УДК 517.956.226 DOI: 10.14529/mmph190401

# ОБ УТОЧНЕНИИ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ В РЕЗУЛЬТАТЕ РАЗДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ

***Е.А. Деркунова***
*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация*
*E-mail: derkunovaea@susu.ru*

**Проведено построение и обоснование асимптотики решения начальной сингулярно возмущенной задачи в случае пересечения корней вырожденного уравнения. Задача характеризуется наличием внутреннего переходного слоя, вблизи которого решение претерпевает изменение поведения, а именно, переходит от стремления от одной ветви составного устойчивого корня к другой. Оказывается, что корни вырожденного уравнения в некоторой окрестности точки их пересечения можно изолировать с помощью определенного их представления. Аналогичное представление справедливо и для искомой функции. Все это позволяет свести задачу к новой, асимптотику решения которой легко можно найти. Во-первых, оценивается порядок входящих в правую часть уравнения членов внутри и вне малой окрестности точки бифуркации, а во-вторых, уточняется асимптотика решения исходной задачи вне малой окрестности этой точки. Последнее проделывается с помощью некой пограничной функции, цель введения которой состоит в том, чтобы асимптотика вышла на режим, задаваемый устойчивым корнем слева и справа точки бифуркации. Доказательство теоремы существования и единственности решения, обладающего указанной асимптотикой, проводится методом дифференциальных неравенств.**

*Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача; асимптотика; метод пограничных функций; смена устойчивости; метод дифференциальных неравенств.*

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим сингулярно возмущенное обыкновенное дифференциальное уравнение вида ($\varepsilon > 0$ – малый параметр):

$$\varepsilon \frac{du}{dt} = -\big(u - \varphi_1(t)\big)\big(u - \varphi_2(t)\big), \quad -1 < t < 1 \qquad (1)$$

с начальным условием:

$$u(-1) = u^0 . \qquad (2)$$

Потребуем выполнения следующих условий:

**Условие 1.** $\varphi_1(t) > \varphi_2(t)$ при $-1 \le t < 0$, $\varphi_2(t) > \varphi_1(t)$ при $0 < t \le 1$, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_0$ .

Это означает, что корень $\varphi_1(t)$ устойчив в промежутке $-1 \le t < 0$ и неустойчив при $0 < t \le 1$, а корень $\varphi_2(t)$ – наоборот, неустойчив при $-1 \le t < 0$ и устойчив в промежутке $0 < t \le 1$. Напомним, что устойчивость корней $u = \varphi_1(t)$, $u = \varphi_2(t)$ вырожденного уравнения

$$f(u,t) \equiv -\big(u - \varphi_1(t)\big)\big(u - \varphi_2(t)\big) = 0$$

определяется знаком производной

$$f_u = -2u + [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)],$$

и для устойчивого корня $f_u < 0$, а для неустойчивого – соответственно, $f_u > 0$ [1]. В силу равенства $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ нарушается условие теоремы А.Н. Тихонова – знакопостоянство $f_u$ на корне вырожденного уравнения, а в точке $t = 0$ характер устойчивости корней меняется, что ведет к необходимости дальнейшего исследования. Ранее было доказано [2] существование и единственность решения задачи (1), (2), для которого в $\delta$ – окрестности точки $t = 0$ ($\delta > 0$ – достаточно малое, не зависящее от $\varepsilon$ число) справедливо асимптотическое представление

$$u(t)=\breve{u}(t)+O(\sqrt{\varepsilon}), \qquad (3)$$

где $\breve{u}(t)=\begin{cases}\varphi_1(t) & \text{при} \quad -1\le t<0,\\ \varphi_2(t) & \text{при} \quad 0<t\le 1,\end{cases}$ называется составным устойчивым корнем.

