

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ОСЕВОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

С.Н. Царенко

Донецкий национальный технический университет, г. Донецк, Украина

E-mail: tzarenko@gmail.com

Рассматривается динамика крутильных колебаний в стержнях с осевой неоднородностью крутильной жесткости. Стержни различной конфигурации имеют широкое применение для моделирования напряженно-деформированного состояния при статических и динамических нагрузках объектов машиностроения, строительства, биомеханики и пр. Целью работы является создание общего подхода для построения математических моделей крутильных колебаний стержней переменного сечения. В качестве объекта рассматривается упругий стержень, крутильная жесткость которого изменяется по степенному закону от продольной координаты. Динамический процесс описывается волновым уравнением, а его решение ищется методом Фурье. Для удобства решения граничных задач введены специальные функции на основе рекуррентных соотношений для функций Бесселя. С учетом свойства ортогональности собственных функций с весом получено выражение для квадрата нормы. В качестве примера рассмотрен случай колебаний от внезапного приложения нагрузки к одному концу стержня, у которого второй жестко закреплен. На свободном конце стержня предполагается наличие локальной инерционной нагрузки. Получены выражения для углов закручивания и крутящих моментов в сечениях стержня. Выполнено сравнение полученных результатов расчета в относительных величинах с упрощенной одномассовой моделью невесомого стержня.

Ключевые слова: крутильные колебания; вынужденные колебания; стержень переменной жесткости; упругий стержень; волновое уравнение; метод Фурье; функции Бесселя; собственные частоты; напряжения; деформации.

В упругих системах, входящих в состав разного рода механизмов и конструкций, наблюдается явление крутильных колебаний, которое может являться следствием технологического процесса или результатом негативных воздействий. Проблема крутильных колебаний рассматривается, как в рамках самостоятельной спектральной задачи, так и при исследовании параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) в результате динамических воздействий нагрузок. Например, в работах [1, 2] рассматривается построение математических моделей для определения спектра собственных частот крутильных колебаний, включая выявление условий возникновения параметрических резонансов. Исследование параметров структуры и дефектов стержневых конструкций на основе анализа значений первых частот собственных крутильных колебаний рассматривается в статьях [3–5]. Расчетам упругих валов на динамическое воздействие нагрузок посвящены работы [6–8].

В некоторых работах колебания исследуются с учетом нелинейных параметров модели. Так влияние деформации поперечных сечений тонкостенных стержней на параметры колебательного процесса изучено в работе [9]. В статье [10] получено уравнение крутильных колебаний нелинейно деформируемых стержней, указан способ усреднения нелинейных свойств композиционных стержней. Однако для практических целей динамических расчетов упругих стержней наиболее широкое распространение получила волновая модель Сен-Венана и ее решение методом Фурье [11]. Применение метода Фурье для исследования колебаний конического вала с использованием функций Бесселя рассмотрено в работе [12], а случай, когда крутильная жесткость изменяется по линейному закону от продольной координаты, исследован в статье [13], однако в своих работах авторы ограничились лишь рассмотрением частотного уравнения.

Таким образом, исходя из того, что в теории расчетов в настоящее время нет единого подхода к построению математической модели крутильных колебаний для стержней, имеющих нели-

нейность геометрических и механических характеристик, поиск и развитие новых решений данной задачи является актуальной научно-практической проблемой.

В качестве математической модели рассматриваемого объекта примем упругий стержень длиной l , распределенный момент инерции масс поперечного сечения I_m и крутильная жесткость GI_x которого изменяется по степенному закону от продольной координаты x :

$$I_m = \gamma I_{x2} z^\alpha; GI_x = GI_{x2} z^\alpha; z = (1-k)\frac{x}{l} + k; k = \sqrt{\frac{GI_{x1}}{GI_{x2}}} \quad (0 < k < 1), \quad (1)$$

где I_{x2} – момент инерции площади большего основания стержня; γ – плотность материала, показатель степени α зависит от конфигурации конструкции, например, для металлоконструкции пирамидальной формы $\alpha = 2$, для труб конической формы $\alpha = 3$, а для конического стержня сплошного сечения $\alpha = 4$ (рис. 1).

Уравнение углов поворота $\varphi(x, t)$ с учетом принятых обозначений, по аналогии с уравнением продольных колебаний [14] будет иметь вид:

$$z^\alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \alpha z^{\alpha-1} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\gamma l^2}{G(1-k)^2} z^\alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{l^2}{GI_{x2}(1-k)^2} p(z, t), \quad (2)$$

где G – модуль сдвига, $p(x, t)$ – внешняя нагрузка.

