УДК 517.956.35 DOI: 10.14529/mmph190201

О СЛАБЫХ РЕШЕНИЯХ НАГРУЖЕННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

О.Л. Бозиев[1,2]

[1] *Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик, Российская Федерация*

[2] *Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, г. Нальчик, Российская Федерация*

E-mail: boziev@yandex.ru

Рассматривается смешанная задача с однородными краевыми условиями для нагруженного волнового уравнения, содержащего интеграл по пространственной переменной от натуральной степени модуля решения. Вводится определение слабого решения данной задачи, для которого исследуются вопросы существования и единственности. Для доказательства существования решения используется метод компактности, который формально заключается в том, что при доказательстве сходимости приближенного решения, построенного методом Галеркина, существенно используются вполне непрерывные вложения пространств Соболева. Для использования метода необходимы априорные оценки решения задачи, которые частично установлены в предыдущих работах автора и в предлагаемой статье. Вслед за этим строятся приближенные галеркинские решения. Существование приближенных решений доказывается с помощью теоремы существования для обыкновенных дифференциальных уравнений. После этого производится предельный переход, соответствующий устремлению размерности пространства к бесконечности. Здесь возникает основная трудность применения метода, связанная с нелинейностью уравнения и состоящая в доказательстве компактности семейства приближенных решений. Для этого используются теоремы о компактности вложения пространств Соболева заданного порядка в пространства Соболева меньшего порядка. Единственность слабого решения доказывается стандартной процедурой из теории линейных и нелинейных гиперболических уравнений.

Ключевые слова: нагруженные уравнения в частных производных; априорные оценки; слабое решение; существование и единственность.

Введение

В работе [1] для решения смешанной задачи с однородными краевыми условиями для нагруженного гиперболического уравнения, аппроксимирующего дифференциальное уравнение в частных производных с натуральной степенной нелинейностью, был предложен приближенно-аналитический метод. Его особенностью является использование априорных оценок решения соответственной начально-краевой задачи для линеаризации обыкновенного дифференциального уравнения, ассоциированного с исходным. Решение задачи Коши для последнего используется для записи приближенного решения нагруженной задачи. Полученное описанным способом решение используется для запуска итерационного процесса нахождения «достаточно точного» приближенного решения нелинейной задачи с однородными начальными условиями. В [2] метод перенесен на случай рациональной степени нелинейности младшего члена в параболическом уравнении.

В данной работе исследуются вопросы существования и единственности слабого (обобщенного) решения задачи, рассмотренной в [1] с однородными граничными условиями.

В области $Q = \{(x,t)$: $0 < x < l$, $0 < t < T\}$ рассмотрим нагруженное уравнение с натуральной степенью $p \geq 3$:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + b u_t \int_{\Omega} |u|^p dx = 0, a > 1, b > 0, \Omega = [0, l]. \tag{1}$$

Оно может служить для аппроксимации нелинейного уравнения

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + b|u|^p u_t = 0,$$

возникающего в задачах управления, а также моделирующего некоторые нелинейные физические процессы. Константы a и b являются параметрами моделируемого процесса. Уравнения различного типа и порядка с интегральной нагрузкой, аналогичной используемой в (1), представляют и самостоятельный интерес, в силу того, что ими моделируются, например, процессы долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и почвенной влаги, переноса частиц, некоторые задачи оптимального управления.

Требуется найти интегрируемую функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Q, а также при $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in L_p(\Omega)$ условиям:

$$u(x,0) = \varphi_1(x), u_t(x,0) = \varphi_2(x), 0 \le x \le l; \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, 0 \le t \le T. \tag{3}$$

1. Априорные оценки

Всюду $\|v\|_{p,\Omega}^p = \int_\Omega |v|^p\, dx$ выражает норму функции $v(t)$ в пространстве $L_p(\Omega)$, $u_{mt} = \partial u_m / \partial t$.

Умножая (1) скалярно на u_t и применяя стандартные для подобных случаев несложные преобразования, легко получить неравенства, выполняющиеся для всех значений $t \in [0, T]$

$$\int_\Omega (u_t^2 + a^2 u_x^2) dx \le C_1(t), \ \|u_t\|_{2,\Omega}^2 \le C_1(t), \ \|u_x\|_{2,\Omega}^2 \le \frac{C_1(t)}{a^2}, \ 0 \le t \le T. \tag{4}$$

Далее, в предположении $u \in L_{p-2}(\Omega)$ умножим уравнение (1) скалярно на функцию u^{p-1}. Элементарные преобразования и умножение его на $\mathrm{sgn}^p u$, приводят к уравнению

$$\frac{1}{p}\frac{d^2}{dt^2}\|u\|_{p,\Omega}^p + \frac{b}{2p}\frac{d}{dt}\|u\|_{p,\Omega}^{2p} = (p-1)\int_\Omega |u|^{p-2}\left(u_t^2 - a^2 u_x^2\right)dx,$$