**Условие 2.** Начальное значение (2) находится в области влияния устойчивого при $t=-1$ корня $\varphi_1(t)$.

Следующее условие достаточно для построения асимптотики погранслойного типа в окрестностях, окаймляющих точку бифуркации:

**Условие 3.** Корни вырожденного уравнения $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ достаточное число раз непрерывно дифференцируемы. Производные пересекающихся корней в точке $t=0$ имеют следующие знаки:

$$\varphi_1'(0)<0, \quad \varphi_2'(0)>0.$$

Ниже будет построена асимптотика решения, уточняющая построенную в [2]. Во-первых, эта асимптотика будет описывать решение, выходящее из точки $(-1,u^0)$, подчиненной Условию 2, что совместно с Условием 1 делает ее поведение согласным с требованиями теоремы А.Н. Тихонова [1]. Во-вторых, как уже говорилось, асимптотика вблизи начала координат будет определяться результатами, изложенными в [2, 3] (см. выше формулу (3)). В-третьих, вне малой окрестности точки внутреннего слоя (порядка $\sqrt{|\ln\varepsilon|\varepsilon}$ ) будет описываться некой пограничной функцией, имеющей две ветви – слева и справа от точки $(0,\varphi_0)$, призванной выйти на режим, задаваемый составным устойчивым корнем. По этой причине оценка для решения будет более детальная, нежели (3). В этом и состоит результат исследования.

**2. Построение асимптотики.** Зададим достаточно малое, не зависящее от $\varepsilon$ число $\delta>0$. Рассмотрим задачу (1)–(2) в окрестности начальной точки $-1\le t<-\delta$. Здесь действует классическая теория: корни $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ изолированы. Устойчив первый корень. К нему и «притянется» решение. Асимптотика решения вблизи начальной точки известна:

$$u(t,\varepsilon)=\varphi_1(t)+Q_0(\tau_0)+O(\varepsilon),$$

где $Q_0(\tau_0)$ – стандартная пограничная функция, $\tau_0=\dfrac{t+1}{\varepsilon}$ – погранслойная переменная. Функция $Q_0(\tau_0)$ находится из начальной задачи:

$$\frac{dQ_0}{d\tau_0}=-Q_0\left(Q_0+[\varphi_1(-1)-\varphi_2(-1)]\right), \quad \tau_0>0,$$

$$Q_0(0)=u^0-\varphi_1(-1).$$

Ее решение выписывается так:

$$Q_0(\tau_0)=\frac{\varphi_1(-1)-\varphi_2(-1)}{\dfrac{u^0-\varphi_2(-1)}{u^0-\varphi_1(-1)}\exp\{[\varphi_1(-1)-\varphi_2(-1)]\tau_0\}-1}.$$

Используя Условия 1 и 2, убеждаемся в справедливости для пограничной функции $Q_0(\tau_0)$ экспоненциальной оценки:

$$|Q_0(\tau_0)|\le C\exp(-\kappa\tau_0), \quad \tau_0>0,$$

где $C>0$, $\kappa>0$ – не зависящие от $\varepsilon$ постоянные.

Рассмотрим уравнение (1) в области $-\delta\le t\le 1$. Выпишем выражения для корней его вырожденного уравнения:

$$\varphi_1(t)=\varphi_0+\varphi_1'(0)t+\ldots+\frac{1}{n!}\varphi_1^{(n)}(0)t^n+\ldots, \qquad \varphi_2(t)=\varphi_0+\varphi_2'(0)t+\ldots+\frac{1}{n!}\varphi_2^{(n)}(0)t^n+\ldots$$

и подставим их в уравнение (1), получим:

$$\varepsilon\frac{du}{dt}=-\left(u-\varphi_0-v_1(t)t\right)\left(u-\varphi_0-v_2(t)t\right),$$

где $v_1(t)=\varphi_1'(0)+...+\frac{1}{n!}\varphi_1^{(n)}(0)t^{n-1}$ и $v_2(t)=\varphi_2'(0)+...+\frac{1}{n!}\varphi_2^{(n)}(0)t^{n-1}$. В силу Условий 3 и 1 $v_1(0)<0$, $v_2(0)>0$ и $v_1(t)<v_2(t)$.

