Математика

УДК 512.643.8 DOI: 10.14529/mmph190301

КОММУТАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА

А.И. Барсуков, М.Ю. Глазкова, В.И. Ряжских, С.С. Сумера
Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: a.barsoukov@mail.ru

Объектом изучения представленной работы являются квадратичные матричные пучки, другими словами, квадратичные функции комплексной переменной, коэффициентами которой являются эрмитовы матрицы. Такие функции естественным образом появляются при изучении различных задач механики, геофизики и техники. В частности, при описании колебательной системы масс-струн с демпферами коэффициенты пучка характеризуют жесткости пружин и заданные демпферы. В связи с этим особый интерес вызывают так называемые обратные задачи для матричных пучков, то есть задачи построения пучков, обладающих наперед заданными свойствами. В нашей работе изучается возможность построения квадратичных пучков, допускающих разложение на коммутирующие линейные множители. Хорошо известно, что любой квадратичный пучок может быть представлен в виде произведения линейных (не обязательно коммутирующих) множителей, называемых спектральными делителями. Далее в нескольких работах последнего десятилетия было изучено описание структуры одного спектрального делителя через структуру другого. Нами получен критерий, описывающий множество спектральных делителей, для каждого из которых существует коммутирующий с ним второй спектральный делитель. Для каждого элемента этого множества описана структура всех спектральных делителей, коммутирующих с ним. Приведен критерий единственности решения этой задачи. Заметим, что условия этого критерия могут быть проверены для любой заданной квадратной матрицы. Полученные результаты позволяют строить квадратичные пучки, допускающие разложение на коммутирующие спектральные множители. Без ограничения общности предполагается, что задан левый спектральный делитель. Случай, когда задан правый спектральный делитель, сводится к рассмотренной ситуации взятием операции сопряжения.

Ключевые слова: квадратичные матричные пучки; спектральные делители; обратные задачи.

Введение и основные понятия

Пучком степени $k \in \mathbb{N}$ называется функция

$$\mathrm{L}(\lambda) = \lambda^k I + \lambda^{(k-1)} A_{n-1} + \ldots + \lambda A_1 + A_0$$

комплексного переменного λ. Объектом наших исследований будут квадратичные пучки $k = 2$ с матричными эрмитовыми коэффициентами. Там, где это удобно, мы будем рассматривать коэффициенты пучка как матрицы операторов, самосопряженных относительно скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ пространства $\mathbb{C}^n$. Общая теория таких функций изложена в [1, 2] (здесь рассмотрены пучки с произвольными самосопряженными коэффициентами в гильбертовом пространстве). Известно, например, теорема 11.2 в [1], что каждый квадратичный пучок $\mathrm{L}(\lambda) = \lambda^2 + \lambda A_1 + A_0$ может быть представлен в виде произведения $\mathrm{L}(\lambda) = (\lambda I - A)(\lambda I - X)$. Каждый из множителей в этом разложении называется спектральным делителем пучка L. Построение спектрального делителя $\lambda I - X$ по заданному спектральному делителю $\lambda I - A$ было изучено в работе [3] в случае, когда все собственные значения матрицы A простые и различные, и работе [4] – для произвольной матрицы A. Эта задача относится к классу так называемых обратных задач, которые активно исследуются в наши дни. Обзор различных типов обратных задач для матричных пучков содержится в работе [5]. Там же и в [6, 7] можно найти приложения этих задач к различным проблемам механики. Нами рассмотрена задача описания всех спектральных делителей $\lambda I - X$, коммутирующих с заданным $\lambda I - A$. Получены необходимые и достаточные условия на матрицу A, при выполнении которых эта задача имеет решение и описана структура множества решений X. Рассмотрение задачи с заданным левым спектральным делителем нисколько не ограничивает общности, так как задача с известным правым спектральным делителем легко сводится к задаче с известным левым спектральным делителем. Действительно, предположим, что задан делитель $\lambda I - X$ и нужно определить множитель $\lambda I - A$, для которого коэффициенты пучка $\mathrm{L}(\lambda) = (\lambda I - A)(\lambda I - X)$ являются эрмитовыми матрицами. Из равенства $(\lambda I - A)(\lambda I - X) = \left(\lambda I - X^*\right)\left(\lambda I - A^*\right)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ следует, что по заданному левому делителю X^* требуется найти правый делитель A^*. После этого матрица A будет решением нашей задачи.