Найдем общее решение уравнения (2) при $p(z, t) \equiv 0$ (случай свободных колебаний).

Разделяя переменные, получаем уравнение для собственных функций, решение которого имеет вид [15]:

$$\Phi_n(z) = z^\nu (C_1 J_\nu(\lambda_n z) + C_2 Y_\nu(\lambda_n z)), \quad (3)$$

где

$$\nu = \frac{1-\mu}{2}; \lambda_n = \frac{\omega_n l}{(1-k)c},$$

ω_n – собственные частоты колебаний, $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ – функции Бесселя, $c = \sqrt{G/\gamma}$ – скорость распространения крутильных волн в стержне [9].

Для удобства решения задач с разными граничными условиями введем следующие обозначения функций:

$$A(\zeta) = \frac{\pi}{2} \zeta_0 (J_\nu(\zeta) Y_{\nu-1}(\zeta_0) - Y_\nu(\zeta) J_{\nu-1}(\zeta_0));$$

$$B(\zeta) = \frac{\pi}{2} \zeta_0 (Y_\nu(\zeta) J_\nu(\zeta_0) - J_\nu(\zeta) Y_\nu(\zeta_0));$$

$$C(\zeta) = \frac{\pi}{2} \zeta_0 (J_{\nu-1}(\zeta) Y_{\nu-1}(\zeta_0) - Y_{\nu-1}(\zeta) J_{\nu-1}(\zeta_0));$$

$$D(\zeta) = \frac{\pi}{2} \zeta_0 (Y_{\nu-1}(\zeta) J_\nu(\zeta_0) - J_{\nu-1}(\zeta) Y_\nu(\zeta_0)),$$

где $\zeta_0 = \lambda_n k$ – значение аргумента в начальной точке отсчета. Исходя из рекуррентных соотношений для функций Бесселя [16], представленные функции будут иметь следующие частные значения:

$$A(\zeta_0) = D(\zeta_0) = 1; B(\zeta_0) = C(\zeta_0) = 0.$$

Используя принятые зависимости, произвольные постоянные в уравнении (3) можно выразить через угол поворота φ_0 и момент M_0 в нулевом сечении, тогда выражения для деформаций и усилий для произвольной формы колебаний можно представить в виде:

$$\Phi_n(z) = z^\nu \left(\varphi_0 k^{-\nu} A(\lambda_n z) + \frac{M_0 l}{GI_{x2}(1-k)} \frac{k^{\nu-1}}{\lambda_n} B(\lambda_n z) \right); \quad (4)$$

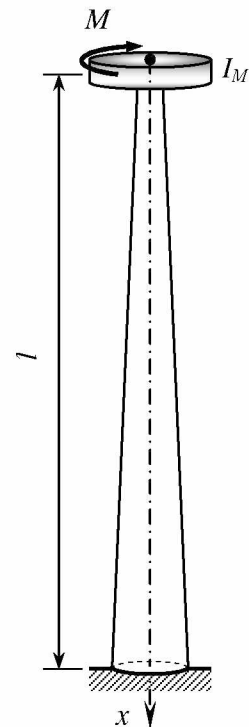


Рис. 1. Расчетная схема стержневидной конструкции с осевой неоднородностью крутильной жесткости

$$M_n(z) = \frac{GI_{x2}(1-k)}{l} z^{1-2\nu} \Phi'_n(z) = z^{1-\nu} \left(\varphi_0 \frac{GI_{x2}(1-k)}{l} k^{-\nu} \lambda_n C(\lambda_n z) + M_0 k^{\nu-1} D(\lambda_n z) \right). \quad (5)$$

На основании теоремы о взаимности работ [17], при отсутствии сосредоточенных масс собственные функции будут ортогональны с весом $\rho(z) = z^{1-2\nu}$. Для нахождения квадрата нормы собственных функций вначале поступим аналогично, как в работе [14] для собственных функций с различными индексами:

$$\left(\lambda_n^2 - \lambda_m^2 \right) \int_k^1 z^{1-2\nu} \Phi_m \Phi_n dz = \Phi_m \left(z^{1-2\nu} \Phi'_n \right) - \Phi_n \left(z^{1-2\nu} \Phi'_m \right) \Big|_k^1.$$

Перейдя к пределу при $m \rightarrow n$, получаем:

$$2\lambda_n \int_k^1 z^{1-2\nu} \Phi_n^2(z) dz = \frac{\partial \Phi_n}{\partial \lambda_n} \left(z^{1-2\nu} \Phi'_n \right) - \Phi_n \frac{\partial \left(z^{1-2\nu} \Phi'_n \right)}{\partial \lambda_n} \Big|_k^1.$$

