

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ ТОНКОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ВНУТРЕННЕМ ДАВЛЕНИИ И ОСЕВОМ СЖАТИИ

В.Л. Дильман

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: dilm49@mail.ru

Рассматриваются условия нагружения тонкостенной цилиндрической оболочки, в том числе трубы большого диаметра, при сжимающих (отрицательных) осевых напряжениях и растягивающих (положительных) кольцевых напряжениях. Цель статьи – установить зависимости критических деформаций, напряжений, давлений и осевых нагрузок на оболочку от ее параметров и условий нагружения. Метод исследования основан на применении критерия Свифта–Марциньяка потери устойчивости процесса пластического деформирования. Материал оболочки предполагается изотропным с показательной диаграммой деформирования. Получены явные аналитические выражения для искомых величин. Результаты позволяют при данных параметрах оболочки и условиях нагружения определять критические давления и критические осевые нагрузки, а также толщины стенок при заданном рабочем давлении.

Ключевые слова: тонкостенная цилиндрическая оболочка; труба большого диаметра; пластическая устойчивость, критерий Свифта; критические деформации; критические напряжения; критические давления; локализация пластической деформации.

Введение. Хорошо известно влияние двухосного нагружения стенок труб магистральных трубопроводов [1, 2] на критическое давление в них. Двухосное нагружение вызывается осевой нагрузкой на трубу. В некоторых случаях осевая сила, возникающая вследствие особых, иногда нестандартных условий функционирования трубопроводов (при резких колебаниях температуры, под водой, в местности с подвижными грунтами, в горных условиях, в районах с высокой сейсмической активностью [3, 4]), приводит к осевым напряжениям σ_1 , противоположным по знаку кольцевым напряжениям σ_2 , порожденным внутренним или внешним давлением. Влияние коэффициента двухосности нагружения трубы $m = \sigma_1 / \sigma_2$ на несущую способность трубопроводов изучалось в работах [5–13] и др. В работах [8–13] критическое состояние тонкостенной цилиндрической оболочки (ТЦО) из упрочняемого материала определялось на основе критерия Свифта–Марциньяка (СМ) потери стабильности пластического деформирования ТЦО [14–16]. В указанных работах не рассматривались случаи, когда осевые и кольцевые напряжения имеют разные знаки, т. е. когда $m < 0$.

Критическим состоянием (состоянием предразрушения) назовем состояние ТЦО, при котором деформирование всей оболочки или ее локального участка происходит без возрастания внешней нагрузки с неконтролируемой скоростью [16]. Как известно [16], существует два вида критического состояния тонкостенной цилиндрической оболочки из упрочняемого материала: *общая (тотальная) потеря стабильности процесса пластического деформирования (ОПС)* и *локализация пластической деформации (ЛПД)* в форме кольцевой шейки или продольной выпучины или вмятины. Какое из этих состояний реализуется, зависит от условий нагружения [10; 11, с. 25–27; 12, с. 28–30; 16]. Для нахождения критических интенсивностей деформаций и напряжений, соответствующих как ОПС, так и ЛПД, в работе применяется критерий Свифта [14] (использованный также Марциньяком [15]).

Цель работы – нахождение аналитических выражений для критических напряжений и деформаций стенок ТЦО, в том числе труб большого диаметра, критических давлений и осевых нагрузок на ТЦО, в зависимости от механических и геометрических параметров оболочек в условиях внутреннего давления и осевой сжимающей силы (кольцевые напряжения в стенках ТЦО положительны, осевые напряжения отрицательны). Предполагается, что диаграмма деформирования аппроксимируется показательной-степенной зависимостью (6) (см. ниже).