Основные результаты

В работе было показано, как по заданной матрице A определить все матрицы X, для которых пучок $\mathrm{L}(\lambda) = (\lambda I - A)(\lambda I - X)$ имеет эрмитовы коэффициенты. В частности, было доказано, что в случае, когда $\sigma(A) \cap \sigma\left(A^*\right)$ является пустым множеством, задача имеет единственное решение $X = A^*$, а в остальных случаях решений бесконечно много. Здесь будет выделен класс решений X, коммутирующих с заданной матрицей A. В соответствии с теоремой 5 работы [4] спектральные делители $\lambda I - A$ и $\lambda I - X$ связаны равенством $X = A^* + W_0$, где W_0 является эрмитовой матрицей специального вида. Тогда условия

$$A + X = A^* + X^*,\ AX = X^* A^*,\ AX = XA \tag{1}$$

можно переписать в эквивалентном виде

$$AW_0 = W_0 A^*,\ W_0 = W_0^*,\ AA^* - A^* A = W_0\left(A - A^*\right). \tag{2}$$

Теорема 1. Пусть задана произвольная матрица A. Тогда следующие условия равносильны:

1) система (2) имеет решение W_0;

2) матрица A представима в виде $A = T\tilde{A}T^{-1}$, где $T^{-1} = T^*$,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},\ A_{22} = A_{22}^* \tag{3}$$

и матрица A_{11} удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} \left(A_{11}^* - A_{11}\right) A_{11}\left(A_{11}A_{11}^* - A_{11}^*A_{11}\right) = \left(A_{11}A_{11}^* - A_{11}^*A_{11}\right) A_{11}^*\left(A_{11} - A_{11}^*\right), \\ \left(A_{11}^* - A_{11}\right)\left(A_{11}A_{11}^* - A_{11}^*A_{11}\right) = \left(A_{11}A_{11}^* - A_{11}^*A_{11}\right)\left(A_{11} - A_{11}^*\right). \end{cases} \tag{4}$$

При выполнении условий матрица W_0 имеет вид

$$W_0 = T\begin{pmatrix} \left(A_{11}A_{11}^* - A_{11}^*A_{11}\right)\left(A_{11} - A_{11}^*\right)^{-1} & 0 \\ 0 & W_{22} \end{pmatrix} T^{-1},$$

где W_{22} – любое решение уравнения $A_{22}W_{22} = W_{22}A_{22}$.

Доказательство. Пусть матрица W_0 является решением системы (2). Рассмотрим некоторый ортонормированный базис $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \varepsilon_0\}$ пространства $\mathbb{C}^n$, где ε_1 является базисом подпространства $\operatorname{ran}\left(A^* - A\right)$, а ε_0 является базисом подпространства $\ker\left(A^* - A\right)$. Пусть T – матрица перехода от базиса ε к стандартному базису пространства. Тогда $T^{-1} = T^*$. Обозначим $\tilde{A} = T^{-1}AT$, $\tilde{W}_0 = T^{-1}W_0T$. В силу условия $T^{-1} = T^*$ равенства (2) равносильны аналогичным равенствам для матриц $\tilde{A}$ и $\tilde{W}_0$. Представим матрицу $\tilde{A}$ в виде

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

В силу выбора базиса ε выполнены равенства $A_{21} = A_{12}^*$, $A_{22} = A_{22}^*$.

Так как $\tilde{W}_0\left(\tilde{A}^* - \tilde{A}\right) = \left(\tilde{W}_0\left(\tilde{A}^* - \tilde{A}\right)\right)^* = \left(\tilde{A} - \tilde{A}^*\right)\tilde{W}_0$ и матрица $A_{11}^* - A_{11}$ невырождена, то матрица $\tilde{W}_0$ имеет блочно-диагональную форму:

$$\tilde{W}_0 = \begin{pmatrix} W_{11} & 0 \\ 0 & W_{22} \end{pmatrix}.$$

Теперь система (2) для матриц $\tilde{A}$ и $\tilde{W}_0$ принимает вид

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_{11} & 0 \\ 0 & W_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11} & 0 \\ 0 & W_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}, W_{11} = W_{11}^*, W_{22} = W_{22}^*; \\ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11}\left(A - A^*\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{5}$$

