,n+1}=0,\ q^{k-1}_{1,i,0}=q^{k-1}_{1,i,1},\ i=1,...,n,\ q^{k-1}_{1,n+1,j}=0,\ q^{k-1}_{1,0,j}=q^{k-1}_{1,1,j},\ j=1,...,n.$$

При программировании $r^{k-1}_{1,i,j}$ $i,j=0,...,n+1$ – элементы массива. Элементы этого массива вычисляются по формуле:

$$\text{б)}\ r^{k-1}_{1,i,j}=4q^{k-1}_{1,i,j}-q^{k-1}_{1,i-1,j}-q^{k-1}_{1,i+1,j}-q^{k-1}_{1,i,j-1}-q^{k-1}_{1,i,j+1}-h^4f^{k-1}_{1,i,j},\ i,j=1,...,n,$$

3. Ищется поправка:

$$\vec{w}^{\,k-1}\in\mathbb{R}^{2N}:\ h^4C\vec{w}^{\,k-1}=\vec{r}^{\,k-1},\ k\in\mathbb{N},$$

что равносильно последовательному решению четырех систем линейных алгебраических уравнений с треугольными матрицами:

$$\text{а)}\ \overline{T}^{k-1}\in\mathbb{C}^N:\ hL\overline{T}^{k-1}=\overline{R}^{k-1},\ \text{б)}\ \overline{P}^{k-1}\in\mathbb{C}^N:\ hL^*\overline{P}^{k-1}=\overline{T}^{k-1}.$$

$$\text{в)}\ \overline{Q}^{k-1}\in\mathbb{C}^N:\ hL\overline{Q}^{k-1}=\overline{P}^{k-1},\ \text{г)}\ \overline{W}^{k-1}\in\mathbb{C}^N:\ hL^*\overline{W}^{k-1}=\overline{Q}^{k-1}.$$

При программировании решения системы из а) будут в массиве с элементами $T^{k-1}_{i,j}$ $i,j=0,...,n+1$. При вычислении элементов этого массива сначала полагается $T^{k-1}_{i,0}=T^{k-1}_{0,j}=0,\ i,j=1,...,n$, а затем вычисляются элементы массива по формуле:

$$T^{k-1}_{i,j}=\left[(1+\mathrm{i})r^{k-1}_{1,i,j}+(1+\mathrm{i})T^{k-1}_{i-1,j}+(1-\mathrm{i})T^{k-1}_{i,j-1}\right]/2,$$

когда индексы принимают последовательно значения $i, j = 1,...,n$.

При программировании решения системы из б) будут в массиве с элементами $P_{i,j}^{k-1}$ $i, j = 0,...,n+1$. При вычислении элементов этого массива сначала полагается $P_{i,n+1}^{k-1} = P_{n+1,j}^{k-1} = 0,\ i, j = 1,...,n$, а затем вычисляются элементы массива по формуле:

$$P_{i,j}^{k-1} = \left[(1-\mathrm{i})T_{i,j}^{k-1} + (1-\mathrm{i})P_{i+1,j}^{k-1} + (1+\mathrm{i})P_{i,j+1}^{k-1}\right]\Big/2,$$

когда индексы принимают последовательно значения $i, j = n,...,1$.

При программировании решения системы из в) будут в массиве с элементами $Q_{i,j}^{k-1}$ $i, j = 0,...,n+1$. При вычислении элементов этого массива сначала полагается $Q_{i,0}^{k-1} = Q_{0,j}^{k-1} = 0,\ i, j = 1,...,n$, а затем вычисляются элементы массива по формуле:

$$Q_{i,j}^{k-1} = \left[(1+\mathrm{i})P_{i,j}^{k-1} + (1+\mathrm{i})Q_{i-1,j}^{k-1} + (1-\mathrm{i})Q_{i,j-1}^{k-1}\right]\Big/2,$$

когда индексы принимают последовательно значения $i, j = 1,...,n$.