Определив частные производные по λ_n , квадрат нормы собственных функций находим в виде:

$$\Delta_n^2 = \frac{1}{2} \left(z^{2-2\nu} \Phi_n^2 + \frac{z^{2\nu}}{\lambda_n^2} \left(z^{1-2\nu} \Phi'_n \right)^2 - \frac{2\nu}{\lambda_n^2} \left(z^{1-2\nu} \Phi'_n \right) \Phi_n \right) \Big|_k^1. \quad (6)$$

Теперь рассмотрим случай вынужденных колебаний, для этого требуется найти решение $\varphi_2(z, t)$ неоднородного уравнения:

$$\left(z^{1-2\nu} \varphi' \right)' - \beta^2 z^{1-2\nu} \ddot{\varphi} = \frac{\beta^2}{\gamma I_{x2}} p(z, t), \quad \beta = \frac{l}{c(1-k)}. \quad (7)$$

Решение уравнения (7) представим в виде ряда по собственным функциям:

$$\varphi_2(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \Phi_n(z). \quad (8)$$

Подставив этот ряд в уравнение (7) и принимая во внимание соотношение $\lambda_n = \beta \omega_n$, получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ddot{w}_n + \omega_n^2 w_n \right) z^{1-2\nu} \Phi_n = - \frac{p(z, t)}{\gamma I_{x2}}. \quad (9)$$

Применив метод Фурье к уравнению (9), при учете свойства ортогональности собственных функций с весом, получим уравнение относительно коэффициентов w_n :

$$\ddot{w}_n + \omega_n^2 w_n = - \frac{1-k}{\gamma I_{x2} l \Delta_n^2} \int_1^k p(z, t) \Phi_n(z) dz. \quad (10)$$

В качестве примера, рассмотрим схему внезапного приложения момента к верхнему торцу стержня, на котором расположена локальная инерционная нагрузка с моментом инерции I_M , а нижний его конец жестко закреплен (рис. 1). Такая схема может моделировать конструкции опор линий электропередач в аварийной ситуации при обрыве провода.

Для исследования параметров НДС конструкции необходимо решить граничную задачу (2):

$$M(0, t) - I_M \dot{\varphi}(0, t) = 0; \quad \varphi(l, t) = 0, \quad (11)$$

с однородными начальными условиями:

$$\varphi(x, 0) = 0; \quad \dot{\varphi}(x, 0) = 0. \quad (12)$$

Решение уравнения (2) ищем в виде ряда (8). Собственные функции определим, используя метод начальных параметров, тогда с учетом первого граничного условия (11) получим выражения углов поворота (4) и крутящих моментов (5) для произвольной гармоника:

$$\varphi_n(z) = \varphi_0 z^\nu \left(k^{-\nu} A(\lambda_n z) - \xi \lambda_n k^{\nu-1} B(\lambda_n z) \right); \quad (13)$$

$$M_n(z) = \varphi_0 G I_{x2} \frac{\lambda_n(1-k)}{l} z^{1-\nu} \left(k^{-\nu} C(\lambda_n z) - \xi \lambda_n k^{\nu-1} D(\lambda_n z) \right),$$

здесь $\xi = \frac{I_M(1-k)}{\gamma I_{x2} l}$ – относительный момент инерции, $\lambda_n = \frac{\omega_n l}{(1-k)c}$ – собственные значения частотного уравнения.

Из второго граничного условия (11) получаем уравнение для нахождения собственных значений:

$$A(\lambda_n) - \xi \lambda_n k^{2\nu-1} B(\lambda_n) = 0. \quad (14)$$

Оценим влияние параметра k на значения первого собственного числа уравнения (14) $\omega_1 = \tilde{\lambda}_1 c / l$, $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1 (1-k)$, аналогичным образом определяются частоты для стержней постоянного сечения [11]. Численные исследования зависимости $\tilde{\lambda}_1$ от величины параметра k для пирамидальной каркасной конструкции ($\nu = -0,5$), конического полого ($\nu = -1,0$) и сплошного ($\nu = -1,5$) стержней без учета сосредоточенной массы ($\xi = 0$) представлены на рис. 2. Из графика видно, что для случая $k \approx 1$ величина $\tilde{\lambda}_1$ совпадает с известным значением $\tilde{\lambda}_1 = \pi/2 \approx 1,571$ [11], обозначено штрихпунктиром.