Приравнивая правые верхние элементы в последнем равенстве системы (5), получаем $\left(A_{11} - A_{11}^*\right)A_{12} = 0$. Это означает, что $A_{12} = 0$ и мы можем записать систему, равносильную системе (5):

$$\begin{cases} A_{12} = 0,\ A_{22}W_{22} = W_{22}A_{22},\ A_{11}W_{11} = W_{11}A_{11}^*, \\ W_{11} = W_{11}^*,\ A_{11}A_{11}^* - A_{11}^*A_{11} = W_{11}\left(A_{11} - A_{11}^*\right). \end{cases} \tag{6}$$

Заметим, что уравнение $A_{22}W_{22} = W_{22}A_{22}$ имеет решение W_{22} для любой матрицы A_{22}. Следовательно, система (6) имеет решение тогда и только тогда, когда A_{11} удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} A_{11}\left(A_{11}A_{11}^* - A_{11}^*A_{11}\right)\left(A_{11} - A_{11}^*\right)^{-1} = \left(A_{11}A_{11}^* - A_{11}^*A_{11}\right)\left(A_{11} - A_{11}^*\right)^{-1} A_{11}^*, \\ \left(A_{11}A_{11}^* - A_{11}^*A_{11}\right)\left(A_{11} - A_{11}^*\right)^{-1} = \left(A_{11}^* - A_{11}\right)^{-1}\left(A_{11}A_{11}^* - A_{11}^*A_{11}\right). \end{cases}$$

Очевидно, что эти условия равносильны условиям (4) и

$$W_{11} = \left(A_{11}A_{11}^* - A_{11}^*A_{11}\right)\left(A_{11} - A_{11}^*\right)^{-1}.$$

Пусть теперь выполнено условие 2. Непосредственно проверяется, что $\tilde{A}$ и $\tilde{W}_0$ удовлетворяют системе (2). Тогда $A = T\tilde{A}T^{-1}$ и $W_0 = T\tilde{W}_0T^{-1}$ с $T^{-1} = T^*$ также удовлетворяют этой системе (2) и $X = A^* + W_0$ является решением системы (1).

Следствие 2. Пусть задана матрица A. Система (1) имеет единственное решение $X = A^*$ тогда и только тогда, когда $\ker\left(A^* - A\right) = \{\theta\}$ и матрица A удовлетворяет условию (4) теоремы 1.

Замечание 3. Из доказательства теоремы 1 следует, что в качестве T можно брать матрицу перехода от любого ортонормированного базиса, построенного по разложению $\mathbb{C}^n = \operatorname{ran}\left(A^* - A\right) \oplus \ker\left(A^* - A\right)$, к стандартному базису пространства $\mathbb{C}^n$.

Теорема 4. Пусть дана произвольная матрица A. Тогда следующие условия равносильны:

1) система (1) имеет решение;

2) матрица A представима в виде $A = T\tilde{A}T^{-1}$, где $T^{-1} = T^*$, $\tilde{A} = \operatorname{diag}\left\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\right\}$ и

2a) $\tilde{A}_1$ – произвольная диагональная матрица;

2b) матрица $\tilde{A}_2$ представима в блочном виде, где все вне диагональные блоки нулевые, а каждый диагональный блок имеет вид

$$A_l = \begin{pmatrix} 0,5i\lambda_l I_l + A_l' & D_l \\ D_l^* & -0,5i\lambda_l I_l + D_l^* A_l' D_l^{*-1} \end{pmatrix},$$

где D_l – произвольная невырожденная матрица, $A_l' = A_l'^*$, $\lambda_l \in \sigma(A)$, $\lambda_l \neq 0$.

Доказательство. Пусть система (1) имеет некоторое решение $X = A^* + W_0$, где A и W_0 связаны равенствами (2). Перейдем от матриц A и A^* к матрицам $\tilde{A}$ и $\tilde{A}^*$ в некотором ортонормированном базисе ε, построенном по разложению $\mathbb{C}^n = \ker\left(A^* - A\right) \oplus \operatorname{ran}\left(A^* - A\right)$. Пусть T – матрица перехода от базиса ε к стандартному базису пространства $\mathbb{C}^n$. Тогда $A = T\tilde{A}T^{-1}$, $W_0 = T\tilde{W}_0T^{-1}$ и $T^{-1} = T^*$. Из (2) и равенства $T^{-1} = T^*$ вытекает включение $\ker\left(\tilde{A}^* - \tilde{A}\right) \subseteq \ker\left(\tilde{A}\tilde{A}^* - \tilde{A}^*\tilde{A}\right)$. Поэтому

$$\tilde{A}^* - \tilde{A} = \operatorname{diag}\{0 \cdot I_0, \mathfrak{A}\}, \tag{7}$$

$$\tilde{A}\tilde{A}^* - \tilde{A}^*\tilde{A} = \operatorname{diag}\{0 \cdot I_0, \mathfrak{D}\}. \tag{8}$$

