УДК 517.95 DOI: 10.14529/mmph190305

О РЕШЕНИЯХ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ШВАРЦА В ВИДЕ ВЕКТОР-ПОЛИНОМОВ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

В.Г. Николаев
Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого, г. Великий Новгород, Российская Федерация
E-mail: vg14@inbox.ru

Рассмотрена однородная задача Шварца для вектор-функций, аналитических по Дуглису. Данные функции являются решениями однородной эллиптической системы в частных производных первого порядка, которая зависит от матрицы с комплексными коэффициентами. Предполагается, что определитель комплексной части этой матрицы отличен от нуля. Показано, что реальная часть функции, аналитической по Дуглису, будет решением некоторой однородной системы второго порядка в частных производных. Зная решение задачи Дирихле для данной системы, можно построить решение задачи Шварца, соответствующее исходной матрице. Нужное решение задачи Дирихле ищем в виде вектор-полинома второй степени с линейно зависимыми компонентами. После подстановки такой функции в полученную систему уравнений в частных производных получаем однородную вещественную алгебраическую систему. Эта система имеет ненулевые решения только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Приравнивая к нулю соответствующий определитель, получаем алгебраическое уравнение с двумя переменными. Далее доказывается основная теорема о том, что существование произвольного ненулевого вещественного решения данного алгебраического уравнения является необходимым и достаточным условием существования соответствующего исходной матрице решения однородной задачи Шварца в виде вектор-полинома второй степени. В заключение статьи построен пример.

Ключевые слова: матрица; J-аналитическая функция; вектор-полином; квадратичная форма; эллипс; система алгебраических уравнений.

1. Постановка задачи

Пусть все собственные числа $n\times n$-матрицы J имеют ненулевые комплексные части.

Определение 1. [1–3] *Аналитической по Дуглису* (*A. Douglis*), *или J-аналитической с матрицей* J, *назовем комплексную* n*-вектор-функцию* $\phi=\phi(z)\in C^1(D)$, *которая в области* $D\subset \mathrm{R}^2$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}-J\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x}=0. \qquad (1)$$

Определение 2. *Будем говорить, что функция* $\phi(z)$ *соответствует матрице* J, *если выполнено уравнение* (1).

Как показано в [1], система уравнений в частных производных первого порядка (1) является эллиптической. Рассмотрим для системы (1) следующую однородную задачу Шварца [2, 3].

Пусть конечная область $D\subset \mathrm{R}^2$ *ограничена контуром* Γ. *Требуется найти J-аналитическую с известной матрицей* J *в области* D *вектор-функцию* $\phi(z)\in C(\overline{D})$, *для которой выполнено граничное условие*

$$\mathrm{Re}\phi(z)|_{\Gamma}=0. \qquad (2)$$

Очевидными решениями задачи (2) являются постоянные функции $\phi(z)\equiv ic$, где $c\in \mathrm{R}^n$. Если $n=1$, то частным случаем J-аналитических функций при $J=i$ будут скалярные голоморфные функции [4]. Для них задача (2), как известно [4], имеет только постоянное (или тривиальное) решение $\phi(z)\equiv ic$, где $c\in \mathrm{R}$. Но при $n\geq 2$ ситуация кардинально меняется – задача (2) может иметь решения в виде вектор-полиномов. Приведем пример.

Пример 1. Пусть

$$J=\begin{pmatrix}-i & 4\\ 1 & 3i\end{pmatrix},\quad \phi(z)=\begin{pmatrix}-4i(x^2+y^2)\\ x^2+3y^2-1-2xyi\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Матрица J в (3) имеет кратное собственное число $\lambda=i$. Здесь вектор-полином второй степени $\phi(z)$ будет функцией, J-аналитической с данной матрицей J, что проверяется непосредственной подстановкой в (1). При этом $\operatorname{Re}\phi(z)|_\Gamma=0$ на эллипсе $x^2+3y^2=1$.

В пункте 3 приведен общий метод построения аналогичных примеров.

Замечание 1. Сложность задачи (2) состоит именно в *конечности* области D. Если D неограничена, то построение нетривиальных решений задачи (2) не представляет каких-либо трудностей. Например, пусть $n=1$, $J=i$, $f(z)=z^2-1=x^2-y^2-1+2xyi$. Тогда $\operatorname{Re}f(z)|_\Gamma=0$ на гиперболе $\Gamma: x^2-y^2=1$.

