

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С ДЕМПФЕРОМ

В.М. Яганов

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
г. Москва, Российская Федерация
E-mail: avtofur@yandex.ru

Рассматриваются собственные колебания упругого стержня, находящегося в поле центробежных сил инерции и опирающегося на вязкоупругий демпфер. Эта математическая модель с достаточной для инженеров достоверностью описывает динамические процессы вращающихся лопаток турбин, рабочей части иглофрезы и прочих подобных механизмов. Постановка задачи о собственных значениях базируется на вариационном принципе и ставится в комплексной форме. Такой подход позволяет оценивать демпфирующую способность стержня через мнимую часть собственной частоты (коэффициент демпфирования), а также легко усложнять и варьировать параметры конструкции. Например, рассматривать стержень с переменным поперечным сечением или переменной плотностью по длине. Достоверность результатов методики в статье доказана путем сравнения их с имеющимися в литературе данными. Основным результатом следует считать, что для структурно-неоднородных конструкций (т.е. конструкций, состоящих из упругих и вязкоупругих элементов) можно при неизменной реологии демпфера увеличить интенсивность гашения колебаний за счет рационального выбора их геометрических или упругих параметров. Причем максимум поглощаемой энергии как в первом, так и во втором случае, определяют совместно коэффициенты демпфирования двух низших форм колебаний. Из принципа *min*max следует, что в качестве глобального коэффициента демпфирования выступают поочередно коэффициенты демпфирования 1-й и 2-й форм колебаний. В точке экстремума наблюдается максимальное взаимодействие 2-х низших форм колебаний, в результате чего и наблюдается этот синергетический эффект. Очевидно, что в случае вынужденных колебаний подобранные параметры механической системы обеспечат минимальные резонансные амплитуды.

Ключевые слова: стержень; колебания; коэффициент демпфирования; вязкоупругость; собственные частоты; демпфер.

Введение

Надежность работы рабочей части иглофрезы, лопастей турбин и других подобных механизмов в значительной степени определяется уровнем резонансных амплитуд.

Перечисленные элементы (лопасти, иглы и т.д.) с хорошей для инженерных расчетов точностью могут быть представлены упругими стержневыми моделями, находящимися в поле центробежных сил [1].

Для рассеивания энергии упругих поперечных колебаний (как наиболее опасных) и, в конечном счете, уменьшения резонансных амплитуд рассматривается вариант установки кольцевого бандажа-демпера из вязкоупругого материала, связывающего упругие элементы.

Схематически часть конструкции представлена на рис. 1.

1. Постановка задачи

Задача о собственных поперечных колебаниях стержня ставится как для определения спектра резонансных частот, так и для количественной оценки диссипируемой энергии в зависимости от геометрических и физических параметров модели.

Предполагается, что один конец упругого стержня жестко заделан в диск-оправку, другой – свободен. Взаимодействие стержня с вязкоупругим бандажом в модели заменяется точечным его опиранием на одномерную вязкоупругую пружину (демпфер). При вращении стержня в нем возникают растягивающие центробежные силы инерции. На рис. 2 эта сила обозначена как $N(x)$ для каждого сечения стержня с координатой x . Кроме того, l – длина стержня, l_0 – координата крепления демпфера к стержню, \bar{C} – жесткость демпфера, Ω – угловая скорость вращения стержня, a – радиус диска.

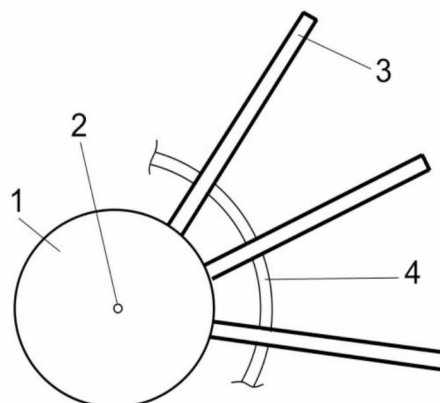


Рис. 1. Схема конструкции. 1 – диск, 2 – ось вращения, 3 – стержни, 4 – кольцевой бандаж

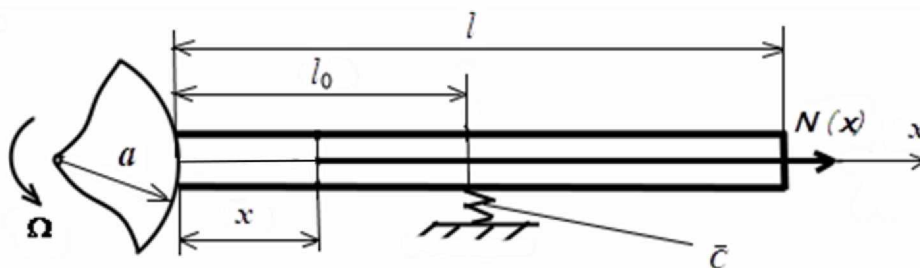


Рис. 2. Физическая модель стержневой системы

Математическая постановка задачи

Рассмотрим поперечные колебания жестко заделанного одним концом упругого стержня, опирающегося в произвольной точке на вязкоупругий демпфер. Физические и геометрические соотношения принимаются в линейной постановке. Закон колебания стержня примем в виде:

$$W(x,t) = W_0(x)e^{-i\bar{\omega}t}, \tag{1}$$

где $W_0(x)$ – собственная форма поперечных колебаний, $\bar{\omega} = \omega_R + i\omega_I$ – комплексная частота колебаний, ω_R – собственная частота, ω_I – коэффициент демпфирования.

Продольные силы инерции $N(x)$, действующие в каждом сечении стержня, находятся как

$$N(x) = \frac{1}{2} \rho F \Omega^2 [l^2 + 2al - x^2 - 2ax], \tag{2}$$

где ρ – плотность материала стержня, F – площадь поперечного сечения стержня, Ω – угловая скорость вращения стержня, a – радиус жесткой оправки-диска.