На графике рис. 3 представлена зависимость $\tilde{\lambda}_1$ от величины локальной инерционной нагрузки ξ для параметров стержня $\nu = -1$; $k = 0,5$, пунктиром показана зависимость для упрощенной модели конструкции с одной степенью свободы [18]:

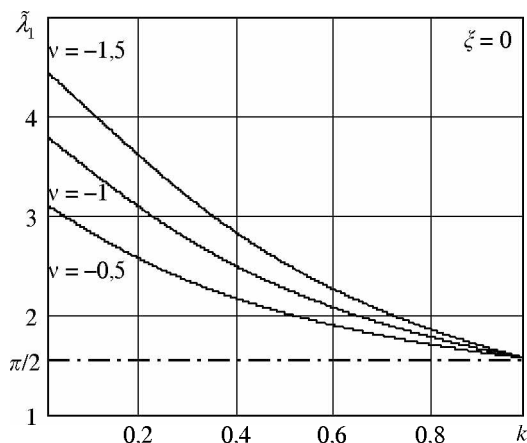


Рис. 2. Зависимость $\tilde{\lambda}_1$ от величины параметра относительного поперечного размера k

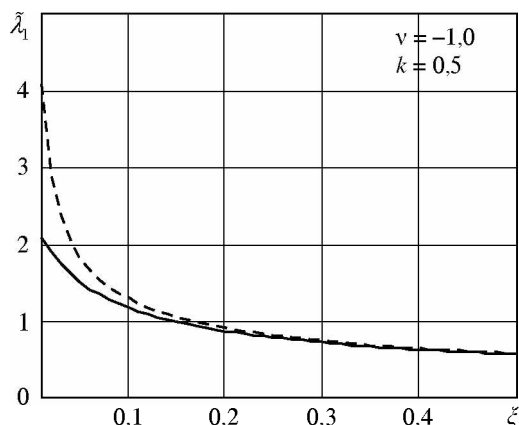


Рис. 3. Зависимость $\tilde{\lambda}_1$ от относительного момента инерции ξ

$$\lambda = \frac{\omega l}{c} = \sqrt{\frac{2\nu(1-k)^2}{\xi(1-k^{2\nu})}}. \quad (15)$$

Анализ результатов расчета собственных чисел для разных параметров (ν , k , ξ) показал, что различие значений величины λ по зависимости (15) и первого корня уравнения (14) – λ_1 наиболее существенно для стержней имеющих относительный поперечный размер $k = 0,4 \div 0,8$, при этом для рассматриваемых объектов различие не превышает 5% при значениях $\xi > 0,5$.

С учетом наличия инерционной нагрузки на верхнем торце стержня (рис. 1), собственные функции будут ортогональны с весом $\rho(z) = z^{1-2\nu} + \xi \delta(z-k)$, где $\delta(z)$ – дельта функция Дирака. Тогда из соотношения (6) квадрат нормы собственных функций будет определяться по формуле:

$$\Delta_n^2 = \frac{1}{2} \left(k^{-\nu} C(\lambda_n) - \xi \lambda_n k^{\nu-1} D(\lambda_n) \right)^2 - \frac{\xi}{2} \left(\xi \lambda_n^2 k^{2\nu} + 2\nu - 2 \right) - \frac{k^{2-2\nu}}{2}.$$

Для случая внезапного приложения момента M в сечении $z = k$ требуется найти общее решение уравнения, которое в соответствии с (10) будет иметь вид:

$$\dot{w}_n + \omega_n^2 w_n = -\frac{M(1-k)}{\gamma I_{x2} l \Delta_n^2} \Phi_n(k). \quad (16)$$

С учетом начальных условий (12) общее решение уравнения (16) будет:

$$w_n(t) = -\frac{Ml}{(1-k)GI_{x2} \Delta_n^2 \lambda_n^2} (1 - \cos \omega_n t).$$

Таким образом, в окончательном виде получим уравнения углов поворота и крутящих моментов:

$$\varphi(z,t) = -\bar{\varphi}_0 \frac{2\nu z^\nu}{1-k^{2\nu}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n^2 \lambda_n^2} (k^{-\nu} A(\lambda_n z) - \xi \lambda_n k^{\nu-1} B(\lambda_n z)) (1 - \cos \omega_n t);$$

$$M(z,t) = -Mz^{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n^2 \lambda_n} (k^{-\nu} C(\lambda_n z) - \xi \lambda_n k^{\nu-1} D(\lambda_n z)) (1 - \cos \omega_n t),$$

где $\bar{\varphi}_0 = \frac{Ml(1-k^{2\nu})}{2\nu GI_{x2}(1-k)}$ – статический угол закручивания.