2. Преобразование уравнения (1) к системе второго порядка

Выполним некоторые предварительные преобразования. Запишем n-вектор-функцию $\phi(z)$ в виде $\phi(z)=\mathrm{u}(x,y)+i\,\mathrm{v}(x,y)$, где $\mathrm{u}(x,y),\mathrm{v}(x,y)$ – вещественные n-вектор-функции. Также введем следующие обозначения:

$$J=A+Bi,\quad A,B\in \mathrm{R}^{n\times n},\quad \det B\neq 0. \tag{4}$$

Подставим матрицу (4) в уравнение (1), после чего приравняем к нулю действительные и мнимые части в получившемся выражении. Имеем:

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}-A\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}+B\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}-A\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}-B\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}=0. \tag{5}$$

Выразим из уравнений (5) частные производные функции $\mathrm{v}=\mathrm{v}(x,y)$ через частные производные функции $\mathrm{u}=\mathrm{u}(x,y)$:

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}=B^{-1}A\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}-B^{-1}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y},\quad \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}=(B+AB^{-1}A)\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}-AB^{-1}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}. \tag{6}$$

С учетом условия замкнутости

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} \tag{7}$$

из уравнений (6) вытекает следующее равенство:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[B^{-1}A\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}-B^{-1}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[(B+AB^{-1}A)\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}-AB^{-1}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}\right]. \tag{8}$$

Применим в (8) операторы дифференцирования, после чего обе части равенства умножим слева на матрицу B. В результате получим следующую однородную $n\times n$-систему уравнений в частных производных второго порядка:

$$(B^2+BAB^{-1}A)\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2}-B\cdot(AB^{-1}+B^{-1}A)\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial y^2}=0. \tag{9}$$

Относительно системы (9) докажем приведенную ниже теорему.

Теорема 1. *Справедливы следующие два утверждения.*

1) Если $\phi(z)=\mathrm{u}(x,y)+i\,\mathrm{v}(x,y)$ – решение однородной задачи Шварца (2), соответствующее матрице $J=A+Bi$, $\det B\neq 0$, то функция $\mathrm{u}(x,y)$ будет решением однородной задачи Дирихле

$$\mathrm{u}(x,y)|_\Gamma=0 \tag{10}$$

для системы (9);

2) если существует решение задачи (10) для системы (9) в виде вектор-полинома $\mathrm{u}=\mathrm{u}(x,y)$, то можно однозначно восстановить функцию $\phi=\mathrm{u}+i\,\mathrm{v}$ как решение задачи (2), соответствующее матрице $J=A+Bi$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из алгоритма построения системы (9). Для доказательства пункта 2) заметим, что если функция $\mathrm{u}(x,y)$ – решение (9), то она есть решение системы (8). При этом с учетом (8) для функций $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}$ вида (6) выполнены условия замкнутости (7). Поэтому вектор-функцию $\mathrm{v} = \mathrm{v}(x,y)$ при заданной функции $\mathrm{u} = \mathrm{u}(x,y)$ можно покоординатно единственным образом (с точностью до вектор-постоянной) восстановить из уравнений (6).

Так как для полученной функции $\mathrm{v}(x,y)$ по построению выполнена пара равенств (6), то для пары функций $\mathrm{u}(x,y)$, $\mathrm{v}(x,y)$ выполнены равносильные им равенства (5). Следовательно, функция $\phi = \mathrm{u} + i\,\mathrm{v}$ соответствует исходной матрице $J = A + Bi$. При этом по построению выполнено граничное условие (2). Теорема 1 доказана.

3. Общий метод построения решений задачи (2) в виде вектор-полиномов второй степени

Опираясь на теорему 1, получим необходимое и достаточное условие существования решений однородной задачи Шварца в виде вектор-полиномов второй степени.

Замечание 2. Будем называть эллипсом не только кривую Г на плоскости, но также и область K, ограниченную кривой Г, – в зависимости от контекста. Такая договоренность упростит изложение.

Как известно, произвольный эллипс Г с центром в точке (x_0, y_0) можно задать следующим уравнением:

$$a(x-x_0)^2 + 2c(x-x_0)(y-y_0) + b(y-y_0)^2 - 1 = 0, \qquad ab - c^2 > 0. \tag{11}$$

Пусть $\phi = \mathrm{u} + i\,\mathrm{v}$ – решение задачи (2) в виде вектор-полинома второй степени в *конечной* области D. В этом случае контур Г может быть только эллипсом. Обозначим $\mathrm{u} = (\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n)$. Тогда каждое из уравнений $\mathrm{p}_1(x,y) = 0, \ldots, \mathrm{p}_n(x,y) = 0$ будет уравнением данного эллипса. Задание эллипса в виде (11) как множества точек на плоскости – единственно с точностью до множителя. Поэтому функции $\mathrm{p}_k(x,y)$, $k = 1,\ldots,n$ будут с точностью до множителя совпадать с левой частью (11) при одних и тех же параметрах a, c, b.