При программировании решения системы из г) будут в массиве с элементами $W_{i,j}^{k-1}$ $i, j = 0,...,n+1$. При вычислении элементов этого массива сначала полагается $W_{i,n+1}^{k-1} = W_{n+1,j}^{k-1} = 0,\ i, j = 1,...,n$, а затем вычисляются элементы массива по формуле:

$$W_{i,j}^{k-1} = \left[(1-\mathrm{i})Q_{i,j}^{k-1} + (1-\mathrm{i})W_{i+1,j}^{k-1} + (1+\mathrm{i})W_{i,j+1}^{k-1}\right]\Big/2,$$

когда индексы принимают последовательно значения $i, j = n,...,1$.

4. Определяется квадрат нормы ошибки:

$$\mathrm{E}_{k-1} = \left\|\vec{\psi}^{k-1}\right\|_{D'C^{-1}D}^2 = \left\langle \vec{r}^{k-1}, \vec{w}^{k-1} \right\rangle h^{-2} = \left\langle \overline{r}_1^{k-1}, \overline{w}_1^{k-1} \right\rangle h^{-2},\ k \in \mathbb{N}.$$

При программировании $w_{1,i,j}^{k-1}$ $i, j = 0,...,n+1$ – элементы массива. При вычислениях элементов этого массива полагается:

$$w_{1,i,j}^{k-1} = \mathrm{Re}\, W_{i,j}^{k-1},\ i, j = 1,...,n+1.$$

И

$$\mathrm{E}_{k-1} = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_{1,i,j}^{k-1} w_{1,i,j}^{k-1}\right) h^{-2},\ k \in \mathbb{N}.$$

5. Ставится условие остановки итераций:

$$\mathrm{E}_{k-1}/\mathrm{E}_0 < \mathrm{E}^2,\ \mathrm{E} \in (0;1),\ k \in \mathbb{N},$$

где E – задаваемая величина.

6. Дополнительно вычисляется вектор:

$$\vec{\eta}^{k-1} : \overline{\eta}_1^{k-1} = h^4 \Lambda \overline{w}_1^{k-1},\ \overline{\eta}_2^{k-1} = \overline{0},\ k \in \mathbb{N},$$

подробнее так:

$$\text{а)}\ \overline{q}_1^{k-1} = h^2 A \overline{w}_1^{k-1},\ \text{б)}\ \overline{\eta}_1^{k-1} = h^2 A \overline{q}_1^{k-1}.$$

При программировании полагается, что:

$$w_{1,i,0}^{k-1} = w_{1,i,1}^{k-1},\ i = 1,...,n,\ \ w_{1,0,j}^{k-1} = w_{1,1,j}^{k-1},\ j = 1,...,n.$$

При программировании $q_{1,i,j}^{k-1}$ $i, j = 0,...,n+1$ – элементы массива. Элементы этого массива вычисляются по формуле:

$$\text{а)}\ q_{1,i,j}^{k-1} = 4w_{1,i,j}^{k-1} - w_{1,i-1,j}^{k-1} - w_{1,i+1,j}^{k-1} - w_{1,i,j-1}^{k-1} - w_{1,i,j+1}^{k-1},\ i, j = 1,...,n,$$

а затем полагается, что:

$$q_{1,i,n+1}^{k-1} = 0,\ q_{1,i,0}^{k-1} = q_{1,i,1}^{k-1},\ i = 1,...,n,\ q_{1,n+1,j}^{k-1} = 0,\ q_{1,0,j}^{k-1} = q_{1,1,j}^{k-1},\ j = 1,...,n.$$

При программировании $\eta_{1,i,j}^{k-1}$ $i, j = 0,...,n+1$ – элементы массива. Элементы этого массива вычисляются по формуле:

б) $\eta_{1,i,j}^{k-1} = 4q_{1,i,j}^{k-1} - q_{1,i-1,j}^{k-1} - q_{1,i+1,j}^{k-1} - q_{1,i,j-1}^{k-1} - q_{1,i,j+1}^{k-1}$, $i,j=1,...,n$.