Обозначения и допущения. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$) – осевые, кольцевые и радиальные нормальные напряжения (логарифмические деформации) в стенке ТЦО соответственно, p – внутреннее или внешнее давление на ТЦО, N – осевая растягивающая или сжимающая сила, $m = \sigma_1 / \sigma_2$ – коэффициент двухосности нагружения стенки ТЦО. Для упрощения формул используется обозначение: $s = \sqrt{m^2 - m + 1}$. Всюду в работе нижний индекс *cr* указывает на критическое значение данной величины.

Предполагается, что материал оболочки однородный, изотропный, упругопластический, в пластической зоне упрочняемый, а также, что выполняется «гипотеза единой кривой», т. е. диаграмма деформирования упрочняемого материала ТЦО имеет вид:

$$\sigma_i = f(\varepsilon_i), \quad (1)$$

где σ_i и ε_i – интенсивности напряжений и деформаций в стенке оболочки. При условии $\sigma_3 = 0$ (см. ниже (3)) σ_i и ε_i вычисляются по формулам соответственно:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}, \quad \varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2}. \quad (2)$$

В работе рассматриваются следующие основные параметры ТЦО, в том числе бесшовной трубы большого диаметра.

Геометрическими параметрами ТЦО являются ее внутренний радиус R и толщина стенки t . В начальный момент нагружения $R = R_0$, $t = t_0$.

Параметры, определяющие механические свойства материала ТЦО: 1) предел прочности (временное сопротивление) материала оболочки σ_B ; 2) параметры, определяющие зависимость (1): n и a (см. ниже (6)).

Главные напряжения в стенке ТЦО рассчитываются по формулам [17, с. 220]:

$$\sigma_1 = \frac{Rp}{2t} + \frac{N}{2\pi Rt}; \quad \sigma_2 = \frac{Rp}{t}; \quad \sigma_3 = 0, \quad (3)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – осевые, кольцевые и радиальные нормальные напряжения в стенке трубы соответственно, p – внутреннее или внешнее давление, N – осевая растягивающая или сжимающая сила, t и R – толщина стенки и радиус оболочки. Из условий несжимаемости и пропорциональности девиаторов напряжений и деформаций, а также условия $\sigma_3 = 0$ следует [8–12]:

$$(2 - m)\varepsilon_1 = (2m - 1)\varepsilon_2. \quad (4)$$

Отсюда видно, что при $m < 0,5$ деформации ε_1 и ε_2 имеют разные знаки. Предполагаем, что внешняя нагрузка происходит по зависимости, при которой коэффициент двухосности нагружения стенки ТЦО $m = \sigma_1 / \sigma_2$ не изменяется в процессе нагружения. Всюду в работе будем считать, что

$$m = \sigma_1 / \sigma_2 = \text{const} < 0.$$

Ситуация, когда $m > 0$, подробно исследовалась в работах [8–13, 16]. В случае, когда $m \leq 0$, некоторые результаты сформулированы в [18].

Аппроксимация диаграммы деформирования. Во многих работах диаграмма деформирования (1) аппроксимируется степенной функцией

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^n, \quad A = e^n n^{-n} \sigma_B. \quad (5)$$

Тогда материал оболочки характеризуется параметром n – показателем упрочнения материала. Известны и применяются другие аппроксимации [17, 18]. В работе будет рассматриваться более общая, чем (5), показательная-степенная аппроксимация функции (1) [8–10; 12, с. 27–30].

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^n \exp(a\varepsilon_i), \quad A = (1 - a)^n e^n n^{-n} \sigma_B \quad (6)$$

с двумя параметрами, определяющими процесс деформирования упрочняемого материала. Коэффициент A в формуле (6) вычислен с применением критерия СМ [12, с. 27–30]. Аппроксимация (6) имеет два важных преимущества по сравнению с другими (некоторые из них приведены в [12, с. 23–24]) – она, во-первых, является обобщением и, следовательно, уточнением аппроксимации (5) и, во-вторых, она мультипликативна («удобно логарифмируется»), что желательно при использовании критерия СМ для получения обзримых аналитических зависимостей (в противном случае получаются не явные зависимости, связывающие критические значения деформаций, напряжений, давлений и т. д. с механическими и геометрическими параметрами оболочки или другой конструкции, а трансцендентные уравнения для нахождения искомого величин).