после интегрирования которого по t получаем

$$\frac{d}{dt}\|u\|_{p,\Omega}^p + \frac{b}{2}\|u\|_{p,\Omega}^{2p} = p(p-1)\int_0^t\int_\Omega |u|^{p-2}\left(u_t^2 - a^2 u_x^2\right)dxdt + \frac{d}{dt}\|u(x,0)\|_{p,\Omega}^p + \frac{b}{2}\|u(x,0)\|_{p,\Omega}^{2p}.$$

Рассмотрим отдельно первое слагаемое в правой части. Применяяг к нему неравенство Гёльдера, в котором $s = q/(q-1)$, получаем при $q = 1$ в силу первого из (4)

$$\int_0^t\int_\Omega |u|^{p-2}(u_t^2 - a^2 u_x^2)dxdt \le \left(\int_0^t \left|\|u\|_{p,\Omega}^{p-2}\right|^s dt\right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_0^t \left|\int_\Omega \left|u_t^2 - a^2 u_x^2\right| dx\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \sup_{x\in\Omega} ess \left|\int_\Omega |u|^{p-2}dx\right| \cdot \int_0^t \left|\int_\Omega \left|u_t^2 + a^2 u_x^2\right| dx\right| dt \le \sup_{x\in\Omega} ess \|u\|_{p-2,\Omega}^{p-2} \cdot tC_1.$$

К первому сомножителю применим последовательно неравенство Фридрихса и третье из (4):

$$\sup_{x\in\Omega} ess \|u\|_{p-2,\Omega}^{p-2} \le K_1 \sup_{x\in\Omega} ess \|u_x\|_{2,\Omega}^{p-2} \le K_1 \left(\frac{C_1}{a^2}\right)^{p-2}.$$

В итоге оказывается, что

$$\int_0^t\int_\Omega |u|^{p-2}(u_t^2 - a^2 u_x^2)dxdt \le tC_1K_1\left(\frac{C_1}{a^2}\right)^{p-2} = \frac{C_1^{p-1}K_1}{a^{2(p-2)}}t.$$

Это позволяет перейти к неравенству

$$\frac{d}{dt}\|u\|_{p,\Omega}^p + \frac{b}{2}\|u\|_{p,\Omega}^{2p} \le p(p-1)\frac{C_1^{p-1}K_1}{a^{2(p-2)}}t + \frac{b}{2}\|\varphi_1\|_{p,\Omega}^{2p},$$

после очередного интегрирования приводящего к соотношению

$$\|u\|_{2,\Omega}^{p} \le \frac{b}{2}\int_0^t \|u\|_{p,\Omega}^{2p} dt + K_2.$$

Применяя к нему нелинейный аналог неравенства Гронуолла [3, с. 22], видим, что

$$\|u\|_{p,\Omega}^{p} \le C_2, \tag{5}$$

где при всех $t \in [0, T]$ в силу (2)

$$C_2 = \frac{2K_2}{2 + bK_2T},\ K_2 \ge p(p-1)\frac{C_1^{p-1}K_1}{2a^{2(p-2)}}t^2 + \frac{b}{2}t\|\varphi_1\|_{p,\Omega}^{2p} + \|\varphi_1\|_{p,\Omega}^{p}.$$

Для получения еще одной оценки необходимо умножить (1) скалярно на $\|u\|_{p,\Omega}^{p} u_t$. Полученное уравнение после элементарных преобразований примет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\|u\|_{p,\Omega}^{p}\left(\int_\Omega u_t^2 dx + a^2\int_\Omega u_x^2 dx\right)\right) + 2b\int_\Omega \left(\|u\|_{p,\Omega}^{p} u_t\right)^2 dx = \left(\int_\Omega u_t^2 dx + a^2\int_\Omega u_x^2 dx\right)\frac{d}{dt}\|u\|_{p,\Omega}^{p}.$$

Проинтегрируем его на интервале $[0, t]$:

$$\|u\|_{p,\Omega}^{p}\left(\int_\Omega u_t^2 dx + a^2\int_\Omega u_x^2 dx\right) + 2b\int_0^t\int_\Omega \left(\|u\|_{p,\Omega}^{p} u_t\right)^2 dxdt =$$

$$= \int_0^t \frac{d}{dt}\|u\|_{p,\Omega}^{p}\int_\Omega \left(u_t^2 + a^2u_x^2\right)dxdt + \|u(x,0)\|_{p,\Omega}^{p}\int_\Omega \left(u_t^2(x,0) + a^2u_x^2(x,0)\right)dx.$$

Оба слагаемых правой части ограничены в силу (4) и (5):