Для упрощения дальнейших вычислений сделаем замену переменных $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$. Тогда после элементарных преобразований с учетом (1) получим, что функция $\phi(x', y') = \mathrm{u}(x', y') + i\,\mathrm{v}(x', y')$ будет J-аналитической с той же матрицей J. Но в этом случае компоненты $\mathrm{p}_k(x', y')$, $k = 1,\ldots,n$ вектор-функции $\mathrm{u} = \mathrm{u}(x', y')$ в силу (11) с точностью до множителя примут вид $\mathrm{p}_k(x', y') = ax'^2 + 2cx'y' + by'^2 - 1$.

Таким образом, вектор-функцию $\mathrm{u}(x,y) = \mathrm{Re}\,\phi(z)$, не умаляя общности, можно искать в следующем виде:

$$\mathrm{u}(x,y) = \begin{pmatrix} t_1 \cdot (ax^2 + 2cxy + by^2 - 1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_n \cdot (ax^2 + 2cxy + by^2 - 1) \end{pmatrix}, \quad ab - c^2 > 0. \tag{12}$$

В (12) числа a, c, b, а также вектор $t = (t_1, \ldots, t_n)$ – вещественные параметры. Случай $t = 0$, то есть $u \equiv 0$, не рассматриваем как вырожденный.

Для нахождения функции $\mathrm{u}(x,y)$ подставим (12) в (9). В результате получим следующую однородную $n \times n$-систему линейных алгебраических уравнений относительно вещественных переменных $\mathrm{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ с параметрами a, c, b:

$$[a \cdot (B^2 + BAB^{-1}A) - c \cdot B \cdot (AB^{-1} + B^{-1}A) + b \cdot E] \cdot (t)^T = 0, \tag{13}$$

где через E обозначена единичная $n \times n$-матрица.

Параметры (a,c,b) для (13) находим из следующего условия. Как известно, однородная система (13) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель $\Delta(a,c,b)$ равен нулю, то есть

$$\Delta(a,c,b) = \det[a\cdot(B^2 + BAB^{-1}A) - c\cdot B\cdot(AB^{-1} + B^{-1}A) + b\cdot E] = 0. \qquad (14)$$

В (14) функция $\Delta(a,c,b)$ – полином степени n от трех переменных. Пусть (a,c,b) – такое решение (14), что $ab - c^2 > 0$. В этом случае квадратичные формы в (12) будут положительно (или отрицательно) определенными и неособыми. Поэтому все компоненты (12) будут задавать один и тот же эллипс.

Подставим ненулевое решение $\mathrm{t} = \mathrm{t}_0$ алгебраической системы (13) с этими параметрами в (12). Тем самым будет найдено решение $\mathrm{u}_0 = \mathrm{u}_0(x,y)$ задачи Дирихле (10) для системы дифференциальных уравнений (9) в эллипсе $\Gamma: ax^2 + 2cxy + by^2 = 1$.

Далее в силу теоремы 1 по функции $\mathrm{u}(x,y)$ можно восстановить восстановить функцию $\phi(z)$ как решение задачи (2) в эллипсе Г. С учетом формул (6) $\phi(z)$ будет вектор-полиномом второй степени. Сделаем замену переменных $x = x' - x_0$, $y = y' - y_0$. Тогда в силу (1) получим решение $\phi(x',y')$ задачи (2), соответствующее той же матрице J. При этом данное решение будет определено в эллипсе Г (11) с произвольным наперед заданным центром (x_0,y_0). В итоге доказано следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть выполнено равенство* (14) *при* $ab - c^2 > 0$. *Тогда существует решение* $\phi(z)$ *задачи* (2), *соответствующее матрице* $J = A + Bi$, $\det B \neq 0$. *При этом контур* Г — *эллипс, а* $\phi(z)$ *есть вектор-полином второй степени.*

Преобразуем уравнение (14). Заметим, что если $ab - c^2 > 0$, то $a \neq 0$. Поэтому можно, не умаляя общности, положить в (14) $a = 1$. Тогда неравенство $ab - c^2 > 0$ перепишется в виде $b > c^2$, что равносильно условиям

$$a = 1, \quad c = c, \quad b = c^2 + \varepsilon^2, \quad \varepsilon \neq 0. \qquad (15)$$

Замечание 3. Так, если $\varepsilon \neq 0$, то в (15) допустима так же ситуация $c = 0$.