Чтобы аппроксимировать реальные соотношения между ε_i и σ_i , функция (1) вида (6) должна быть выпуклой вверх по крайней мере на участке, соответствующем условию $\sigma_i \in [0; (\sigma_i)_{cr}]$. Используя полученные ниже формулы (9)–(11), средствами элементарного анализа можно доказать следующее утверждение.

Предложение 1. Если $a < 0$, то функция вида (6) выпукла вверх на участке, соответствующем условию $\sigma_i \in [0; (\sigma_i)_{cr}]$. Если $a > 0$, то для выпуклости вверх функции вида (6) на этом участке необходимо и достаточно, чтобы, при осевом сжатии и внутреннем давлении, выполнялось условие: $0 < a < 1,5(1 - \sqrt{n})/s$, если $-1 \leq m < 0,5$, и условие: $0 < a < (1 - m/2)(1 - \sqrt{n})/s$, если $m \leq -1$.

Аппроксимация методом наименьших квадратов по формуле (6) известных, полученных в натуральных экспериментах (см. ссылки в работах [11, с. 22–24; 19, 20]) зависимостей для низкоуглеродистых сталей показала [21] выполнение условий предложения 1 для параметра a .

Метод исследования. Как было отмечено, критическое состояние ТЦО может проявиться как в форме общей потери стабильности процесса пластического деформирования (ОПС), так и в форме локализации пластической деформации (ЛПД) в виде кольцевой шейки или продольной шейки либо выпучины.

На основе сравнения скорости роста интенсивности напряжений, связанных со свойствами материала, определяемыми его диаграммой деформирования, со скоростью роста интенсивности напряжений, определяемой изменением геометрии оболочки, критерий СМ позволяет вычислять критические деформации ТЦО, соответствующие той или иной форме потери оболочкой пластической стабильности. Как следствие, это дает возможность вычисления критических напряжений, давлений, осевых нагрузок при данных геометрических и механических параметрах ТЦО и условиях нагружения.

Основные результаты. Подходы работ [8–13], основанные на применении критерия СМ, с использованием зависимостей (2)–(4), и при условии $\sigma_1 < 0$ позволяют найти выражения для вычисления критических значений интенсивностей деформаций. Считаем, что на ТЦО действуют осевое сжатие и внутреннее давление. В [18] показано, что в случае ОПС

$$\sigma_i = \frac{sR_0 p}{t_0} \exp\left(\frac{3}{2s} \varepsilon_i\right), \quad (7)$$

а в случае ЛПД

$$\sigma_i = \frac{sR_0 p}{t_0} \exp\left(\frac{2-m}{2s} \varepsilon_i\right). \quad (8)$$

Приравнявая дифференциалы выражений для σ_i из формул (6) и (7) в случае ОПС, и из формул (6) и (8) в случае ЛПД (критерий СМ), получим критические выражения деформаций $\varepsilon_{i \text{ tot}}$ и $\varepsilon_{i \text{ loc}}$ при реализации случаев ОПС и ЛПД соответственно. Очевидно, что $\varepsilon_{i \text{ cr}} = \min(\varepsilon_{i \text{ tot}}, \varepsilon_{i \text{ loc}})$. Используя это и сравнивая выражения в (7) и (8), получим

Предложение 2. Пусть ТЦО подвержена внутреннему давлению и осевой сжимающей силе. Тогда: 1) критическое состояние ТЦО возникает в виде ОПС, если $-1 \leq m < 0,5$, и в виде ЛПД – продольной выпучины, если $m < -1$; 2) критическая интенсивность деформации вычисляется по формуле:

$$(\varepsilon_i)_{cr} = \begin{cases} \frac{2sn}{2-m-2as}, & \text{если } m \leq -1; \\ \frac{2sn}{3-2as}, & \text{если } -1 \leq m < 0,5. \end{cases} \quad (9)$$