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\|u\|_{p,\Omega}^{p}\int_\Omega \left(u_t^2 + a^2u_x^2\right)dxdt \le C_1\int_0^t d\left(\|u\|_{p,\Omega}^{p}\right) \le C_1\left(\|u(x,t)\|_{p,\Omega}^{p} - \|u(x,0)\|_{p,\Omega}^{p}\right) \le$$

$$\le C_1\left(\|u\|_{p,\Omega}^{p} + \|\varphi_1(x)\|_{p,\Omega}^{p}\right) \le C_1\left(C_2 + \|\varphi_1\|_{p,\Omega}^{p}\right);$$

$$\|u(x,0)\|_{p,\Omega}^{p}\int_\Omega \left(u_t^2(x,0) + a^2u_x^2(x,0)\right)dx = \|\varphi_1(x)\|_{p,\Omega}^{p}\left(\|\varphi_2\|_{2,\Omega}^{2} + a^2\|u_x(x,0)\|_{2,\Omega}^{2}\right) \le$$

$$\le \|\varphi_1\|_{p,\Omega}^{p}\left(\|\varphi_2\|_{2,\Omega}^{2} + C_1(0)\right).$$

Возвращаясь к последнему равенству и опуская в его левой части первое слагаемое, убеждаемся, что

$$\int_0^t\int_\Omega \left|\|u\|_{p,\Omega}^{p} u_t\right|^2 dxdt \le C_3(t); \tag{6}$$

$$C_3(t) = C_1(t)C_2 + \|\varphi_1\|_{p,\Omega}^{p}\left(\|\varphi_2\|_{2,\Omega}^{2} + C_1(t) + C_1(0)\right).$$

2. Существование слабого решения

Определение. Слабым решением задачи (1)–(3) назовем удовлетворяющую первому условию (2) функцию $u \in L_\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, которая при $u_t \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ и всякого $w \in H_0^1(\Omega)$ удовлетворяет также тождеству

$$\left(u_t, w\right) + \int_0^t \left(a^2\left(u_x, w_x\right) + b\left(\|u\|_{p,\Omega}^{p} u_t, w\right)\right)dt = \left(\varphi_2, w\right).$$

Для доказательства существования слабого решения задачи воспользуемся методом Бубнова–Галеркина. Пусть функции $w_j(x)$, j = 1, 2, ..., образуют базис пространства $H_0^1(\Omega)$. Определим приближенное решение поставленной задачи как

$$u_m = \sum_{j=1}^{m} g_j(t)w_j(x),$$

с дважды непрерывно дифференцируемыми функциями $g_j(t)$, являющимися решением задачи:

$$\left(u_{mt},w_j\right)+a^2\left(u_{mx},w_{jx}\right)+b\left(\|u_m\|^p_{p,\Omega}u_{mt}\ ,w_j\right)=0,\ 1\le j\le m; \tag{7}$$

$$u_m(x,0)=\varphi_{1m}(x)=\sum_{j=1}^m\varphi_{1j}w_j(x)\to\varphi_1(x)\ \text{ в }\ H_0^1(\Omega)\ \text{ при }\ m\to\infty; \tag{8}$$

$$u_{mt}(x,0)=\varphi_{2m}(x)=\sum_{j=1}^m\varphi_{2m}w_j(x)\to\varphi_2(x)\ \text{ в }\ L_2(\Omega)\ \text{ при }\ m\to\infty. \tag{9}$$

Задача Коши (8), (9) для системы дифференциальных уравнений (7) может быть записана в виде:

$$W_mg''_m+bA_mg'_m+a^2W'_mg_m=0,\ g_j(0)=\varphi_{1j},\ g'_j(0)=\varphi_{2j},1\le j\le m,$$

где входящие в последнее уравнение матрицы определяются как

$$W_m=\left\|(w_i,w_j)\right\|,W'_m=\left\|(w'_i,w'_j)\right\|,\ A_m=\left\|\left(\|u_m\|^p_{p,\Omega}w_i,w_j\right)\right\|,\ g_m=\left\|g_j\right\|.$$

Так как $\det W_m\ne 0$, то задача (7)–(9) имеет единственное абсолютно непрерывное решение.