С учетом (15) равенство (14) перепишем в следующем равносильном виде:

$$\det[B^2 + BAB^{-1}A - c\cdot B\cdot(AB^{-1} + B^{-1}A) + (c^2 + \varepsilon^2)\cdot E] = 0, \qquad \varepsilon \neq 0. \qquad (16)$$

Равенство (16) можно рассматривать как алгебраическое уравнение n-й степени относительно вещественной переменной c, где ε – вещественный параметр. При этом существенным является условие $\varepsilon \neq 0$. Относительно формулы (16) докажем следующее основное утверждение.

Теорема 2. *Существование* (*произвольного*) *вещественного решения* (c,ε), *где* $\varepsilon \neq 0$ *алгебраического уравнения* (16) *является необходимым и достаточным условием существования соответствующего данной матрице* $J = A + Bi \in C^{n\times n}$, $\det B \neq 0$ *решения* $\phi(z)$ *однородной задачи Шварца* (2) *в виде вектор-полинома второй степени.*

Доказательство. Достаточность. Пусть (c_0,ε_0), где $\varepsilon_0 \neq 0$ – вещественное решение уравнения (16). Для этого решения с учетом (15) выполнено условие леммы 1. Поэтому согласно утверждению этой леммы существует искомое решение $\phi(z)$ задачи (2).

Докажем необходимость: пусть $\phi = \mathrm{u} + i\,\mathrm{v}$ – вектор-полином второй степени, который есть решение задачи (2) в *конечной* области K с границей Г. В этом случае область K представляет собой эллипс. Обозначим, как и выше, $\mathrm{u} = (\mathrm{p}_1,\ldots,\mathrm{p}_n)$. Тогда уравнения $\mathrm{p}_1 = 0,\ldots,\mathrm{p}_n = 0$ задают один и тот же эллипс $\Gamma = \partial K$. Следовательно, функции $\mathrm{p}_k(x,y)$, $k = 1,\ldots,n$ совпадают с точностью до множителя с левой частью (11). После замены переменных $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$ вектор-функция $\mathrm{u}(x',y')$ с точностью до обозначения переменных примет вид (12). При этом $\phi = \mathrm{u} + i\,\mathrm{v}$ останется J-аналитической с той же матрицей J.

Так как для $\phi = \mathrm{u} + i\,\mathrm{v}$ выполнено равенство (1), то для $\mathrm{u} = \mathrm{u}(x', y')$ в силу преобразований пункта 2 справедливо уравнение (9). Подстановка (12) в (9) дает алгебраическую систему (13). Вектор $\mathrm{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ в (12) по условию ненулевой, так как функция $\mathrm{u}(x', y')$ не равна нулю тождественно. То есть вектор t является ненулевым решением системы (13). Следовательно, выполнено равенство (14) при $ab - c^2 > 0$. Таким образом, с учетом подстановки (15) выполнено и равносильное (14) равенство (16) при некоторых (c_0, ε_0), где $\varepsilon_0 \neq 0$, что и требовалось. Теорема 2 доказана.

4. Применение формулы (16) для построения примера 1

В качестве иллюстрации к теореме 2 построим два решения задачи (2) для матрицы J (3) из примера 1. Они будут определены в разных эллипсах. Имеем:

$$J = \begin{pmatrix} -i & 4 \\ 1 & 3i \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \det B = -3 \neq 0. \tag{17}$$

Выпишем уравнение (16) с учетом конкретных матриц A, B (17), не приводя промежуточные вычисления. При этом для упрощения вычислений положим $c = 0$:

$$\det[B^2 + BAB^{-1}A - c \cdot B \cdot (AB^{-1} + B^{-1}A) + (c^2 + \varepsilon^2) \cdot E]|_{c=0} = (-3 + \varepsilon^2) \cdot \left(-\frac{1}{3} + \varepsilon^2 \right) = 0. \tag{18}$$

Таким образом, имеем следующую пару решений уравнения (18):

$$c = 0, \;\; b = c^2 + \varepsilon^2 = 3; \quad c = 0, \;\; b = c^2 + \varepsilon^2 = \frac{1}{3}. \tag{19}$$

Как показывают вычисления, первой паре (c, b) в (19) при $a = 1$ соответствует ненулевое решение $(t_1, t_2) = (0, 1)$ алгебраической системы (13). *Матрицы* J (3) *и* (17) *совпадают.* Поэтому при полученных значениях параметров a, c, b, t_1, t_2 по функции $\mathrm{u}(x, y)$ (12) с помощью алгоритма, описанного при доказательстве пункта 2) теоремы 1, восстанавливается решение $\phi(z)$ (3) задачи (2).