Подставляя выражения для вычисления $(\varepsilon_i)_{cr}$ из (9) в (6), получим

Предложение 3. В условиях осевой сжимающей силы и внутреннего давления критическая интенсивность напряжений вычисляется по формулам: при $m < -1$

$$\sigma_{i cr} = \left(\frac{2(1-a)s \exp\left(\frac{2-m}{2-m-2as}\right)}{2-m-2as} \right)^n \sigma_B, \quad (10)$$

при $-1 \leq m < 0,5$

$$\sigma_{i cr} = \left(\frac{2(1-a)s \exp\left(\frac{3}{3-2as}\right)}{3-2as} \right)^n \sigma_B. \quad (11)$$

Подставив вместо σ_i его критические значения (10) и (11), а вместо ε_i его критическое значение (9) в формулы (7) и (8) соответственно, найдем давление p_{cr} в ТЦО в критический момент нагружения.

Предложение 4. В условиях осевой сжимающей нагрузки и внутреннего давления критическое давление вычисляется по формуле:

$$p_{cr} = \begin{cases} \left(\frac{1-a}{1-0,5m-as} \right)^n \frac{t_0}{s^{1-n} R_0} \sigma_B, & \text{если } m \leq -1; \\ \left(\frac{1-a}{1,5-as} \right)^n \frac{t_0}{s^{1-n} R_0} \sigma_B, & \text{если } -1 \leq m < 0,5. \end{cases} \quad (12)$$

Пусть p_w – рабочее давление в трубопроводе. Обращая формулу (12), получим критическую толщину стенки t_{cr} трубы, работающей в составе трубопровода, в зависимости от условий нагружения, которые характеризуются параметром m .

Предложение 5. В условиях осевой сжимающей нагрузки и внутреннего давления критическая толщина стенки трубы вычисляется по формуле:

$$t_{cr} = \begin{cases} s^{1-n} \left(\frac{1-0,5m-as}{1-a} \right)^n \frac{R_0 p_w}{\sigma_B}, & \text{если } m \leq -1; \\ s^{1-n} \left(\frac{1,5-as}{1-a} \right)^n \frac{R_0 p_w}{\sigma_B}, & \text{если } -1 \leq m < 0,5. \end{cases} \quad (13)$$

Вычислительные эксперименты. Графики зависимостей от условий нагружения (параметра m) критического давления p_{cr} , критической толщины стенки трубы при данном рабочем давлении p_w приведены на рис. 1 и 2. На рис. 1 предполагается $\sigma_B = 600$ МПа, $R_0 = 300$ мм, $t = 10$ мм. На рис. 2 $\sigma_B = 600$ МПа, $R_0 = 300$ мм, рабочее давление принято $p_w = 8$ МПа. На рис. 1 кривые расположены снизу вверх в таком порядке: при $m^* < m < 0$ (число m^* определено в (14)) первые три линии – $n = 0,2$, $a = 0,2$; 0 ; $-0,2$ соответственно; следующие три линии – $n = 0,1$, $a = 0,2$; 0 ; $-0,2$; при $m < m^*$ порядок кривых противоположен. На рис. 2 порядок расположения кривых противоположен их порядку на рис. 1.