Норма функции u_m, входящая в (7), определяется следующим образом:

$$\|u_m\|^p_{p,\Omega}=\int_\Omega|u_m(x,t)|^p\,dx=\int_\Omega\left|\sum_{j=1}^m g_j(t)w_j(x)\right|^p dx=\sum_{j=1}^m|g_j(t)|^p\int_\Omega|w_j(x)|^p dx.$$

Убедимся в справедливости некоторых вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Пусть функции u и u_t удовлетворяют определению слабого решения. Тогда:

$$u_m\to u\ \text{ сильно в }\ L_\infty(0,T;H_0^1(\Omega)); \tag{10}$$

$$u_{mt}\to u_t\ \text{ сильно в }\ L_\infty(0,T;L_2(\Omega)). \tag{11}$$

Доказательство. Допустим, что каждая из функций u_m и u_n является приближенным решением задачи (7)–(9). Разность уравнений (7), записанных для каждой из них, дает следующее уравнение с функцией $v=u_m-u_n$:

$$\left(v_{tt},w_j\right)+a^2\left(v_x,w_{jx}\right)+b\left(\|u_m\|^p_{p,\Omega}u_{mt}-\|u_n\|^p_{p,\Omega}u_{nt},w_j\right)=0.$$

Найдем разность уравнений, полученных умножением последнего на g'_j для каждого j и суммированием соответственно от 1 до m и n:

$$\left(v_{tt},v_t\right)+a^2\left(v_x,v_{xt}\right)+b\left(\|u_m\|^p_{p,\Omega}u_{mt}-\|u_n\|^p_{p,\Omega}u_{nt},v_t\right)=0.$$

С помощью элементарных преобразований отсюда легко получить уравнение

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\left(v_t^2+a^2v_x^2\right)dx+b\|u_n\|^p_{p,\Omega}\int_\Omega v_t^2dx+b\left(\|u_m\|^p_{p,\Omega}-\|u_n\|^p_{p,\Omega}\right)\int_\Omega v_tu_{mt}dx=0,$$

интегрирование которого по t приводит к следующему:

$$\int_\Omega\left(v_t^2+a^2v_x^2\right)dx+2b\int_0^t|\delta_n|\int_\Omega v_t^2dxdt+2b\int_0^t\left(\|u_m\|^p_{p,\Omega}-\|u_n\|^p_{p,\Omega}\right)\int_\Omega v_tu_{mt}dxdt\ =F_{mn};$$

$$F_{mn}=\int_\Omega\left(v_t^2(x,0)+a^2v_x^2(x,0)\right)dx=\int_\Omega\left(\left(\varphi_{2m}-\varphi_{2n}\right)^2+a^2\left(\varphi'_{1m}-\varphi'_{1n}\right)^2\right)dx.$$

Заметим, что в силу (8) и (9):

$$F_{mn}\to 0\ \text{ при }m,n\to\infty. \tag{12}$$

Далее, перейдем от последнего равенства к неравенству:

$$\int_\Omega\left(v_t^2+a^2v_x^2\right)dx\le 2b\int_0^t\left|\|u_m\|^p_{p,\Omega}-\|u_n\|^p_{p,\Omega}\right|\left|\int_\Omega v_tu_{mt}dx\right|dt+F_{mn}. \tag{13}$$

К модулю разности под знаком интеграла в правой части применим установленную в [4] оценку, которая в данном случае имеет вид:

$$\left| \left\| u_m \right\|_{p,\Omega}^p - \left\| u_n \right\|_{p,\Omega}^p \right| \le pC_4(t)\sqrt{l}\sqrt{\int_\Omega \left| u_m - u_n \right|^2 dx}. \qquad (14)$$

Для продолжения (14) воспользуемся неравенством Фридрихса [5]:

$$\left| \left\| u_m \right\|_{p,\Omega}^p - \left\| u_n \right\|_{p,\Omega}^p \right| \le pC_4(t)\sqrt{l}\sqrt{\int_\Omega |v|^2 dx} \le \frac{pC_4(t)\sqrt{l^3}}{2\sqrt{2}}\sqrt{\int_\Omega |v_x|^2 dx}.$$

Оценим второй сомножитель под знаком интеграла в правой части (13):

$$\left| \int_\Omega v_t u_{mt} dx \right| \le \int_\Omega |v_t u_{mt}| dx \le \sqrt{\int_\Omega v_t^2 dx}\sqrt{\int_\Omega u_{mt}^2 dx} \le \sqrt{C_1}\sqrt{\int_\Omega v_t^2 dx}.$$

Тогда для первого слагаемого в правой части (13) можно записать:

$$2b\int_0^t \left| \left\| u_m \right\|_{p,\Omega}^p - \left\| u_n \right\|_{p,\Omega}^p \right| \left| \int_\Omega v_t u_{mt} dx \right| dt \le C_5 \int_0^t \sqrt{\int_\Omega |v_x|^2 dx}\sqrt{\int_\Omega v_t^2 dx} dt \le C_5 \int_0^t \int_\Omega \left(v_x^2 + a^2 v_t^2 \right) dx dt,$$

$$C_5 = \frac{bp\sqrt{l^3}}{\sqrt{2}} \max_{t\in[0,T]} C_4(t) \max_{t\in[0,T]} \sqrt{C_1(t)}.$$