Согласно теореме 1

$$\mathfrak{D}\mathfrak{A} = -\mathfrak{A}\mathfrak{D},$$

где матрицы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$ имеют размер, равный размерности пространства $\operatorname{ran}\left(\tilde{A}^* - \tilde{A}\right)$. Отсюда следует, что каждый собственный вектор матрицы $\mathfrak{A}$, отвечающий собственному значению $\lambda \neq \theta$, переводится матрицей $\mathfrak{D}$ в нулевой вектор или в собственный вектор $\mathfrak{D}f$ матрицы $\mathfrak{A}$, отвечающий собственному значению $-\lambda$. При этом если $\mathfrak{D}f \neq \theta$, то он переводится матрицей $\mathfrak{D}$ в собственный вектор $\mathfrak{D}^2 f$ матрицы $\mathfrak{A}$, отвечающий собственному значению λ. Чтобы это доказать, нужно исключить равенство $\mathfrak{D}^2 f = \theta$. Предположив противное, получим, что $\mathfrak{D}f \neq \theta$ и $\mathfrak{D}^2 f = \theta$. Но это невозможно, так как матрица $\mathfrak{D}$ кососимметрическая. Обозначим

$$\mathcal{L}_1\left(i\lambda_j\right) = \left\{f \in \mathbb{C}^n : \mathfrak{A}f = i\lambda_j f, \mathfrak{D}f = \theta\right\},\ j = 1,\ldots,k; \tag{9}$$

$$\mathcal{L}_2\left(\pm i\lambda_j\right) = \left\{f \in \mathbb{C}^n : \mathfrak{A}f = \pm i\lambda_j f, \mathfrak{D}f \neq \theta\right\},\ j = k+1,\ldots,s; \tag{10}$$

$$\mathcal{L}_0 = \ker\left(A - A^*\right).$$

Заметим, что некоторые собственные значения из (9) могут совпадать с собственными значениями из (10). Из приведенных выше рассуждений следует, что $\dim \mathcal{L}_2\left(i\lambda_j\right) = \dim \mathcal{L}_2\left(-i\lambda_j\right)$ и $\mathfrak{D}\mathcal{L}_2\left(\pm i\lambda_j\right) = \mathcal{L}_2\left(\mp i\lambda_j\right)$.

Представим пространство $\mathbb{C}^n$ в виде ортогональной суммы

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2, \tag{11}$$

где

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1\left(i\lambda_1\right) \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_1\left(i\lambda_k\right), \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2\left(i\lambda_{k+1}\right) \oplus \mathcal{L}_2\left(-i\lambda_{k+1}\right) \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_2\left(i\lambda_s\right) \oplus \mathcal{L}_2\left(-i\lambda_s\right). \tag{12}$$

Теперь будем считать, что ортонормированный базис ε состоит из объединения ортонормированных базисов, выбранных в каждом из слагаемых в разложении (11), (12) пространства $\mathbb{C}^n$.

Тогда матрицы $\tilde{A}^* - \tilde{A}$ и $\tilde{A}\tilde{A}^* - \tilde{A}^*\tilde{A}$ в построенном базисе ε имеют вид

$$A^* - A = \operatorname{diag}\{0 \cdot I_0, i\lambda_1 I_1, \ldots, i\lambda_k I_k, \mathfrak{A}_{k+1}, \ldots, \mathfrak{A}_s\} = \tag{13}$$

$$= i \cdot \operatorname{diag}\left\{0 \cdot I_0, \lambda_1 I_1, \ldots, \lambda_k I_k, \lambda_{k+1}\begin{pmatrix} I_{k+1} & 0 \\ 0 & -I_{k+1} \end{pmatrix}, \ldots, \lambda_s \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & -I_s \end{pmatrix}\right\},$$

$$AA^* - A^*A = \operatorname{diag}\{0 \cdot I_0, 0 \cdot I_1, \ldots, 0 \cdot I_k, \mathfrak{D}_{k+1}, \ldots \mathfrak{D}_s\} =$$

$$=\operatorname{diag}\left\{0\cdot I_0, 0\cdot I_1,\ldots,0\cdot I_k,\begin{pmatrix}0 & D_{k+1}\\ D_{k+1}^* & 0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0 & D_s\\ D_s^* & 0\end{pmatrix}\right\}. \tag{14}$$

Возможно, что $\ker\left(A^*-A\right)=\{\theta\}$. В этом случае матрица I_0 будет отсутствовать в наших представлениях. При определении матриц $\mathfrak{D}_l$ было показано, что они являются обратимыми для всех $l=k,\ldots,s$.