Будем искать асимптотику (1) в окрестности $[-\delta,\delta]$ в виде

$$u=v(t)t+\varphi_0+O(\sqrt{\varepsilon}). \tag{4}$$

Для новой функции $v(t)$ имеем задачу:

$$\varepsilon\frac{d(vt)}{dt}=-\Big[\big(v-v_1(t)\big)t+O(\sqrt{\varepsilon})\Big]\cdot\Big[\big(v-v_2(t)\big)t+O(\sqrt{\varepsilon})\Big],\ -\delta\le t<0,\ 0<t\le\delta. \tag{5}$$

Во-первых, в окрестности нуля получили изолированные корни. Во-вторых, они меняют характер устойчивости при переходе через $t=0$. Корень $v_1(t)$ является устойчивым при $-\delta\le t<0$, а корень $v_2(t)$ устойчив при $0<t\le 1$. В-третьих, из уравнения (5) следует, что $v(t)=\tilde{c}(t,\varepsilon)/t$, где $\tilde{c}(t,\varepsilon)$ – неизвестная функция, удовлетворяющая уравнению:

$$\varepsilon\tilde{c}'(t,\varepsilon)=-t^2\left(\frac{\tilde{c}(t,\varepsilon)}{t}-v_1(t)\right)\left(\frac{\tilde{c}(t,\varepsilon)}{t}-v_2(t)\right)+O(\sqrt{\varepsilon})t\left(2\frac{\tilde{c}(t,\varepsilon)}{t}-(v_1(t)+v_2(t))\right)+O(\varepsilon). \tag{6}$$

Из оценки (3) получим, что $\tilde{c}(t,\varepsilon)=c_1(t)+c(\varepsilon,t)$, где $c_1(t)=O(t^{\lambda})$ при малых $t$, $\lambda>0$. Подставим выражение для $\tilde{c}(t,\varepsilon)$ в уравнение (6):

$$\varepsilon c_1'(t)+\varepsilon c'(\varepsilon,t)=-t^2\left(\frac{c_1(t)}{t}-v_1(t)\right)\left(\frac{c_1(t)}{t}-v_2(t)\right)-tc(\varepsilon,t)\left(2\frac{c_1(t)}{t}-v_1(t)-v_2(t)\right)-c^2(\varepsilon,t)+$$
$$+O(\sqrt{\varepsilon})t\left(2\frac{c_1(t)}{t}-v_1(t)-v_2(t)\right)+O(\sqrt{\varepsilon})c(\varepsilon,t)+O(\varepsilon). \tag{7}$$

Пусть $-m\sqrt{\varepsilon}<t<m\sqrt{\varepsilon}$, где $m=m(\varepsilon)>0$ – некоторая зависящая от $\varepsilon$ величина. Выберем $m(\varepsilon)$ порядка $\sqrt{|\ln\varepsilon|}$. Тогда ясно, что уравнение (7) удовлетворяется, когда $c(\varepsilon,t)=O(\sqrt{\varepsilon})$, а $\lambda=1$. При этом оказывается, кроме того, что из оценки (3) в указанной окрестности следует равенство $c_1(t)=\frac{v_1(t)+v_2(t)}{2}t+O(\sqrt{\varepsilon})$, поэтому второе и четвертое слагаемое правой части (7) есть величина порядка $O(\varepsilon^{3/2}|\ln\varepsilon|^{1/2})$.

Положим затем $-\delta\le t<-m\sqrt{\varepsilon}$ и $m\sqrt{\varepsilon}<t\le\delta$. Первый член правой части (7) будет преобладать над остальными, и в этих промежутках потребуется выполнение соотношений: $c_1(t)\sim v_1(t)t$ или $c_1(t)\sim v_2(t)t$.

Решим уравнение вида:

$$\varepsilon\frac{d(vt)}{dt}=-t^2\left[v-v_1(t)\right]\cdot\left[v-v_2(t)\right]+\sigma(t,\sqrt{\varepsilon}). \tag{8}$$

Уравнение (8) представляет собой (7), взятое вне окрестности точки перехода порядка $\sqrt{|\ln\varepsilon|\varepsilon}$. Функция $\sigma(t,\sqrt{\varepsilon})$ определяется из (7).