Вернемся к (13) и убедимся в выполнении неравенства

$$\int_\Omega \left(v_t^2 + a^2 v_x^2 \right) dx \le C_5 \int_0^t \int_\Omega \left(v_t^2 + a^2 v_x^2 \right) dx dt + F_{mn}.$$

Лемма Гронуолла [3, с. 9], примененная к последнему, приводит к оценке:

$$\int_\Omega \left(v_t^2 + a^2 v_x^2 \right) dx \le F_{mn} e^{C_5 t},$$

которая с использованием (8), (9) и (12) при $m, n \to \infty$ дает

$$\int_\Omega \left((u_{mt} - u_{nt})^2 + a^2 (u_{mx} - u_{nx})^2 \right) dx \to 0.$$

Отсюда следует выполнение (10) и (11). Таким образом, лемма доказана.

Лемма 2. Пусть последовательность u_m сходится сильно к функции u в $L_2(Q)$. Тогда

$$\left\| u_m \right\|_{p,\Omega}^p \to \left\| u \right\|_{p,\Omega}^p \text{ сильно в } L_2(Q). \qquad (15)$$

Доказательство. Сходимость следует из оценки (14).

Перейдем к доказательству существования слабого решения задачи.

Теорема 1. Слабое решение задачи (1)–(3) существует при $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi_2 \in L_2(\Omega)$.

Доказательство. Скалярное произведение (8) с $g'_{jm}(t)$ и суммирование по j дает уравнение

$$\left(u_{mtt}, u_{mt} \right) + a^2 \left(u_{mx}, u_{mtx} \right) + b\left(\left\| u_m \right\|_{p,\Omega}^p u_{mt}, u_{mt} \right) = 0.$$

Так как последовательность u_m является точным решением задачи (1)–(3) при $\varphi_1(x) = \varphi_{1m}(x)$, $\varphi_2(x) = \varphi_{2m}(x)$, то для нее априорные оценки (4) принимают вид:

$$\left\| u_{mx} \right\|_{2,\Omega}^2 \le \frac{C_1(t)}{a^2}, \ \left\| u_{mt} \right\|_{2,\Omega}^2 \le C_1(t). \qquad (16)$$

В силу первого из (16) существует подпоследовательность u_μ такая, что

$$u_\mu \to u \text{ слабо в } L_\infty\left(0,T; H_0^1(\Omega) \right). \qquad (17)$$

Заметим также, что

$$L_\infty\left(0,T;\ H_0^1(\Omega) \right) \subset H_0^1\left(0,T; H_0^1(\Omega) \right) = H_0^1(Q),$$

т.е. u_m принадлежит и множеству, ограниченному в $H_0^1(Q)$. Используя компактность вложения $H_0^1(Q)$ в $L_2(Q)$, отсюда можно заключить, что

$$u_\mu \to u \text{ сильно в } L_2(Q) \text{ и почти всюду}. \qquad (18)$$

В свою очередь, в силу второго из (16) следует, что при $m \to \infty$ функция u_{mt} принадлежит множеству, ограниченному в $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$. При этом выполняется включение

$$L_\infty(0,T;L_2(\Omega)) \subset L_2(0,T;L_2(\Omega)) = L_2(Q),$$

позволяющее заключить, что u_{mt} принадлежит также ограниченному в $L_2(Q)$ множеству. Следовательно, из последовательности u_{mt} можно выделить подпоследовательность $u_{\mu t}$, такую, что

$$u_{\mu t} \to u_t \text{ слабо в } L_\infty(0,T;L_2(\Omega)). \qquad (19)$$

Умножая теперь (7) на $\|u_m\|_{p,\Omega}^p g_j'(t)$ и рассуждая аналогично предыдущим случаям, приходим к оценке (6), записанной в виде

$$\int_0^t \int_\Omega \left| \|u_m\|_{p,\Omega}^p u_{mt} \right|^2 dxdt \le C_3.$$

Она означает, что существует подпоследовательность $\|u_\mu\|_{p,\Omega}^p u_{\mu t}$ такая, что

$$\|u_\mu\|_{p,\Omega}^p u_{\mu t} \to \chi \text{ слабо в } L_2(Q). \qquad (20)$$

Вернемся к (7) и перейдем в нем к пределу при $m = \mu$. Из (17), (19), (20) следует слабая сходимость в $L_\infty(0,T)$ слагаемых левой части уравнения (7):

$$(u_{\mu x}, w_{jx}) \to (u_x, w_{jx}), (u_{\mu t}, w_j) \to (u_t, w_j), \left(\|u_\mu\|_{p,\Omega}^p u_{\mu t}, w_j\right) \to (\chi, w_j).$$

Для того, чтобы функция u являлась слабым решением задачи (1)–(3), необходимо выполнение равенства $\chi = \|u\|_{p,\Omega}^p u_t$, справедливость которого следует из следующего утверждения.