7. Дополнительно находится вектор:

$$\vec{\xi}^{k-1} \in \mathbb{R}^{2N} :\ h^4 C\vec{\xi}^{k-1} = \vec{\eta}^{k-1},\ k \in \mathbb{N},$$

что равносильно последовательному решению четырех систем линейных алгебраических уравнений с треугольными матрицами:

$$\text{а) } \bar{T}^{k-1} \in \mathbb{C}^N :\ hL\bar{T}^{k-1} = \bar{H}^{k-1},\ \text{б) } \bar{P}^{k-1} \in \mathbb{C}^N :\ hL^*\bar{P}^{k-1} = \bar{T}^{k-1}.$$

$$\text{в) } \bar{Q}^{k-1} \in \mathbb{C}^N :\ hL\bar{Q}^{k-1} = \bar{P}^{k-1},\ \text{г) } \bar{\Xi}^{k-1} \in \mathbb{C}^N :\ hL^*\bar{\Xi}^{k-1} = \bar{Q}^{k-1}.$$

При программировании решения системы из а) будут в массиве с элементами $T_{i,j}^{k-1}$ $i,j=0,...,n+1$. При вычислении элементов этого массива сначала полагается $T_{i,0}^{k-1} = T_{0,j}^{k-1} = 0$, $i,j=1,...,n$, а затем вычисляются элементы массива по формуле:

$$T_{i,j}^{k-1} = \left[(1+\mathrm{i})\eta_{1,i,j}^{k-1} + (1+\mathrm{i})T_{i-1,j}^{k-1} + (1-\mathrm{i})T_{i,j-1}^{k-1}\right] / 2,$$

когда индексы принимают последовательно значения $i,j=1,...,n$.

При программировании решения системы из б) будут в массиве с элементами $P_{i,j}^{k-1}$ $i,j=0,...,n+1$. При вычислении элементов этого массива сначала полагается $P_{i,n+1}^{k-1} = P_{n+1,j}^{k-1} = 0$, $i,j=1,...,n$, а затем вычисляются элементы массива по формуле:

$$P_{i,j}^{k-1} = \left[(1-\mathrm{i})T_{i,j}^{k-1} + (1-\mathrm{i})P_{i+1,j}^{k-1} + (1+\mathrm{i})P_{i,j+1}^{k-1}\right] / 2,$$

когда индексы принимают последовательно значения $i,j=n,...,1$.

При программировании решения системы из в) будут в массиве с элементами $Q_{i,j}^{k-1}$ $i,j=0,...,n+1$. При вычислении элементов этого массива сначала полагается $Q_{i,0}^{k-1} = Q_{0,j}^{k-1} = 0$, $i,j=1,...,n$, а затем вычисляются элементы массива по формуле:

$$Q_{i,j}^{k-1} = \left[(1+\mathrm{i})P_{i,j}^{k-1} + (1+\mathrm{i})Q_{i-1,j}^{k-1} + (1-\mathrm{i})Q_{i,j-1}^{k-1}\right] / 2,$$

когда индексы принимают последовательно значения $i,j=1,...,n$.

При программировании решения системы из г) будут в массиве с элементами $\Xi_{i,j}^{k-1}$ $i,j=0,...,n+1$. При вычислении элементов этого массива сначала полагается $\Xi_{i,n+1}^{k-1} = \Xi_{n+1,j}^{k-1} = 0$, $i,j=1,...,n$, а затем вычисляются элементы массива по формуле:

$$\Xi_{i,j}^{k-1} = \left[(1-\mathrm{i})Q_{i,j}^{k-1} + (1-\mathrm{i})\Xi_{i+1,j}^{k-1} + (1+\mathrm{i})\Xi_{i,j+1}^{k-1}\right] / 2,$$

когда индексы принимают последовательно значения $i,j=n,...,1$.