Второй паре (c, b) в (19) при $a = 1$ соответствует ненулевое решение $(t_1, t_2) = (1, 0)$ системы (13). В данном случае по алгоритму теоремы 1 можно построить функцию

$$\phi_1(z) = \begin{pmatrix} x^2 + \frac{1}{3}y^2 - 1 + \frac{2}{3}xyi \\ \frac{i}{3}(x^2 + y^2) \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Функция (20) соответствует той же матрице J (3), то есть и матрице J (17). Она является решением задачи (2) в эллипсе $x^2 + \frac{1}{3}y^2 = 1$.

Литература

1. Солдатов, А.П. Функции, аналитические по Дуглису / А.П. Солдатов. – Изд-во НовГУ, 1995. – 196 с.

2. Васильев, В.Б. О задаче Шварца для эллиптических систем первого порядка на плоскости / В.Б. Васильев, В.Г. Николаев // Дифференциальные уравнения. – 2017. – Т. 53, № 10. – С. 1351–1361.

3. Nikolaev, V.G. A Criterion for the Existence of Nontrivial Solutions to the Homogeneous Schwarz Problem / V.G. Nikolaev // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 219, Iss. 2. – pp. 220–225.

4. Привалов, И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И.И. Привалов. – М.: Высшая школа, 1999. – 432 с.

Поступила в редакцию 4 июля 2019 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2019, vol. 11, no. 3, pp. 41–46

DOI: 10.14529/mmph190305

ON THE SOLUTIONS OF THE SCHWARTZ HOMOGENEOUS PROBLEM IN THE FORM OF VECTOR POLYNOMIALS OF THE SECOND DEGREE

V.G. Nikolaev
Yaroslav-the-Wise Novgorod State University, Novgorod, Russian Federation
E-mail: vg14@inbox.ru

A Schwartz homogeneous problem for vector functions being analytic as per Douglis in the final domain on plane has been considered. The function data are the solutions to a homogeneous elliptic partial-derivatives system of the first order, which depends on the matrix with complex coefficients. It is assumed that the determinant of the complex part of this matrix is different from zero. In the beginning of the article the solution to the problem under consideration is given for a bivariate case in the form of a vector polynomial of the second degree. Further transformations are made to find the general method of building such solutions. It is demonstrated that the real part of the function being analytic as per Douglis will be a solution for a certain homogeneous partial-derivatives system of the second order. Meanwhile, if we know the solution to the Dirichlet problem for this system, we can build the solution to the Schwartz problem, corresponding to the initial matrix. We are searching for the required solution to the Dirichlet problem in the form of a vector polynomial of the second degree with linearly-dependent components. After this function's substitution into the obtained system of partial-derivatives equations, we get a real homogeneous algebraic system. Such system will have nonzero solutions only in case its determinant is equal to zero. By setting the relevant determinant to zero, we get a two-variable algebraic equation. Further on, we prove a fundamental theorem that the existence of a real arbitrary nonzero solution to this algebraic equation is a necessary and sufficient condition of the existence the solution to the Schwartz homogeneous problem in the form of a vector polynomial of the second degree, corresponding to the initial matrix. In the end of the article we give an example of using the fundamental theorem to build two solutions to the studied problem, which correspond to the set matrix.

Keywords: matrix; J-analytic function; vector polynomial; quadratic form; ellipse; system of algebraic equations.

References

1. Soldatov A.P. *Funktsii, analiticheskie po Duglisu* (Functions being analytic as per Douglis). NovGU Publ., 1995, 196 p. (in Russ.).

2. Vasil'ev V.B., Nikolaev V.G. Schwarz problem for first-order elliptic systems on the plane. *Differential Equations*, 2017, Vol. 53, no. 10, pp. 1318–1328. DOI: 10.1134/s0012266117100081

3. Nikolaev V.G. A Criterion for the Existence of Nontrivial Solutions to the Homogeneous Schwarz Problem. *Journal of Mathematical Sciences*, 2016, Vol. 219, Iss. 2, pp. 220–225. DOI: 10.1007/s10958-016-3099-0

4. Privalov I.I. *Vvedenie v teoriju finktsiy kompleksnogo peremennogo* (Introduction to the theory of functions of a complex variable). Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1999, 432 p. (in Russ.).

Received July 4, 2019