Введем обозначения для безразмерного времени $\tau = tc/l$, тогда выражения для динамических коэффициентов угла закручивания верхнего торца стержня K_φ и крутящего момента в заделке K_M получим в виде:

$$K_\varphi(\tau) = -\frac{2\nu k^\nu}{1-k^{2\nu}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n^2 \lambda_n^2} (k^{-\nu} A(\lambda_n k) - \xi \lambda_n k^{\nu-1} B(\lambda_n k)) (1 - \cos \tilde{\lambda}_n \tau); \quad (17)$$

$$K_M(\tau) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n^2 \lambda_n} (k^{-\nu} C(\lambda_n) - \xi \lambda_n k^{\nu-1} D(\lambda_n)) (1 - \cos \tilde{\lambda}_n \tau). \quad (18)$$

На рис. 4 представлены графики зависимостей (17) и (18), из которых видим, что характер поведения и максимальные значения динамических коэффициентов при отсутствии инерционного момента ($\xi = 0$) существенно отличаются от известных решений аналогичной задачи для вала однородной структуры [18], для которого максимальные значения коэффициентов равны 2. При значениях параметров конструкции: $\nu = -1$, $k = 0,5$ численно из выражений (17), (18) получим $K_{\varphi \max} = 1,47$, $K_{M \max} = 5,84$.

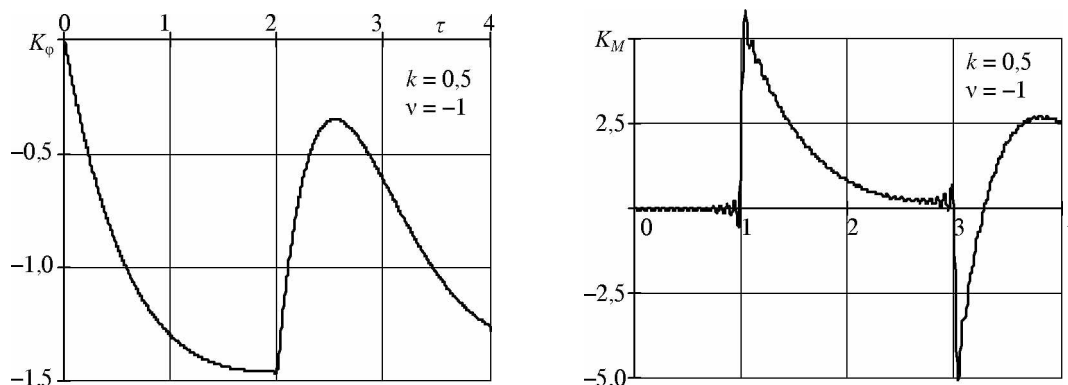


Рис. 4. Зависимость динамических коэффициентов угла закручивания свободного конца стержня и момента в заделке от безразмерного времени при отсутствии инерционного момента ($\xi = 0$)

На рис. 5 представлены графики динамических коэффициентов (17), (18) при наличии локальной инерционной нагрузки для параметров конструкции: $\nu = -1$, $k = 0,5$, $\xi = 0,2$, пунктиром показаны динамические коэффициенты для невесомого упругого стержня с одной степенью свободы, полученные известным способом [17]:

$$\bar{K}_\varphi(\tau) = -(1 - \cos \lambda \tau); \quad \bar{K}_M(\tau) = 1 - \xi \lambda^2 \frac{1 - k^{2\nu}}{2\nu(1-k)^2} \cos \lambda \tau.$$

Из графиков (рис. 5) видим, что упрощенная модель дает достаточную точность расчета при наличии определенной величины локальной инерционной нагрузки. При этом очевидно, что метод приведения масс не отражает реальную картину динамического процесса в случае отсутствия сосредоточенных инерционных нагрузок.