Уточним оценку для решения в указанной области. Асимптотику решения уравнения (8) на временах $-\delta\le t\le 1$ будем искать в виде:

$$v(t,\varepsilon)=\overline{v}(t)+\Pi(\tau,\varepsilon),$$

где регулярная часть

$$\overline{v}(t)=\begin{cases}v_1(t), & -\delta\le t<0,\\ v_2(t), & 0<t\le 1.\end{cases}$$

Поведение решения $v(t)$ вблизи начала координат определяется составной пограничной функцией:

$$\Pi(t,\varepsilon)=\begin{cases}\Pi^{(-)}(t,\varepsilon), & t<0,\\ \Pi^{(+)}(t,\varepsilon), & t>0.\end{cases}$$

Запишем задачу для определения пограничной функции $\Pi^{(-)}(t,\varepsilon)$:

$$\varepsilon\frac{d\Pi^{(-)}}{dt}=-t\Pi^{(-)},\ t<0, \tag{9}$$

$$\Pi^{(-)}(0,\varepsilon)=-v_1(0). \tag{10}$$

Решая ее, находим:

$$\Pi^{(-)}(t,\varepsilon)=-v_1(0)\exp\left(-\frac{t^2}{2\varepsilon}\right).$$

Непосредственно убеждаемся в справедливости оценки:

$$\left|\Pi^{(-)}(t,\varepsilon)\right|\le C\exp\left(-\kappa\frac{t^2}{\varepsilon}\right), \tag{11}$$

где $C>0$, $\kappa>0$ – не зависящие от $\varepsilon$ постоянные.

*Замечание 1*. На промежутке $-\delta\le t<-m\sqrt{\varepsilon}$ для функции $\Pi^{(-)}(t,\varepsilon)$ справедлива оценка:

$$\left|\Pi^{(-)}(t,\varepsilon)\right|\le C\exp\left(-\kappa m^2\right),$$

и чтобы эта пограничная функция стала порядка $O(\varepsilon^{\alpha})$, $\alpha>0$ – некоторое число, достаточно, чтобы параметр $m\ge\sqrt{\alpha\kappa^{-1}\left|\ln\varepsilon\right|}$. Поскольку выше было получено решение (9)–(10) с $\kappa\le\frac{1}{2}$, то в той задаче $m\ge\sqrt{2\alpha\left|\ln\varepsilon\right|}$.

Пограничная функция $\Pi^{(+)}(t,\varepsilon)$ находится как решение задачи:

$$\varepsilon\frac{d\Pi^{(+)}}{dt}=-t\Pi^{(+)},\ t>0, \tag{12}$$

$$\Pi^{(+)}(0,\varepsilon)=-v_2(0).$$

Ее решение имеет вид:

$$\Pi^{(+)}(\tau,\varepsilon)=-v_2(0)\exp\left(-\frac{t^2}{2\varepsilon}\right).$$

Аналогично ситуации с пограничной функцией слева от начала координат для $\Pi^{(+)}(t,\varepsilon)$ справедлива оценка:

$$\left|\Pi^{(+)}(t,\varepsilon)\right|\le C\exp\left(-\kappa\frac{t^2}{\varepsilon}\right),\quad \tau>0,$$

где постоянные $C>0$, $\kappa>0$ не зависят от $\varepsilon$. Замечание, аналогичное приведенному выше, справедливо и для функции $\Pi^{(+)}(t,\varepsilon)$.

*Замечание 2.* Как видим, чтобы приступить к решению уравнения (8), при построении погранслойной части асимптотики решаются уравнения (9) и (12) соответственно влево и вправо от начала координат, и к ним присоединяются начальные условия вида: $v(0,\varepsilon)=\overline{v}(0)+\Pi^{(\mp)}(0,\varepsilon)=0$.