Лемма 3 [6, с. 25]. Пусть Q – ограниченная область, v_μ и v – ограниченные функции из $L_p(Q)$, $1 < p < \infty$, такие, что $\|v_\mu\|_{p,Q} \le C$, $v_\mu \to v$ почти всюду в Q. Тогда $v_\mu \to v$ слабо в $L_p(Q)$.

Для применения леммы необходимо показать, что

$$\chi_\mu = \|u_\mu\|_{p,\Omega}^p u_{\mu t} \to \|u\|_{p,\Omega}^p u_t = \chi.$$

Покажем сначала с помощью лемм 1 и 2 сильную сходимость $\chi_\mu \to \chi$. В самом деле:

$$\int_0^t \int_\Omega \left(\|u_\mu\|_{p,\Omega}^p u_{\mu t} - \|u\|_{p,\Omega}^p u_t \right)^2 dxdt = \int_0^t \int_\Omega \left(\|u_\mu\|_{p,\Omega}^p u_{\mu t} - \|u\|_{p,\Omega}^p u_t + \|u_\mu\|_{p,\Omega}^p u_t - \|u_\mu\|_{p,\Omega}^p u_t \right)^2 dxdt \le$$

$$\le \int_0^t \int_\Omega \left(\|u_\mu\|_{p,\Omega}^p (u_{\mu t} - u_t) \right)^2 dxdt + \int_0^t \int_\Omega \left(u_t \left(\|u_\mu\|_{p,\Omega}^p - \|u\|_{p,\Omega}^p \right) \right)^2 dxdt.$$

В силу (5) первое слагаемое в правой части не превышает величины

$$C_2 \int_0^t \int_\Omega (u_{\mu t} - u_t)^2 dxdt \to 0, \ \mu \to \infty.$$

Во втором слагаемом в силу леммы 2:

$$\left(\|u_\mu\|_{p,\Omega}^p - \|u\|_{p,\Omega}^p \right)^2 \le p^2 C_3^2 \int_\Omega |u_\mu - u|^2 dx \to 0, \ \mu \to \infty.$$

Применяя теперь (14) и (15) убеждаемся, что

$$\|u_\mu\|_{p,\Omega}^p u_{\mu t} \to \|u\|_{p,\Omega}^p u_t \text{ сильно в } L_2(Q) \text{ и почти всюду.}$$

Следовательно

$$\|u_\mu\|_{p,\Omega}^p u_{\mu t} \to \|u\|_{p,\Omega}^p u_t \text{ слабо в } L_2(Q),$$

откуда следует, что при всех j функции u удовлетворяет уравнению

$$\left(u_t,w\right)+\int_0^t\left(a^2\left(u_x,w_x\right)+b\left(\|u\|_{p,\Omega}^p u_t,w\right)\right)dt=\left(\varphi_2,w\right),$$

а значит, является слабым решением задачи (1) – (3). Убедимся в выполнении первого из условий (2). Слабая сходимость $u_\mu(x,0)\to u(x,0)$ в $H_0^1(\Omega)$ следует из (17), а из (18) следует $u_\mu(x,0)\to\varphi_1(x)$ в $H_0^1(\Omega)$, в силу чего $u(x,0)=\varphi_1(x)$.

3. Единственность слабого решения

Теорема 2. Слабое решение задачи (1)–(3) единственно.

Доказательство. Воспользуемся процедурой, применяемой в теории линейных и нелинейных гиперболических уравнений [6, с.28]. Предположим, что задача (1)–(3) имеет два решения – u_1 и u_2. Записывая для каждого из них уравнение (1), для их разности, где $v=u_1-u_2$, получим задачу:

$$v_{tt}-a^2v_{xx}+b\left(\|u_1\|_{p,\Omega}^p u_{1t}-\|u_2\|_{p,\Omega}^p u_{2t}\right)=0; \tag{21}$$

$$v(x,0)=0,\, v_t(x,0)=0. \tag{22}$$

Будем искать решение задачи (21), (22) – функцию

$$v\in L_\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right),\ v_t\in L_\infty\left(0,T;L_2(\Omega)\right).$$

Для этого от (21) перейдем к уравнению

$$v_{tt}-a^2v_{xx}+b\|u_1\|_{p,\Omega}^p\left(u_{1t}-u_{2t}\right)+bu_{2t}\left(\|u_1\|_{p,\Omega}^p-\|u_2\|_{p,\Omega}^p\right)\ =\ 0,$$

умножая которое скалярно на v_t получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\left(v_t^2+a^2v_x^2\right)dx+b\|u_1\|_{p,\Omega}^p\int_\Omega v_t^2dx+b\left(\|u_1\|_{p,\Omega}^p-\|u_2\|_{p,\Omega}^p\right)\int_\Omega v_tu_{2t}dx=0.$$