Запишем матрицу $\tilde{A}$ в блочном виде $\tilde{A}=\left(A_{ml}\right)_{m,l=0}^{m,l=s}$ в базисе ε. Из (7) следует, что

$$A_{m,l}=A_{l,m}^* \text{ для всех } l\neq m, \tag{15}$$

$$A_{ll}^*-A_{ll}=i\lambda_l I_l \text{ для всех } l=0,\ldots,k, \tag{16}$$

$$A_{ll}^*-A_{ll}=i\lambda_l\begin{pmatrix}I_l & 0\\ 0 & -I_l\end{pmatrix} \text{ для всех } l=k+1,\ldots,s. \tag{17}$$

Равенства (16) означают, что матрицы A_{ll} можно представить в виде

$$A_{ll}=-0{,}5i\lambda_l I_l+A_l \text{ для всех } l=0,\ldots,k. \tag{18}$$

Следовательно, существует ортогональная матрица T_l, для которой

$$A_{ll}=T_l\left(-0{,}5i\lambda_l I_l+E_l\right)T_l^{-1},\ E_l \text{ – вещественная диагональная матрица, } l=0,\ldots,k. \tag{19}$$

Таким образом, с учетом теоремы 1 доказано представление матрицы $\tilde{A}_1$.

Равенство (8) с учетом (7) принимает вид

$$\tilde{A}\cdot\operatorname{diag}\{0\cdot I_0,\mathfrak{A}\}-\operatorname{diag}\{0\cdot I_0,\mathfrak{A}\}\cdot\tilde{A}=\operatorname{diag}\{0\cdot I_0,\mathfrak{D}\}. \tag{20}$$

Из последнего равенства получаем, что для каждого $l = 1,2,\ldots, k$

$$\left(A_{1l}\cdot i\lambda_l I_l\ldots A_{kl}\cdot i\lambda_l I_l\quad A_{k+1,l}\cdot i\lambda_l I_l\ldots A_{sl}\cdot i\lambda_l I_l\quad A_{s+1,l}\cdot i\lambda_l I_l\right)^T=$$
$$=\left(i\lambda_1 I_1\cdot A_{1l}\ldots i\lambda_k I_k\cdot A_{kl}\quad \mathfrak{A}_{k+1}\cdot A_{k+1,l}\ldots\mathfrak{A}_s\cdot A_{s,l}\quad 0\cdot I_{s+1}\right)^T.$$

Следовательно, $A_{ml}=0$ для всех $m=1,\ldots,k$ и $m\neq l$.

Далее из (20) для каждого $l=k+1,\ k+2,\ldots,s$:

$$\left(A_{1l}\cdot\mathfrak{A}_l\ldots A_{kl}\cdot\mathfrak{A}_l\quad A_{k+1,l}\cdot\mathfrak{A}_l\ldots A_{l,l}\cdot\mathfrak{A}_l\ldots A_{sl}\cdot\mathfrak{A}_l\quad A_{s+1,l}\cdot\mathfrak{A}_l\right)^T=$$
$$=\left(i\lambda_1 I_1\cdot A_{1l}\ldots i\lambda_k I_k\cdot A_{kl}\quad\mathfrak{A}_{k+1}\cdot A_{k+1,l}\ldots\mathfrak{A}_l\cdot A_{ll}+\mathfrak{D}_l\ldots\mathfrak{A}_s\cdot A_{sl}\quad 0\cdot I_{s+1}\right)^T. \tag{21}$$

Отсюда

$$A_{ll}\cdot\mathfrak{A}_l=\mathfrak{A}_l\cdot A_{ll}+\mathfrak{D}_l,\ l=k+1,\ldots,s. \tag{22}$$