8. Определяется итерационный параметр:

$$\tau_k = \frac{\left\langle D\vec{w}^{k-1}, \vec{w}^{k-1}\right\rangle}{\left\langle C^{-1}D\vec{w}^{k-1}, D\vec{w}^{k-1}\right\rangle} = \frac{\left\langle \vec{\eta}^{k-1}, \vec{w}^{k-1}\right\rangle}{\left\langle \vec{\xi}^{k-1}, \vec{\eta}^{k-1}\right\rangle} = \frac{\left\langle \bar{\eta}_1^{k-1}, \bar{w}_1^{k-1}\right\rangle}{\left\langle \bar{\xi}_1^{k-1}, \bar{\eta}_1^{k-1}\right\rangle},\ k \in \mathbb{N}.$$

При программировании $\xi_{1,i,j}^{k-1}$ $i,j=0,...,n+1$ – элементы массива. При вычислениях элементов этого массива полагается:

$$\xi_{1,i,j}^{k-1} = \mathrm{Re}\,\Xi_{i,j}^{k-1},\ i,j=1,...,n.$$

При программировании:

$$\tau_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \eta_{1,i,j}^{k-1} w_{1,i,j}^{k-1} \Big/ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_{1,i,j}^{k-1}\eta_{1,i,j}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

9. Вычисляется новое приближение:

$$\vec{u}^k = \vec{u}^{k-1} - \tau_k \vec{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

Это приближение и определяется по соответствующей формуле:

$$\bar{U}^k = \bar{U}^{k-1} - \tau_k \bar{W}^{k-1}.$$

При программировании $u^k_{1,i,j}$ $i, j = 0,...,n+1$ – элементы массива.

Следующие элементы этого массива вычисляются по формуле:

$$u^k_{1,i,j} = u^{k-1}_{1,i,j} - \tau_k w^{k-1}_{1,i,j} \quad i, j = 1,...,n.$$

Они принимаются за приближенное решение, если до этого выполнялось условие остановки итераций.

Эксперименты при численном решении модельной задачи для бигармонического уравнения

В рассматриваемой задаче:

$$\Delta^2 \breve{u}_1 = \breve{f}_1, \text{ в } \Omega, \ \Delta\breve{u}_1\big|_{\Gamma_1} = \breve{u}_1\big|_{\Gamma_1} = 0, \ \frac{\partial \Delta \breve{u}_1}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \breve{u}_1}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma_2} = 0,$$

где

$$\Omega = (0;b_1)\times(0;b_2), \ \Gamma_1 = \{b_1\}\times(0;b_2)\cup(0;b_1)\times\{b_2\} \ \Gamma_2 = \{0\}\times(0;b_2)\cup(0;b_1)\times\{0\},$$

полагается, что $b_1 = b_2 = 2{,}5$,

$$\breve{f}_1(x;y) = 3((25-4x^2)(125-4x^2) + 12(25-4x^2)(25-4y^2) + (25-4y^2)(125-4y^2))/8\,000,$$

т.е.

$$\breve{u}_1(x;y) = (25-4x^2)(125-4x^2)(25-4y^2)(125-4y^2)/1\,024\,000.$$

При аппроксимации этой задачи выбираются значения $m = n = 70, 72, 74,...,90$. Для численного решения получаемых систем линейных алгебраических уравнений $\Lambda\bar{u}_1 = \bar{f}_1$ применим приведенный ранее алгоритм, полагая $\bar{u}_1^0 = \bar{0}$, $\mathrm{E} = 0{,}001$. Для функции $k = k(n)$ числа итераций в зависимости от n приводится график. При условии остановки в итерационном процессе с выбранной относительной погрешностью $\mathrm{E} \in (0;1)$, можно заметить, что вычисления на ЭВМ экспериментально подтверждают асимптотическое поведение, независимость k – количества итераций от $m(n)$ – количества узлов сетки по координатным направлениям осей $0x(0y)$ для получения Е – задаваемой относительной погрешности решения линейных систем алгебраических уравнений (см. рис.).