**3. Обоснование асимптотики.** Ниже будет доказано следующее утверждение.

**Теорема.** *Если выполнены Условия 1–3, то существует единственное решение задачи (1)–(2), имеющее при достаточно малых $\varepsilon$ асимптотическое представление*

$$u(t,\varepsilon)=\begin{cases}\varphi_1(t)+Q_0(\tau_0)+O(\varepsilon) & \text{при} \quad -1\le t<-\delta,\\ \varphi_0+\overline{v}(t)t+O(\sqrt{\varepsilon}) & \text{при} \quad -m\sqrt{\varepsilon}<t<m\sqrt{\varepsilon},\\ \varphi_0+\left(\overline{v}(t)+\Pi(\tau,\varepsilon)\right)t+O(\sqrt{\varepsilon}) & \text{при} \quad -\delta\le t\le -m\sqrt{\varepsilon}, m\sqrt{\varepsilon}\le t\le\delta,\\ \varphi_0+v_2(t)t+O(\varepsilon) & \text{при} \quad \delta<t\le 1,\end{cases}$$

*где* $m \ge \sqrt{2\alpha|\ln\varepsilon|}$, $\alpha > 0$ – *некоторое число.*

Итак, асимптотика решения при $-1 \le t < -\delta$ была выше построена, она, впрочем, следует из стандартной теории [1]. Если взять переменную $t$ такой, что $-m\sqrt{\varepsilon} < t < m\sqrt{\varepsilon}$, то для получения асимптотики на указанном промежутке можно воспользоваться результатом, изложенным в [2, 3]. Доказательство теоремы на промежутках $-\delta \le t \le -m\sqrt{\varepsilon}$ и $m\sqrt{\varepsilon} \le t \le 1$ проведем методом дифференциальных неравенств [2]. Для этого достаточно показать, что существуют кусочно непрерывные функции, называемые нижним $\underline{U}(t,\varepsilon)$ и верхним $\overline{U}(t,\varepsilon)$ решением уравнения (1), то есть выполняются неравенства:

1. $L_\varepsilon \underline{U} \equiv \varepsilon \dfrac{d\underline{U}}{dt} + \left(\underline{U} - \varphi_1(t)\right)\left(\underline{U} - \varphi_2(t)\right) \le 0 \le L_\varepsilon \overline{U}$, $\quad -m\sqrt{\varepsilon} > t \ge -\delta$, $\quad m\sqrt{\varepsilon} < t \le \delta$. (13)

2. $\underline{U}(-m\sqrt{\varepsilon},\varepsilon) \le \overline{U}(-m\sqrt{\varepsilon},\varepsilon)$ и $\underline{U}(m\sqrt{\varepsilon},\varepsilon) \le \overline{U}(m\sqrt{\varepsilon},\varepsilon)$. (14)

Положим:

$$\underline{U}(t,\varepsilon) = \begin{cases} \underline{U}^{(-)}(t,\varepsilon), & t < 0, \\ \underline{U}^{(+)}(t,\varepsilon), & t > 0, \end{cases} \qquad \overline{U}(t,\varepsilon) = \begin{cases} \overline{U}^{(-)}(t,\varepsilon), & t < 0, \\ \overline{U}^{(+)}(t,\varepsilon), & t > 0. \end{cases}$$

Нижнее и верхнее решения построим в виде:

$$\underline{U}^{(-)}(t,\varepsilon) = \varphi_0 + \left(v_1(t) + \Pi^{(-)}(t,\varepsilon)\right)t - A^{(-)}(t)t\sqrt{\varepsilon}, \quad \overline{U}^{(-)}(t,\varepsilon) = \varphi_0 + \left(v_1(t) + \Pi^{(-)}(t,\varepsilon)\right)t + A\sqrt{\varepsilon}$$

при $-m\sqrt{\varepsilon} > t > -\delta$;

$$\underline{U}^{(+)}(t,\varepsilon) = \varphi_0 + \left(v_2(t) + \Pi^{(+)}(t,\varepsilon)\right)t - A\sqrt{\varepsilon}, \quad \overline{U}^{(+)}(t,\varepsilon) = \varphi_0 + \left(v_2(t) + \Pi^{(+)}(t,\varepsilon)\right)t + A\sqrt{\varepsilon}$$

при $m\sqrt{\varepsilon} < t < \delta$.