После интегрирования его в границах от 0 до t найдём:

$$\int_\Omega\left(v_t^2+a^2v_x^2\right)dx+2b\int_0^t\|u_1\|_{p,\Omega}^p\int_\Omega v_t^2dxdt+2b\int_0^t\left(\|u_1\|_{p,\Omega}^p-\|u_2\|_{p,\Omega}^p\right)\int_\Omega v_tu_{2t}dxdt=0.$$

Далее повторяем все рассуждения, использованные при доказательстве леммы 1. После применения леммы Гронуолла в итоге получаем, что

$$\int_\Omega\left(v_t^2+a^2v_x^2\right)dx\le 0,$$

то есть

$$\int_\Omega\left(\left(u_{1t}-u_{2t}\right)^2+a^2\left(u_{1x}-u_{2x}\right)^2\right)dx\ =\ 0.$$

Для того, чтобы показать, что $u_1=u_2$, при $s\in(0,T)$ положим

$$w(x,t)=\begin{cases}-\int_t^s v(x,\sigma)d\sigma,\ t\le s,\\ 0,\ t>s.\end{cases}$$

Пусть, кроме того,

$$v_1(x,t)=\int_0^t v(x,\sigma)d\sigma,$$

откуда следует, что $w(x,t)=v_1(x,t)-v_1(x,s)$ при $t\le s$.

Рассмотрим скалярное произведение обеих частей (21) с $w(x,t)$:

$$(v_{tt},w)-a^2(v_{xx},w)=b\left(\|u_2\|_{p,\Omega}^p u_{2t}-\|u_1\|_{p,\Omega}^p u_{1t},w\right),$$

от которого перейдем к равенству

$$\frac{d}{dt}(v_t,w)-(v_t,w_t)+a^2(v_x,w_x)=b\left(\|u_2\|_{1,\Omega}\frac{\partial u_2}{\partial t}-\|u_1\|_{1,\Omega}\frac{\partial u_1}{\partial t},w\right).$$

Его интегрирование по t с учетом того, что $w(x, t) = 0$ при $t > s$, дает

$$-\int_0^s(v_t,w_t)dt-a^2\int_0^s(v_x,w_x)dt=b\int_0^s\left(\|u_2\|_{p,\Omega}^p u_{2t}-\|u_1\|_{p,\Omega}^p u_{1t},w\right)dt,$$

а так как $w_t=v,\ w(x,0)=-v_1(x,s),$ то

$$-\frac{1}{2}\left(\|v(x,s)\|_{2,\Omega}^2+a^2\|v_1(x,s)\|_{2,\Omega}^2\right)=b\int_0^s\left(\|u_2\|_{p,\Omega}^p u_{2t}-\|u_1\|_{p,\Omega}^p u_{1t},w\right)dt.$$

Правую часть полученного равенства оценим по модулю, что приводит к неравенству

$$\|v(x,s)\|_{2,\Omega}^2+a^2\|v_1(x,s)\|_{2,\Omega}^2\le 2b\int_0^s\left|\left(\|u_2\|_{p,\Omega}^p u_{2t}-\|u_1\|_{p,\Omega}^p u_{1t},w\right)\right|dt.$$

Обратимся к подынтегральному выражению в правой части, для которого имеем

$$\left|\left(\|u_2\|_{p,\Omega}^p u_{2t}-\|u_1\|_{p,\Omega}^p u_{1t},w\right)\right|\le\sup\left(\|u_1\|_{p,\Omega}^p,\|u_2\|_{p,\Omega}^p\right)\int_0^l|v||w|dx\le$$

$$\le\left(\|u_1\|_{p,\Omega}^p+\|u_2\|_{p,\Omega}^p\right)\int_0^l|v||v_1(x,t)-v_1(x,s)|dx\le\left(\|u_1\|_{p,\Omega}^p+\|u_2\|_{p,\Omega}^p\right)\int_0^l|v||v_1(x,t)+v_1(x,s)|dx.$$

Усилим последнее неравенство, оценивая слагаемые в первом сомножителе с помощью (5), а ко второму сомножителю применяя неравенства Гельдера и Фридрихса:

$$\left|\left(\|u_2\|_{p,\Omega}^p u_{2t}-\|u_1\|_{p,\Omega}^p u_{1t},w\right)\right|\le 2C_2\|v\|_{2,\Omega}\|v_1(x,t)+v_1(x,s)\|_{2,\Omega}\le\frac{lC_1(t)}{8a^2}\left(\|v\|_{2,\Omega}^2+a^2\|v_{1x}\|_{2,\Omega}^2\right).$$