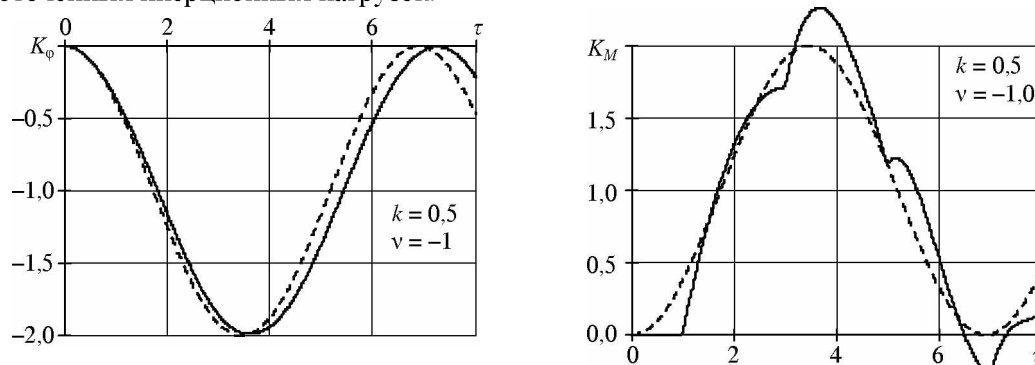


Рис. 5. Зависимость динамических коэффициентов угла закручивания свободного конца стержня и момента в заделке от безразмерного времени при наличии инерционного момента ($\xi = 0,2$)

Выводы

1. Стержневые модели имеют широкое применение в инженерной практике расчета многих объектов машиностроения, металлургии, строительства, горного оборудования, биомеханики и пр. При этом они используются как для непосредственного решения тех или иных прикладных задач, так и в создании теоретических основ для целого ряда методологических разработок. Таким образом, создание методологии расчета на крутильные колебания упругих стержней с осевой неоднородностью геометрических характеристик является актуальной научной проблемой, которая имеет существенное фундаментальное и прикладное значение.

2. Для исследования параметров НДС стержневых систем используются как аналитические, так и численные методы решения задач. Численные методы, наряду с использованием программных комплексов объектного и имитационного моделирования, позволяют рассматривать задачи практически любой сложности, но имеют такие недостатки, как, например, необходимость привязки к конкретным параметрам объекта исследования, что затрудняет их применение на стадии проектных разработок, оценку результатов расчета и т. п. Предложенное аналитическое решение лишено указанных недостатков и помимо этого позволяет получить более полное представление о механизме динамического процесса и степени влияния характеристик модели на его параметры.

3. Теоретическая ценность работы заключается в получении нового аналитического решения задачи крутильных колебаний на основе волнового уравнения, а также в разработке алгоритма применения метода Фурье для динамических расчетов упругих стержней с осевой неоднородностью геометрических свойств.

4. Практическая значимость работы состоит в выводе расчетных зависимостей, которые могут быть непосредственно применены для моделирования НДС при динамических воздействиях нагрузок в таких объектах, как: валы сложной конфигурации, элементы бурильного оборудования, конструкции опор линий электропередач и пр. Полученное аналитическое решение также можно использовать для построения эталонных моделей и верификации расчетных данных при работе с программными комплексами объектного и имитационного моделирования. Предложенный алгоритм расчета может быть положен в основу инженерных методов и практических рекомендаций при разработке технической и регламентирующей документации.

Литература

1. Сухарев, В.А. Крутильные колебания вала со сосредоточенными массами / В.А. Сухарев // Известия сельскохозяйственной науки Тавриды. – 2015. – № 4 (167). – С. 48–53.

2. Параметрически возбуждаемые крутильные колебания в одномодульной конструкции РЛДВПТ с рычажно-кулачковым преобразователем движения / М.А. Донченко, Ю.Н. Журавлёв, А.Н. Иванов, С.Н. Семёнов // Научно-технический вестник Поволжья. – 2012. – № 3. – С. 114–118.