Заметим, что при

$$m^* = \frac{1-\sqrt{6}}{2} \approx -0,725 \quad (14)$$

формула (12) упрощается, становится независимой от n и a и приобретает вид:

$$p_{cr} = \frac{2t_0}{3R_0} \sigma_B.$$

При условии (14) формула (13) также упрощается, становится независимой от n и a и приобретает вид:

$$t_{cr} = \frac{3R_0 p_v}{2\sigma_B}.$$

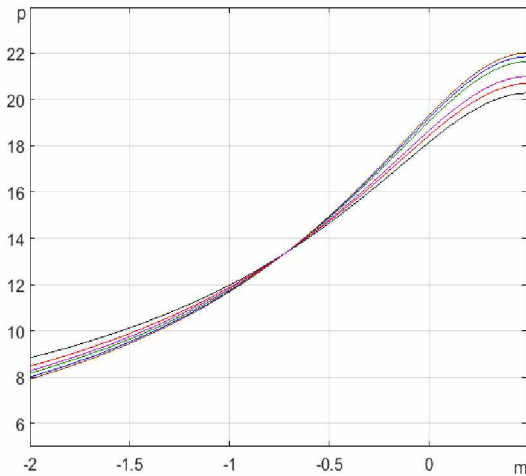


Рис. 1. Зависимость критического давления p_{cr} (в МПа) от условий нагружения (параметра $m = \sigma_1/\sigma_2$), при различных значениях параметров упрочнения n и a , вычисленная по формуле (12)

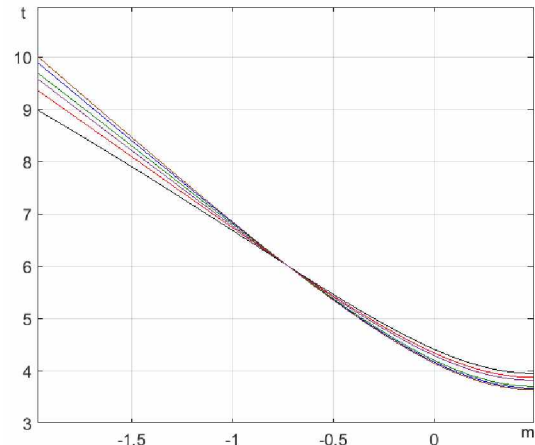


Рис. 2. Зависимость критической толщины стенки t_{cr} (в мм) от условий нагружения (параметра $m = \sigma_1/\sigma_2$) при различных значениях параметров упрочнения n и a и рабочего давления $p_w = 8$ МПа, вычисленная по формуле (13)

Заключение. Получены зависимости критических деформаций, напряжений и давлений от геометрических параметров ТЦО t и R , механических характеристик σ_B , n и a материала ТЦО и условий нагружения, характеризующихся отношением $m = \sigma_1/\sigma_2$ осевых и кольцевых напряжений при его постоянном отрицательном значении в условиях осевого сжатия и внутреннего давления. Установлены зависимости критической толщины стенки t_{cr} трубы, работающей в составе трубопровода, от условий нагружения, которые характеризуются параметром m .

Установлено, что в случае осевой сжимающей нагрузки и внутреннего давления:

1. Осевые напряжения самым существенным образом влияют на величину критического давления (см. рис. 1). Из рис. 1 видно, что, в зависимости от значений параметров n и a при отсутствии осевых напряжений критическое давление примерно в 1,585...1,635 раза выше, чем при условии, когда осевые и кольцевые напряжения (по модулю) совпадают.

2. Осевые напряжения самым существенным образом влияют на критическую толщину стенок (см. рис. 2).

3. Критическое состояние возникает в виде: общей потери устойчивости процесса пластического деформирования при условии $-1 \leq m < 0,5$ и в виде локализации пластической деформации – продольной выпучины, при условии $-\infty < m < -1$.

4. Влияние параметров упрочнения n и a в предложенном диапазоне на критическое состояние ТЦО не очень существенно (см. рис. 1, 2), но заметно. Например, при $n = 0,2$, $a = 0,2$ критическая толщина стенки при данных условиях $t_{cr} = 9$ мм, а при $n = 0,1$, $a = -0,2$, $t_{cr} = 10$ мм.

Литература

1. Системная надежность трубопроводного транспорта углеводородов / В.Д. Черняев, К.В. Черняев, В.Л. Березин и др. – М.: Наука, 1997. – 516 с.