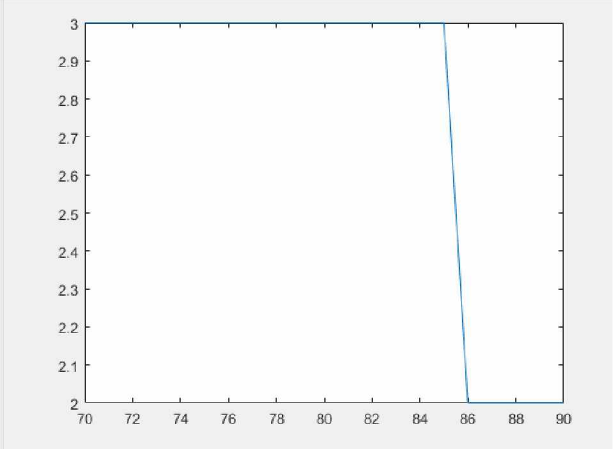

График зависимости k – количества итераций от $m(n)$ – количества узлов сетки по направлениям координат $0x(0y)$ при заданной относительной погрешности счета $\mathrm{E} = 0{,}001$

Литература

1. Самарский, А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1978. – 591 с.

2. Оганесян, Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений / Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец. – Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1979. – 235 с.

3. Обэн, Ж.П. Приближённое решение эллиптических краевых задач / Ж.П. Обен. – М.: Мир, 1977. – 383 с.

Поступила в редакцию 27 ноября 2018 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2019, vol. 11, no. 1, pp. 34–42

DOI: 10.14529/mmph190105

FAST SOLUTION OF A MODEL PROBLEM FOR THE BIHARMONIC EQUATION

A.L. Ushakov
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: ushakoval@susu.ru

The biharmonic equation in a domain of rectangular shape when boundary conditions are mixed is being considered. Numerical solution of this boundary value problem uses iterative factorization on fictitious continuation after finite-difference approximation of the problem to be solved. Eventually, everything is reduced to solving the linear systems of algebraic equations, the matrices of which are triangular with three or less nonzero elements in lines. If approximation error of the initial problem is sufficiently small, the demanded relative error of the used iterative process gets obtained in several iterations. In this case, the developed iterative method turns out to be the method that has optimal asymptotics by the number of actions in arithmetic operations. The proposed iterative method essentially uses specificities of the obtained model problem. Such a problem can arise in methods of the type of fictious components, regions and spaces, when boundary value problems with elliptic equations in the regions of sufficiently arbitrary shape are being solved. The algorithm at implementation of the iterative process, when the choice of iterative parameters is made automatically using the method of minimal corrections, is given. The criterion for process termination after achieving the preliminarily determined ratio error is specified. Graphic result of a computational experiment that proves the asymptotic optimality of the iterative method in computational outlay is given. Complex analysis gets essentially used when developing the method.

Keywords: fictitious continuation; iterative factorizations.

References

1. Samarskiy A.A. *Metody resheniya setochnykh uravneniy* (Methods for solving finite-difference equations). Moscow, Nauka Publ., 1978, 591 p. (in Russ.).

2. Oganesyan L.A., Rukhovets L.A. *Variatsionno-raznostnye metody resheniya ellipticheskikh uravneniy* (Variation-difference methods for solving elliptic equations). Erevan, Izd-vo AN ArmSSR Publ., 1979, 235 p. (in Russ.).

3. Oben Zh.P. *Priblizhyennoe reshenie ellipticheskikh kraevykh zadach* (Approximate solution of elliptic boundary value problems). Moscow, Mir Publ., 1977, 383 p. (in Russ.). [Aubin J.-P. Approximation of elliptic boundary-value problems. New York, Wiley-Interscience, 1972, 360 p.]

Received November 27, 2018