Отсюда следует, что

$$\|v(x,s)\|_{2,\Omega}^2+a^2\|v_1(x,s)\|_{2,\Omega}^2\le\frac{lbC_1(t)}{4a^2}\int_0^s\left(\|v(x,s)\|_{2,\Omega}^2+a^2\|v_1(x,s)\|_{2,\Omega}^2\right)dt.$$

Неравенство Гронуолла, примененное к последнему, приводит к равенству

$$\|v(x,s)\|_{2,\Omega}^2+a^2\|v_1(x,s)\|_{2,\Omega}^2=0,$$

откуда следует нужный нам результат:

$$v(x,s)=u_1(x,s)-u_2(x,s)=0,$$

а именно – единственность слабого решения исследуемой задачи.

Литература

1. Бозиев, О.Л. Решение нелинейного гиперболического уравнения приближенно-аналитическим методом / О.Л. Бозиев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2018. – № 51. – С. 5–14.
2. Бозиев, О.Л. Аппроксимация решений нелинейных параболических уравнений решениями ассоциированных нагруженных уравнений / О.Л. Бозиев // Нелинейный мир. – 2018. – Т. 16, № 4. – С. 3–10.
3. Филатов, А.Н. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний / А.Н. Филатов, Л.В. Шарова. – М.: Наука, 1976. – 152 с.
4. Бозиев, О.Л. Обобщение одной априорной оценки решения квазилинейного гиперболического уравнения / О.Л. Бозиев // Известия Кабардино–Балкарского научного центра РАН. – 2010. – № 2(34). – С. 106–110.
5. Андреев, В.К. О неравенстве типа Фридрихса для составных областей / В.К. Андреев // Журнал Сибирского федерального университета. Серия «Математика и физика». – 2009. – Т. 2, Вып. 2. – С. 146–157.
6. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 587 с.

Поступила в редакцию 24 января 2019 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2019, vol. 11, no. 2, pp. 5–13

DOI: 10.14529/mmph190201

ON WEAK SOLUTIONS OF LOADED HYPERBOLIC EQUATION WITH HOMOGENEOUS BOUNDARY CONDITIONS

***O.L. Boziev*[1,2]**
[1] *Institute of Computer Science and Problems of Regional Management of KBSC of the Russian Academy of Sciences, Nal'chik, Russian Federation*
[2] *Kabardino-Balkar State University, Nal'chik, Russian Federation*
E-mail: boziev@yandex.ru

A mixed problem with homogeneous boundary conditions is considered for the loaded wave equation containing an integral over the spatial variable from the natural degree of the solution module. The definition of the weak solution of this problem is introduced, for which the questions of existence and uniqueness are studied. The compactness method is used to prove the existence of the solution. The idea of the method is that when proving the convergence of an approximate solution built by the Galerkin method, completely continuous embeddings of Sobolev spaces are essentially used. A priori estimates of the solution of the problem are necessary for use this method. Those estimates are partially established in the previous works of the author, and partially are established in the proposed article. Following this, the approximate Galerkin solutions are built. The existence of approximate solutions is proved by the existence theorem for ordinary differential equations. After that, a limit transition is made, as corresponding to the aspiration of the space dimension to infinity. Here comes the main difficulty of applying this method. It is related to the nonlinearity of the equation and consists in proving the compactness of the family of approximate solutions. For this purpose, theorems on the compactness of embedding Sobolev spaces of a given order in Sobolev spaces of a smaller order are used. The uniqueness of the weak solution is proved by a standard procedure from the theory of linear and nonlinear hyperbolic equations.

Keywords: loaded partial differential equations; a priori estimates; weak solution; existence and uniqueness.

References

1. Boziev O.L. Solution of nonlinear hyperbolic equations by an approximate analytical method. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2018, Vol. 51, pp. 5–14. (in Russ.). DOI: 10.17223/19988621/51/1

2. Boziev O.L. Approximation of nonlinear parabolic equations solutions by solutions of associated loaded equations. *Journal Nonlinear World*, 2018, Vol. 16, no. 4, pp. 3–10. (in Russ.).

3. Filatov A.N., Sharova L.V. *Integral'nye neravenstva i teoriya nelineynykh kolebaniy* (Integral inequalities and the theory of nonlinear oscillations). Moscow, Nauka Publ., 1976, 152 p. (in Russ.).

4. Boziev O.L. *Izvestiya Kabardino–Balkarskogo nauchnogo tsentra RAN*, 2010, no. 2(34), pp. 106–110. (in Russ.).

5. Andreev V.K. On Inequalities of the Friedrichs type for Combined Domains. *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2009, Vol. 2, Issue 2, pp. 146–157. (in Russ.).

6. Lions J.L. *Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires*. Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969, 554 p.

Received January 24, 2019