2. Бородавкин, П.П. Сооружение магистральных трубопроводов / П.П. Бородавкин, В.Л. Резин. – М.: Недра, 1987. – 471 с.
3. Hector, S.S. Deformation of steel pipes with internal pressure under axial compression and bending load under seismic action / S.S. Hector, S.C. Carlos // The 14-th World Conference on Earthquake Engineering. October 12–17, 2008. Beijing, China.
4. Eiber, P.J. Outside force causes most natural gas pipeline failures / P.J. Eiber // Oil and Gas J. – 1987. – Vol. 85, no. 11. – P. 52–57.
5. Малинин, Н.Н. Устойчивость двухосного пластического растяжения анизотропных листов и цилиндрических оболочек / Н.Н. Малинин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1971. – № 2. – С. 115–118.
6. Моношков, А.Н. Пластическая устойчивость и ее роль в оценке прочности труб / А.Н. Моношков, С.И. Пыхов, И.А. Пустин // Производство труб с покрытиями, отделка и контроль качества труб. – М.: Металлургия, 1972. – С. 77–81.
7. Куркин, С.А. Прочность сварных тонкостенных сосудов, работающих под давлением / С.А. Куркин. – М.: Машиностроение, 1976. – 183 с.
8. Дильман, В.Л. О влиянии двухосности нагружения на несущую способность труб магистральных газонефтепроводов / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 5. – С. 179–185.
9. Дильман, В.Л. О потере пластической устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2002. – № 5. – С. 50–57.
10. Дильман, В.Л. Пластическая неустойчивость тонкостенных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 4. – С. 141–151.
11. Дильман, В.Л. Математические модели напряженного состояния неоднородных тонкостенных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – 201 с.
12. Дильман, В.Л. Математическое моделирование критических состояний мягких прослоек в неоднородных соединениях / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина. – Челябинск: Издательский Центр ЮУрГУ, 2011. – 275 с.
13. Дильман, В.Л. Критическое состояние тонкостенной цилиндрической оболочки, содержащей прослойку из менее прочного материала / В.Л. Дильман, Т.В. Карпета // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2013. – № 10. – С. 21–24.
14. Swift, H.W. Plastic Instability under Plane Stress / H.W. Swift // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1952. – Vol. 1, no. 1. – pp. 1–18.
15. Marciniak, Z. Utrata stateczności rozciąganych powłok plastycznych / Z. Marciniak // Mech. teoretyczna i stosowana. – 1966. – Vol. 4, no. 3. – P. 209–220.
16. Ковальчук, Г.И. К вопросу о потере устойчивости пластического деформирования оболочек / Г.И. Ковальчук // Проблемы прочности. – 1983. – № 5. – С. 11–16.
17. Писаренко, Г.С. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии / Г.С. Писаренко. – Киев: Наукова думка, 1976. – 415 с.
18. Дияб, А.Н. Критические состояния однородных тонкостенных цилиндрических оболочек при внутреннем давлении и осевом сжатии / А.Н. Дияб // Фундамент. проблемы основных направлений научно-техн. исследований: сб. трудов Междунар. научно-практ. конференции (Волгоград, 17 марта 2018 г.). – Стерлитамак: АМИ, 2018. – С. 35–39.
19. Воронцов, А.Л. Об аппроксимации кривых упрочнения / А.Л. Воронцов // Вестник машиностроения. – 2002. – № 1. – С. 51–54.
20. Кроха, В.А. О зависимости показателя деформационного упрочнения от степени деформации и выполнении степенного закона упрочнения / В.А. Кроха // Проблемы прочности. – 1981. – № 8. – С. 72–77.
21. Дильман, В.Л. О влиянии аппроксимации диаграммы деформирования на точность критериев несущей способности тонкостенных оболочек / В.Л. Дильман, А.А. Эбель // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2006. – Т. 13. – Вып. 4. – С. 638–639.