Здесь функция $A^{(-)}(t)$ есть решение уравнения $\dfrac{dA^{(-)}}{dt}t = a - A^{(-)}$, что дает $A^{(-)}(t) = \dfrac{A}{t} + a$, где $A > 0$, $a > 0$ – достаточно большие числа. При $-\dfrac{A}{a} < t < 0$ функция $A^{(-)}(t) < 0$, что и требуется для нижнего решения при отрицательных $t$. Достаточно проверить неравенства (13), (14) отдельно для функций $\underline{U}^{(-)}(t,\varepsilon)$ и $\overline{U}^{(-)}(t,\varepsilon)$, отдельно для $\underline{U}^{(+)}(t,\varepsilon)$ и $\overline{U}^{(+)}(t,\varepsilon)$ соответственно слева и справа от начала координат. Неравенства 2 проверяются элементарно с учетом того, что начальной точкой для нижнего и верхнего решения на отрезке $-m\sqrt{\varepsilon} \ge t \ge -\delta$ будет $t = -m\sqrt{\varepsilon}$, а эволюция системы происходит справа налево. Докажем неравенство $L_\varepsilon \underline{U} \le 0$ на промежутке $-\delta \le t < -m\sqrt{\varepsilon}$. Имеем:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \underline{U} &\equiv \varepsilon \frac{d\underline{U}}{dt} + \left(\underline{U} - \varphi_1(t)\right)\left(\underline{U} - \varphi_2(t)\right) = \\ &= \varepsilon \frac{dv_1}{dt}t + \varepsilon \frac{d\Pi^{(-)}}{dt}t + \varepsilon\left(v_1 + \Pi^{(-)}\right) - \frac{dA^{(-)}}{dt}t\varepsilon^{3/2} - A^{(-)}(t)\varepsilon^{3/2} + \\ &\quad + \left(\Pi^{(-)}t - A^{(-)}(t)t\sqrt{\varepsilon}\right)\left(\Pi^{(-)}t - A^{(-)}(t)t\sqrt{\varepsilon} + (v_1 - v_2)t\right) = \\ &= \varepsilon \frac{dv_1}{dt}t + \varepsilon\left(v_1 + \Pi^{(-)}\right) - \left\{\frac{dA^{(-)}}{dt}t + A^{(-)}(t) - a\right\}\varepsilon^{3/2} + t\left\{\varepsilon\frac{d\Pi^{(-)}}{dt} + t\Pi^{(-)}\right\} + \\ &\quad + t^2\Pi^{(-)}\left(\Pi^{(-)} + (v_1 - v_2) - 1\right) + \left(v_2 - v_1 - 2\Pi^{(-)}\right)A^{(-)}(t)t^2\sqrt{\varepsilon} + A^{(-)}(t)^2 t^2 \varepsilon - a\varepsilon^{3/2}. \end{aligned}$$

Выражения в фигурных скобках равны нулю в силу уравнения для $A^{(-)}(t)$ и уравнения (9). Шестое слагаемое будет иметь вид: $[At + at^2]\left(v_2 - v_1 - 2\Pi^{(-)}\right)\sqrt{\varepsilon} < 0$ при $-\dfrac{A}{a} < t < 0$, более того, при выше указанном порядке $m(\varepsilon)$ будет являться величиной меньшей, чем $-2Ac\sqrt{|\ln\varepsilon|\varepsilon}$, где

$c > 0$ подходящая постоянная. Это слагаемое будет доминировать над всеми слагаемыми этой суммы при достаточном соотношении между константами $A$ и $a$, при достаточно малых $\varepsilon$, и достаточно больших $A$ и $m$. Здесь следует отметить, что порядок функции $\Pi^{(-)}(t,\varepsilon)$ в силу Замечания 1 на исследуемом промежутке является величиной $O(\varepsilon^{\alpha})$, если выбрать $m \ge \sqrt{2\alpha|\ln\varepsilon|}$, пятый член по абсолютной величине меньше $C\varepsilon^{1+\alpha}|\ln\varepsilon| = o(\sqrt{|\ln\varepsilon|}\varepsilon)$, но больше $\delta o(\varepsilon^{N})$. Седьмой член есть функция вида $(A+at)^2\varepsilon < (A+\delta a)^2\varepsilon$. Первый и второй члены на указанном промежутке порядка $O(\varepsilon)$. Все это приводит к неравенству $L_{\varepsilon}\underline{U} \le 0$ для $-\delta \le t < -m\sqrt{\varepsilon}$ при достаточно малых $\varepsilon$.