Непосредственной проверкой из последнего равенства получаем, что матрица A_{ll} имеет вид

$$A_{ll}=\begin{pmatrix}A'_{ll} & \dfrac{i}{2\lambda_l}D_l\\ -\dfrac{i}{2\lambda_l}D_l^* & A''_{ll}\end{pmatrix} \text{ для всех } l=k+1,\ldots,s. \tag{23}$$

Запишем матрицы $\tilde{A},\ \tilde{A}^*-\tilde{A},\ \tilde{A}^*\tilde{A}-\tilde{A}\tilde{A}^*$ в блочном виде относительно разложения

$$\mathbb{C}^n=\mathcal{L}_{01}\oplus\mathcal{L}_2, \text{ где } \mathcal{L}_{01}=\mathcal{L}_0\oplus\mathcal{L}_1 \tag{24}$$

в виде

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}\tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12}\\ \tilde{A}_{12}^* & \tilde{A}_{22}\end{pmatrix},\ \tilde{A}^*-\tilde{A}=\begin{pmatrix}\mathfrak{A}_{11} & 0\\ 0 & \mathfrak{A}_{22}\end{pmatrix},\ \tilde{A}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathfrak{D}_{22}\end{pmatrix}. \tag{25}$$

Из первого равенства системы (4) вытекает равенство

$$\begin{pmatrix}0 & \mathfrak{A}_{11}\cdot\tilde{A}_{12}\cdot\mathfrak{D}_{22}\\ 0 & \mathfrak{A}_{22}\cdot\tilde{A}_{22}\cdot\mathfrak{D}_{22}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0 & 0\\ \mathfrak{D}_{22}\cdot\tilde{A}_{12}^*\cdot\mathfrak{A}_{11} & \mathfrak{D}_{22}\cdot\tilde{A}_{12}^*\cdot\mathfrak{A}_{11}\end{pmatrix}.$$

Так как в построении ненулевых элементов матрицы $\mathfrak{A}_{11} \cdot \tilde{A}_{12} \cdot \mathfrak{D}_{22}$ участвуют обратимые блоки из $\mathfrak{A}_{11}$ и $\mathfrak{D}_{22}$, то $\tilde{A}_{12} = 0$.

Так как все матрицы в равенстве $\mathfrak{A}_{22} \cdot \tilde{A}_{22} \cdot \mathfrak{D}_{22} = -\mathfrak{D}_{22} \cdot \tilde{A}_{22}^* \cdot \mathfrak{A}_{22}$ имеют блочно-диагональный вид, определяемый равенствами (14), (17) и (23), то мы получаем равенства

$$\begin{pmatrix} i\lambda_l I_l & 0 \\ 0 & -i\lambda_l I_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_{ll} & \dfrac{i}{2\lambda_l} D_l \\ -\dfrac{i}{2\lambda_l} D_l^* & A''_{ll} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & D_l \\ D_l^* & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & D_l \\ D_l^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_{ll} & \dfrac{i}{2\lambda_l} D_l \\ -\dfrac{i}{2\lambda_l} D_l^* & A''_{ll} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\lambda_l I_l & 0 \\ 0 & -i\lambda_l I_l \end{pmatrix} \text{ для всех } l = k+1, \dots, s.$$

Отсюда и из (17) следуют равенства

$$A'^*_{ll} - A'_{ll} = i\lambda_l I_l,\ A''^*_{ll} - A''_{ll} = -i\lambda_l I_l,\ A'_l D_l = D_l A''^*_l \text{ для всех } l = k+1, \dots, s,$$

$$A''_{ll} = D_l^* A'^*_{ll} D_l^{*-1} = -0{,}5 i\lambda_l I_l + D_l^* A'_l D_l^{*-1} \text{ для всех } l = k+1, \dots, s.$$

С учетом равенства $\tilde{A}_{12} = 0$ это завершает описание матрицы $\tilde{A}_2$ и всей матрицы $\tilde{A}$.

Пусть теперь выполнено условие 2. Тогда выполняются условия (4) теоремы 1. Значит, система (1) имеет решение.

Пример 5. Используя теорему 4, опишем множество матриц A второго порядка, для которых существуют коммутирующие делители X. В этом случае возможны два варианта:

$$A = T\tilde{A}T^{-1},\ \tilde{A} \text{ – диагональная матрица или}$$

$$A = T\begin{pmatrix} \mu + i\lambda & \nu \\ \bar{\nu} & \mu - i\lambda \end{pmatrix} T^{-1},\ \mu, \lambda, \nu \in \mathbb{R}, \nu \neq 0.$$

Литература

1. Gohberg, I. Matrix Polynomials / I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman. – Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics. – 2009. – 409 p.