3. Ватульян, А.О. Об одном способе определения упругих характеристик для неоднородных тел / А.О. Ватульян, О.В. Денина // Прикладная механика и техническая физика. – 2012. – Т. 53, № 2(312). – С. 137–147.
4. Хакимов, А.Г. О собственных колебаниях вала с моделью искусственного дефекта / А.Г. Хакимов // Дефектоскопия. – 2010. – № 6. – С. 93–98.
5. Хакимов, А.Г. О собственных крутильных колебаниях бурильной колонны / А.Г. Хакимов, Э.И. Сатыев // Электронный научный журнал Нефтегазовое дело. – 2014. – № 6. – С. 120–153. URL: http://ogbus.ru/issues/6_2014/ogbus_6_2014_p120-153_KhakimovAG_ru_en.pdf
6. Беляев, А.Б. Расчет трансмиссионного вала на крутильные колебания / А.Б. Беляев, В.К. Итбаев // Вестник транспорта Приволжья. – 2009. – № 3. – С. 46–49.
7. Шевченко, Ф.Л. Крутильный удар при свободных колебаниях в буровых установках / Ф.Л. Шевченко, Г.М. Улитин, Ю.В. Петтик // Прогрессивные технологии и системы машиностроения. – 1999. – Вып. 8. – С. 244–247.
8. Шевченко, Ф.Л. О разновидностях крутильных ударов, возникающих при работе буровых установок, и способы их устранения / Ф.Л. Шевченко, Г.М. Улитин // Совершенствование техники и технологии бурения скважин на твердые полезные ископаемые. – Екатеринбург: УГГА, 2001. – Вып. 24. – С. 132–138.
9. Ерофеев, В.И. Математическая модель упругого тонкостенного стержня, совершающего крутильные колебания при наличии нелинейности и депланации / В.И. Ерофеев, Б.Б. Лампси // Приволжский научный журнал. – 2014. – № 2. – С. 14–17.
10. Кравчук, А.С. Крутильные колебания круглых композиционных и реологически активных стержней / А.С. Кравчук, А.И. Кравчук, И.А. Тарасюк // Материалы IV Международной научно-практической конференции «Прикладные проблемы оптики, информатики, радиофизики и физики конденсированного состояния», Минск, 11–12 мая 2017 г. – Минск: Издательство Института прикладных физических проблем имени А.Н. Севченко, 2017. – С. 258–260.
11. Прочность. Устойчивость. Колебания: Справочник: В 3 т. / Под общ. ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – Москва: Машиностроение, 1968. – Т. 3. – 567 с.
12. Беридзе, С.П. Свободные крутильные колебания конического стержня / С.П. Беридзе // Вестник Оренбургского государственного университета. – 1999. – № 3. – С. 104–107.
13. Biswas, S.K. Note on the torsional vibration of a thin beam of varying cross-section / S.K. Biswas // Pure and Applied Geophysics. – 1970. – Vol. 79, Issue. 1. – P. 18–21.
14. Улитин, Г.М. О продольных колебаниях упругих стержней переменного сечения / Г.М. Улитин, С.Н. Царенко // Прикладная механика. – 2015. – Т. 51, № 1. – С. 123–129.
15. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
16. Ватсон, Г.И. Теория бесселевых функций: в 2 ч. / Г.И. Ватсон. – М.: Издательство иностранной литературы. – 1949. – Ч. 1. – 798 с.
17. Киселев, В.А. Строительная механика. Специальный курс (динамика и устойчивость сооружений) / В.А. Киселев. – М.: Стройиздат, 1964. – 332 с.
18. Шевченко, Ф.Л. Динамика упругих стержневых систем / Ф.Л. Шевченко. – Донецк: ООО «Лебедь», 1999. – 268 с.

Поступила в редакцию 17 января 2018 г.

**TORSIONAL VIBRATIONS OF A ROD WITH AN AXIAL GEOMETRIC
INHOMOGENEITY****S.N. Tsarenko**State Higher Education Institution Donetsk National Technical University, Donetsk, Ukraine
E-mail: tzarenko@gmail.com

The dynamics torsional vibrations of a rod with an axial torsional rigidity inhomogeneity. Rods of different configurations are widely used for simulating stress-strain state in case of static and dynamic load to the objects of mechanical engineering, construction, biomechanics, etc. This work's objective is creating of a general approach to building mathematical models of torsional vibrations of rods of variable section. As an object we have considered an elastic rod, the torsional rigidity of which changes according to the power law from the longitudinal coordinate. The dynamic process is described by a wave equation, and is solved using the Fourier method. To make the solving of the boundary-value problems more convenient, special functions based on recurrence relations for the Bessel functions are introduced. Taking into account the orthogonal property of weighted eigenfunctions, an expression for the norm square is obtained. As an example a case of vibrations is considered with sudden application of load to one end of the rod, with the other end of the rod being rigidly fixed. The free end is supposed to be under local inertial load. Expressions were obtained for the torsion angles and torques in the cross-sections of the rod. A comparison was performed for the obtained results of calculation in relative values with a simplified single-mass model of the weightless rod.

Keywords: torsional vibrations; forced vibrations; variable rigidity rod; elastic rod; wave equation; Fourier method; Bessel functions; natural frequencies; stress; strain.