Аналогично, $L_{\varepsilon}\overline{U} \ge 0$ в промежутке $-\delta \le t < -m\sqrt{\varepsilon}$. Действительно, получаем:

$$L_{\varepsilon}\overline{U} \equiv \varepsilon\frac{d\overline{U}}{dt} + \left(\overline{U} - \varphi_1(t)\right)\left(\overline{U} - \varphi_2(t)\right) = \varepsilon\frac{dv_1}{dt}t + \varepsilon\frac{d\Pi^{(-)}}{dt}t + \varepsilon\left(v_1 + \Pi^{(-)}\right) +$$
$$+\left(\Pi^{(-)}t + A\sqrt{\varepsilon}\right)\left(\Pi^{(-)}t + A\sqrt{\varepsilon} + (v_1 - v_2)t\right) = \varepsilon\frac{dv_1}{dt}t + \varepsilon\left(v_1 + \Pi^{(-)}\right) +$$
$$+t\left\{\varepsilon\frac{d\Pi^{(-)}}{dt} + t\Pi^{(-)}\right\} + t^2\Pi^{(-)}\left(\Pi^{(-)} + (v_1 - v_2) - 1\right) - t\left(v_2 - v_1 - 2\Pi^{(-)}\right)A\sqrt{\varepsilon} + A^2\varepsilon.$$

Теперь пятое слагаемое имеет положительное значение и преобладает в этих выражениях при достаточно малых $\varepsilon$ и достаточно больших $A$, то есть $L_{\varepsilon}\overline{U} \ge 0$ на указанном промежутке.

Рассмотрим теперь ситуацию с нижним и верхним решением в промежутке $m\sqrt{\varepsilon} < t \le \delta$. Для нижнего решения получим:

$$L_{\varepsilon}\underline{U} \equiv \varepsilon\frac{d\underline{U}}{dt} + \left(\underline{U} - \varphi_1(t)\right)\left(\underline{U} - \varphi_2(t)\right) = \varepsilon\frac{dv_2}{dt}t + \varepsilon\frac{d\Pi^{(+)}}{dt}t + \varepsilon\left(v_2 + \Pi^{(+)}\right) +$$
$$+\left(\Pi^{(+)}t - A\sqrt{\varepsilon} + (v_2 - v_1)t\right)\left(\Pi^{(+)}t - A\sqrt{\varepsilon}\right) = \varepsilon\frac{dv_2}{dt}t + \varepsilon\left(v_2 + \Pi^{(+)}\right) +$$
$$+t\left\{\varepsilon\frac{d\Pi^{(+)}}{dt} + t\Pi^{(+)}\right\} + t^2\Pi^{(+)}\left(\Pi^{(+)} + (v_2 - v_1) - 1\right) - t\left(v_2 - v_1 + 2\Pi^{(+)}\right)A\sqrt{\varepsilon} + A^2\varepsilon.$$

В данном промежутке пятое слагаемое отрицательно, и при указанных $m$, достаточно малых $\varepsilon$ и достаточно больших $A$ справедливо неравенство $L_{\varepsilon}\underline{U} \le 0$. Докажем, наконец, соответствующую оценку для $\overline{U}$ в промежутке $m\sqrt{\varepsilon} < t \le \delta$:

$$L_{\varepsilon}\overline{U} \equiv \varepsilon\frac{d\overline{U}}{dt} + \left(\overline{U} - \varphi_1(t)\right)\left(\overline{U} - \varphi_2(t)\right) = \varepsilon\frac{dv_2}{dt}t + \varepsilon\frac{d\Pi^{(+)}}{dt}t + \varepsilon\left(v_2 + \Pi^{(+)}\right) +$$
$$+\left(\Pi^{(+)}t + A\sqrt{\varepsilon} + (v_2 - v_1)t\right)\left(\Pi^{(+)}t + A\sqrt{\varepsilon}\right) = \varepsilon\frac{dv_2}{dt}t + \varepsilon\left(v_2 + \Pi^{(+)}\right) +$$
$$+t\left\{\varepsilon\frac{d\Pi^{(+)}}{dt} + t\Pi^{(+)}\right\} + t^2\Pi^{(+)}\left(\Pi^{(+)} + (v_2 - v_1) - 1\right) + t\left(v_2 - v_1 + 2\Pi^{(+)}\right)A\sqrt{\varepsilon} + A^2\varepsilon.$$