Поступила в редакцию 30 сентября 2019 г.

MATHEMATICAL MODELING OF CRITICAL STATES OF THIN-WALLED CYLINDRICAL SHELLS UNDER INTERNAL PRESSURE AND AXIAL COMPRESSION**V.L. Dilman**

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: dilman49@mail.ru

The loading conditions of a thin-walled cylindrical shell, including large-diameter pipes, under compressive (negative) axial stresses and tensile (positive) ring stresses are considered. The purpose of the article is to specify the dependences of critical deformations, stresses, pressures, and axis loads on the shell on the parameters and loading conditions. The research method is based on the application of the loss in stability of the plastic deformation process Swift–Marciniak criterion. The material of the shell is assumed to be isotropic with exponential-power deformation diagram. Explicit analytical expressions for the target values were obtained. Considering the given parameters of the shell and loading conditions, the results allow to determine critical pressures, critical axial loads and wall thickness at a given working pressure.

Keywords: thin-walled cylindrical shell; large-diameter pipe; plastic stability; Swift criterion; critical deformations; critical stresses; critical pressures; localization of plastic deformation.

References

1. Chernyaev V.D., Chernyaev K.V., Berezin V.L. *et al.* *Sistemnaya nadezhnost' truboprovodnogo transporta uglevodorodov* (System reliability of hydrocarbon pipeline transport). Moscow, Nauka Publ., 1997, 516 p. (in Russ.).
2. Borodavkin P.P., Berezin V.L. *Sooruzhenie magistral'nykh truboprovodov* (Main Pipeline Construction). Moscow, Nedra Publ., 1987, 471 p. (in Russ.).
3. Hector S.S., Carlos S.C. Deformation of Steel Pipes with Internal Pressure under Axial Compression and Bending Load under Seismic Action. *The 14-th World Conference on Earthquake Engineering*, October 12–17, 2008, Beijing, China.
4. Eiber P.J. Outside Force Causes Most Natural Gas Pipeline Failures. *Oil and Gas J.*, 1987, Vol. 85, no. 11, pp. 52–57.
5. Malinin N.N. Ustoychivost' dvukhosnogo plasticheskogo rastyazheniya anizotropnykh listov i tsilindricheskikh obolochek (Biaxial Plastic Extension Stability of Anisotropic Sheets and Cylindrical Shells). *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1971, no. 2, pp. 115–118. (in Russ.).
6. Monoshkov A.N., Pykhov S.I., Pustin I.A. Plasticheskaya ustoychivost' i ee rol' v otsenke prochnosti trub (Plastic Stability and its Role in Assessing Pipes Strength). *Proizvodstvo trub s pokrytiyami, otdelka i kontrol' kachestva trub* (Coated Pipe Manufacturing, Pipe Finishing and Quality Control), Moscow, Metallurgiya Publ., 1972, pp. 77–81. (in Russ.).
7. Kurkin S.A. *Prochnost' svarnykh tonkostennykh sudov, rabotayushchikh pod davleniem* (Strength of Welded Thin-Walled Pressure Vessels). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976. 183 p. (in Russ.).
8. Dil'man V.L., Ostsemin A.A. O vliyaniy dvukhosnosti nagruzheniya na nesushchuyu sposobnost' trub magistral'nykh gazonefteprovodov (On the Effect of Biaxial Loading on the Bearing Capacity of the Main Gas and Oil Pipelines). *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 2000, no. 5, pp. 179–185. (in Russ.).
9. Dil'man V.L., Ostsemin A.A. O potere plasticheskoy ustoychivosti tonkostennykh tsilindricheskikh obolochek (On the Loss of Plastic Stability of Thin-Walled Cylindrical Shells). *Problemy mashinostroyeniya i nadezhnosti mashin*, 2002, no. 5, pp. 50–57. (in Russ.).