References

1. Sukharev V.A. Torsional Vibrations of Shaft with Concentrated Masses. *Transactions of Taurida. Agricultural Science*, 2015, no. 4(167), pp. 48–53. (in Russ.).
2. Donchenko M.A., Zhuravlyov Yu.N., Ivanov A.N., Semyonov S.N. Parametrically-Excited Torsional Vibrations in One-Module Construction of Rbeehs with Lever-And-Cam Motion Converter. *Scientific and Technical Volga region Bulletin*, 2012, no. 3, pp. 114–118. (in Russ.).
3. Vatul'yan A.O., Denina O.V. One method of determining the elastic properties of inhomogeneous solids. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2012, Vol. 53, no. 2, pp. 266–274. DOI:10.1134/S0021894412020150
4. Khakimov A.G. On the natural vibrations of a shaft with an artificial defect. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2010, Vol. 46, no. 6, pp. 468–473. DOI: 10.1134/S1061830910060100
5. Khakimov A.G., Satyev E.I. On Drill-String Natural Torsional Vibrations. *The electronic scientific journal "Oil and Gas Business"*, 2014, no. 6, pp. 120–153. DOI: 10.17122/ogbus-2014-6-120–153
6. Belyaev A.B., Itbaev V.K. Torsional Vibrations Calculation of the Shaft Line. *Vestnik transporta Povolzhya*, 2009, no. 3, pp. 46–49. (in Russ.).
7. Shevchenko F.L., Ulitin G.M., Pettik Yu.V. Krutil'nyy udar pri svobodnykh kolebaniyakh v burovnykh ustanovkakh (Torsional impact with free oscillations in drilling rigs). *Progressivnye tekhnologii i sistemy mashinostroeniya*, 1999, Issue 8, pp. 244–247. (in Russ.).
8. Shevchenko F.L., Ulitin G.M. O raznovidnostyakh krutil'nykh udarov, vznikayushchikh pri rabote burovnykh ustanovok, i sposoby ikh ustraneniya (On the types of torsional impacts that occur during the operation of drilling rigs, and how to eliminate them). *Sovershenstvovanie tekhniki i tekhnologii bureniya skvazhin na tverdye poleznye iskopaemye*, Ekaterinburg, UGGA, 2001, Issue 24, pp. 132–138. (in Russ.).

9. Erofeev V.I., Lamps B.B. Mathematical model of elastic thin-walled bar committing torsional oscillations in the presence of nonlinearity and warping. *Privolzhsky Scientific Journal*, 2014, no. 2, pp. 14–17. (in Russ.).

10. Kravchuk A.S., Kravchuk A.I., Tarasyuk I.A. Krutil'nye kolebaniya kruglykh kompozitsionnykh i reologicheskii aktivnykh sterzhney (Torsional vibrations of round composite and rheologically active rods). *Materialy IV Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii "Prikladnye problemy optiki, informatiki, radiofiziki i fiziki kondensirovannogo sostoyaniya"*, Minsk, 11–12 maya 2017 g (Proceedings of the IV International Scientific and Practical Conference "Applied Problems of Optics, Informatics, Radiophysics, and Condensed Matter Physics", Minsk, May 11–12, 2017), Minsk, Izdatel'stvo Instituta prikladnykh fizicheskikh problem imeni A.N. Sevchenko Publ., 2017, pp. 258–260. (in Russ.).

11. Birger I.A. (ed.), Panovko Ya.G. (ed.) *Prochnost', ustoychivost', kolebaniya*. Spravochnik v trekh tomakh (Strength. Sustainability. Oscillations. Reference in 3 volumes). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968, Vol. 3, 567 p. (in Russ.).

12. Beridze S.P. Svobodnye krutil'nye kolebaniya konicheskogo sterzhnya (Free torsional vibrations of the tapered rod). *Vestnik Orenburgskogo gosudarstvennogo universiteta*, 1999, no. 3, pp. 104–107. (in Russ.).

13. Biswas S.K. Note on the torsional vibration of a thin beam of varying cross-section. *Pure and Applied Geophysics*, 1970, Vol. 79, Issue 1, pp. 18–21. DOI: 10.1007/BF00875473

14. Ulitin G.M., Tsarenko S.N. Longitudinal Vibrations of Elastic Rods of Variable Cross-Section. *International Applied Mechanics*, 2015, Vol. 51, Issue 1, pp. 102–107. DOI: 10.1007/s10778-015-0676-8

15. Kamke, E. *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen.*, New York, Chelsea Pub. Co., 1959.

16. Watson G.N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge, Cambridge University Press, 1944, 804 p.

17. Kiselev V.A. *Stroitel'naya mekhanika. Spetsial'nyy kurs (dinamika i ustoychivost' sooruzheniy)* (Structural mechanics. Special course (dynamics and stability of facilities)), Moscow, Stroyizdat Publ., 1964, 332 p. (in Russ.).

18. Shevchenko F.L. *Dinamika uprugikh sterzhnevnykh sistem* (Dynamics of elastic rod systems). Donetsk, OOO "Lebed'" Publ., 1999, 268 p. (in Russ.).

Received January 17, 2018