Пятое слагаемое в этом равенстве положительно. Оно будет главным при малых $\varepsilon$ и достаточно больших $A$, то есть $L_{\varepsilon}\overline{U} \ge 0$. В силу изолированности корня $\varphi_2(t)$ на отрезке $\delta \le t \le 1$ асимптотика решения такая, как указано в формулировке теоремы. Очевидно, единственность решения задачи (1)–(2) гарантирована. Теорема доказана.

**Литература**

1. Васильева, А.Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – М.: Высшая школа, 1990. – 207 с.

2. Бутузов, В.Ф. Сингулярно возмущенные задачи в случае смены устойчивости / В.Ф. Бутузов, Н.Н. Нефедов, К.Р. Шнайдер // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее

приложения. Тематические обзоры. – М.: ВИНИТИ, 2002 – Т. 109. Дифференц. уравнения. Сингулярные возмущения.

3. Бутузов, В.Ф. О системах сингулярно возмущенных уравнений в случае пересечения корне вырожденной системы / В.Ф. Бутузов, М.А. Терентьев // Вычисл. матем. и матем. физ. – 2002. – Т. 42, № 11. – С. 1686–1699.

***Поступила в редакцию 1 марта 2019 г.***

*Bulletin of the South Ural State University*
*Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*
*2019, vol. 11, no. 4, pp. 5–11*

**DOI: 10.14529/mmph190401**

# ON REFINING THE ASYMPTOTICS OF A SINGULAR PERTURBED PROBLEM SOLUTION AS A RESULT OF SEPARATION OF THE ROOTS OF A DEGENERATE EQUATION

***E.A. Derkunova***
*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*
*E-mail: derkunovaea@susu.ru*

We carry the constructing and founding of solution asymptotics for initial singular perturbed problem when the roots of degenerate equation are cross. The problem is characterized by a presence of inner transition layer near which the solution has a change of own behavior, it means, passes from one branch of complex stable root to another one. It turns out, the roots of degenerate equation could be separated by means of defined their representation. The same representation is true for research function also. It lets to reduce the problem to new one which estimate of solution is easily found. In the first place, the order of the terms of right part of equation is set up into and out of small neighborhood of bifurcation point; secondly, the solution asymptotics of reference problem is improved out of this small neighborhood. The last one is made by means of a certain boundary function, which aim of introduce is to go of asymptotics to regime given left and right of bifurcation point. The proof of existence and uniqueness theorem having the point out asymptotics we carry by differential inequalities method.

*Keywords: singularly perturbed problem; asymptotics; boundary function method; change of stability; differential inequality method.*

**References**

1. Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. *Asimptoticheskie metody v teorii singulyarnykh vozmushcheniy* (Asymptotic methods in the theory of singular perturbations). Moscow, Vysshaya shkola, 1990, 207 p. (in Russ.).

2. Butuzov V.F., Nefedov N.N., Shnaider K.R. Singulyarno vozmushchennye zadachi v sluchae smeny ustoychivosti (Singular perturbed problems in the case of stability change). *Itogi nauki i tekhniki. Sovrem. matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory. T. 109. Differents. uravneniya. Singulyarnye vozmushcheniya* (Advances in Science and Engineering. Modern Mathematics and Its Applications. Subject Surveys. Vol. 109. Differential Equations. Singular Perturbations), Moscow, VINITI Publ., 2002. (in Russ.).

3. Butuzov V.F., Terent'ev M.A. System of singularly perturbed equations in the case of intersecting roots of a degenerate system. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2002, Vol. 42, no. 11, pp. 1622–1635.

***Received March 1, 2019***