10. Dil'man V.L. Plastic Instability of Thin-Walled Cylindrical Shells. *Mech. Solids*, 2005, Vol. 40, Iss. 4, pp. 113–121.
11. Dil'man V.L. *Matematicheskie modeli napryazhennogo sostoyaniya neodnorodnykh tonkostennykh tsilindricheskikh obolochek* (Mathematical Models of the Stress State of Inhomogeneous Thin-Walled Cylindrical Shells), Chelyabinsk, Izd-vo YuUrGU Publ., 2007, 201 p. (in Russ.).
12. Dil'man V.L., Eroshkina T.V. *Matematicheskoe modelirovanie kriticheskikh sostoyaniy myagkikh prosloek v neodnorodnykh soedineniyakh* (Mathematical Modeling of Soft Layers Critical State in Inhomogeneous Compounds). Chelyabinsk, Izdatel'skiy Tsentr YuUrGU Publ., 2011, 275 p. (in Russ.).
13. Dilman V.L., Karpeta T.V. Critical State of a Thin-Walled Cylindrical Shell Containing an Interlayer Fabricated from a Material of Lesser Strength. *Chemical and Petroleum Engineering*, 2014, Vol. 49, Issue 9–10, pp. 668–674.
14. Swift H.W. Plastic Instability under Plane Stress. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1952, Vol. 1, no. 1, pp. 1–18. DOI: 10.1016/0022-5096(52)90002-1
15. Marciniak Z. Utrata stateczności rozciąganych powłok plastycznych. *Mech. teoretyczna i stosowana*, 1966, Vol. 4, no. 3, pp. 209–220.
16. Koval'chuk G.I. K voprosu o potere ustoychivosti plasticheskogo deformirovaniya obolochek (On the Issue of Plastic Deformation Stability Loss of the Shells). *Problemy prochnosti*, 1983, no. 5, pp. 11–16. (in Russ.).
17. Pisarenko G.S. *Deformirovanie i prochnost' materialov pri slozhnom napryazhennom sostoyanii* (Deformation and Strength of Materials under Complex Stress State). Kiev, Naukova dumka, 1976, 415 p. (in Russ.).
18. Diyab A.N. Kriticheskie sostoyaniya odnorodnykh tonkostennykh tsilindricheskikh obolochek pri vnutrennem davlenii i osevom szhatii (Critical States of Homogeneous Thin-Walled Cylindrical Shells under Internal Pressure and Axial Compression). *Fundament. problemy osnovnykh napravleniy nauchno-tekhn. issledovaniy: sb. trudov Mezhdunar. nauchno-prakt. Konferentsii, Volgograd, 17 marta 2018 g.* (Proceedings of the International Scientific and Practical Conference “Fundamental Problems of the Main Directions of Scientific and Technical Research”, Volgograd, March 17, 2018), Sterlitamak, AMI Publ., 2018, pp. 35–39. (in Russ.).
19. Vorontsov A.L. Ob approksimatsii krivykh uprochneniya (On the Approximation of Hardening Curves). *Vestnik mashinostroeniya*, 2002, no. 1, pp. 51–54. (in Russ.).
20. Krokha V.A. O zavisimosti pokazatelya deformatsionnogo uprochneniya ot stepeni deformatsii i vypolnenii stepennogo zakona uprochneniya (On the Approximation of Hardening Curves Dependence of the Strain Hardening Index on the Degree of Deformation and the Fulfillment of the Power Hardening Law). *Problemy prochnosti*, 1981, no. 8, pp. 72–77. (in Russ.).
21. Dil'man V.L., Ebel' A.A. O vliyanii approksimatsii diagrammy deformirovaniya na tochnost' kriteriev nesushchey sposobnosti tonkostennykh obolochek (On the Dependence of the Strain Hardening Index on the Degree of Deformation and the Implementation of the Power Law of Hardening). *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki*, 2006, Vol. 13, Iss. 4, pp. 638–639. (in Russ.).

Received September 30, 2019