2. Markus A.S. Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils / A.S. Markus. – Providence, Rhode Island: American Mathematical Society. – 1988. – 250 p.

3. Lancaster, P. Hermitian quadratic matrix polynomials: Solvents and inverse problems / P. Lancaster, F. Tisseur. – Manchester Institute for Mathematical Sciences, University of Manchester, UK, 2010. – no. 10. – P. 1–10.

4. Барсуков, А.И. Об одной обратной задаче для матричных пучков с эрмитовыми коэффициентами / А.И. Барсуков // Вестник ВГУ. Серия: Физика, Математика. – 2016. – № 4. – С. 72–82.

5. Chu, M.T. Inverse eigenvalue problems / M.T. Chu // SIAM Rev. – 1998. – Vol. 40, no. 1. – P. 1–39.

6. Timoshenko, S. Vibration Problems in Engineering, fourth ed. / S. Timoshenko, D.H. Young, W. Weaver Jr. – Wiley, Chichester, 1974. – 538 p.

7. Gladwell, G.M.L. Inverse problems in vibrations / G.M.L. Gladwell. – Dordreht, Boston, Lancaster: Martinus Nijhoff Publishers, 1986. – 400 p.

Поступила в редакцию 9 июля 2019 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2019, vol. 11, no. 3, pp. 5–11

DOI: 10.14529/mmph190301

COMMUTATIVITY OF SPECTRAL DIVISORS OF QUADRATIC PENCILS

A.I. Barsukov, M.Y. Glazkova, V.I. Ryazhskikh, S.S. Sumera
Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: a.barsoukov@mail.ru

The object of study of the presented work are quadratic matrix pencils, in other words, quadratic functions of a complex variable, the coefficients of which being the Hermitian matrices. Such functions naturally appear when different problems of mechanics, geophysics or engineering are being studied. In particular, when an oscillatory system of mass-strings with dampers is described, the pencil coefficients characterize the stiffness of the springs and the set dampers. In this context, the so called inverse problems for matrix pencils are of special interest, that is, the problems of building pencils with preset properties. In our work, we study the possibility of building quadratic pencils, allowing for commuting linear factorization. It is well known that any quadratic pencil may be presented as a product of linear (not necessarily commuting) factors, which are called spectral divisors. Henceforth, the description of the structure of one spectral divisor through the structure of another has been studied in several works of the recent decade. We have obtained the criterion, which describes a set of spectral divisors, for each one of which there exists a second commuting spectral divisor. For each element of this set, a structure of all spectral divisors, commuting with it, is described. The criterion of uniqueness of solution to this problem is given. We should note that the conditions of this criterion can be verified for any set quadratic matrix. The obtained results allow to build quadratic pencils, allowing for commuting spectral factorization. Without loss of generality, it is assumed that the left spectral divisor is set. The case when the right spectral divisor is set, is reduced to the considered situation through conjugation operation.

Keywords: quadratic matrix pencils; spectral divisors; inverse problems.

References

1. Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. *Matrix Polynomials*. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009, 409 p.
2. Markus A.S. *Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils*. In: Translation of Mathematical Monographs, Vol. 71, American Mathematical Society, Providence, 1988, 250 p.
3. Lancaster P., Tisseur F. *Hermitian quadratic matrix polynomials: Solvents and inverse problems*. Manchester Institute for Mathematical Sciences, University of Manchester, UK, 2010, no. 10, pp. 1–10.
4. Barsukov A.I. About an inverse problem for matrix pencils with Hermitian coefficients. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 4, pp. 72–82. (in Russ.).
5. Chu M.T. Inverse eigenvalue problems. *SIAM Rev.*, 1998, Vol. 40, no. 1, pp. 1–39. DOI: 10.1137/S0036144596303984
6. Timoshenko S., Young D.H., Weaver W. Jr. *Vibration Problems in Engineering*, fourth ed., Wiley, Chichester, 1974, 538 p.
7. Gladwell G.M.L. *Inverse problems in vibrations*. Dordreht, Boston, Lancaster: Martinus Nijhoff Publishers, 1986, 400 p.

Received July 9, 2019