Формула (2) получена в предположении $\Omega = \text{const}$, $\rho = \text{const}$ и $x \in [0, l]$.

Для стержня с переменными сечением и плотностью по длине, сила $N(x)$ определяется как

$$N(x) = \Omega^2 \int_x^l \rho(x) F(x) (x+a) dx. \tag{3}$$

Учет продольной силы $N(x)$, а также влияния вязкоупругого элемента на поперечные колебания стержня проще всего осуществить при вариационной постановке задачи. Потенциальная энергия стержня Π_c определяется следующим соотношением:

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \int_0^l (M^2/EJ) dx, \tag{4}$$

где $M(x, t)$ – изгибающий момент в каждом сечении стержня, E – модуль Юнга, J – момент инерции поперечного сечения.

Изгибающий момент M с учетом продольной силы вычисляется так:

$$M(x, t) = -EJ \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} - N(x)W(x, t). \quad (5)$$

Предполагается, что вязкоупругие свойства демпфера описываются в рамках линейной теории Больцмана–Вольтерры. С помощью метода замораживания [2] интегральный оператор Вольтерры заменяется на комплексную жесткость $\bar{C} = C_R + iC_I$, где:

$$C_R = C \left(1 - \int_0^{\infty} R(\tau) \cos(\omega_R \tau) d\tau \right); \quad C_I = -C \int_0^{\infty} R(\tau) \sin(\omega_R \tau) d\tau, \quad (6)$$

здесь C – мгновенная жесткость [н/м], $R(\tau)$ – ядро релаксации. Тогда потенциальная энергия демпфера определяется по формуле:

$$\Pi_D = \frac{1}{2} (C_R + iC_I) W^2(l_0, t), \quad (7)$$

где l_0 – координата точки контакта стержня с демпфером, действительная часть Π_D – энергия упругой деформации, мнимая часть – энергия диссипации (рассеивания).

Потенциальная энергия системы в целом равна:

$$\Pi = \Pi_c + \Pi_D. \quad (8)$$

Кинетическая энергия системы (без учета массы демпфера) имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} \rho F \int_0^l \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (9)$$

Из принципа Гамильтона–Остроградского вариация от действия по Гамильтону равна нулю:

$$\delta \left(\int_{t_A}^{t_B} (T - \Pi) dt \right) = 0, \quad (10)$$

тут t_A, t_B – интервал, за который система переходит из положения A в положение B .

Последовательно подставляя в соотношение (10) формулы (9), (8), (7), (4), (5), (2), (1), получим вариационное уравнение относительно $W_0(x)$:

$$\delta \left(\frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 W_0}{dx^2} \right)^2 dx + \int_0^l N(x) W_0 \frac{d^2 W_0}{dx^2} dx + \frac{1}{2EJ} \int_0^l N^2 W_0^2 dx + \frac{1}{2} \bar{C} W_0^2(l_0) - \frac{\rho \bar{\omega}^2 F}{2} \int_0^l W_0^2 dx \right) = 0. \quad (11)$$

Граничные условия для стержня следующие:

$$x = 0: \quad W_0 = 0 \quad \frac{dW_0}{dx} = 0; \quad (12)$$

$$x = l: \quad \frac{d^2 W_0}{dx^2} = 0 \quad \frac{d^3 W_0}{dx^3} = 0. \quad (13)$$

Итак, задача состоит в определении собственных форм $W_0(x)$, удовлетворяющих вариационному уравнению (11) и граничным условиям (12), (13).

2. Метод решения

Поставленная задача решается методом Ритца. Искомое решение $W_0(x)$ приближенно заменяется конечным рядом (длиной K) по базисным функциям $\varphi_k(x)$:

$$W_0(x) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \varphi_k(x), \quad (14)$$

где α_k – неизвестные коэффициенты.

Для граничных условий (12), (13) в качестве базисных функций принимаются [3]:

$$\varphi_k(x) = (\operatorname{sh} r_k + \sin r_k) \left(\operatorname{ch} \frac{xr_k}{l} - \cos \frac{xr_k}{l} \right) - (\operatorname{ch} r_k + \cos r_k) \left(\operatorname{sh} \frac{xr_k}{l} - \sin \frac{xr_k}{l} \right), \quad (15)$$

где r_k – известные корни характеристического частотного уравнения.

Подставляя (15), (14) в уравнение (11) и варьируя по неизвестным α_k , получим систему однородных алгебраических уравнений относительно α_k .

В матричном виде эти уравнения имеют следующий вид:

$$[A + \bar{D} - \bar{\omega}^2 B] \Lambda = 0, \quad (16)$$

где A – матрица жесткости стержня (элементы действительные), \bar{D} – матрица жесткости демпфера (элементы комплексные), B – матрица масс системы, Λ – вектор-столбец неизвестных α_k .

Элементы матриц A , \bar{D} , B вычисляются соответственно по следующим формулам:

$$a_{kl} = \int_0^l \left(\frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} \frac{d^2 \varphi_l}{dx^2} + N(x) \left(\varphi_k \frac{d^2 \varphi_l}{dx^2} + \varphi_l \frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} \right) + \frac{N^2(x)}{EJ} \varphi_k \varphi_l \right) dx, \quad (17)$$

$$d_{kl} = \bar{C} \varphi_k(l_0) \varphi_l(l_0), \quad (18)$$

$$b_{kl} = \begin{cases} \rho F \int_0^l \varphi_k \varphi_l dx, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad (19)$$

Система (16) имеет нетривиальное решение в случае равенства нулю ее определителя. В итоге получаем частотное уравнение относительно $\bar{\omega}$. Задача по определению комплексных корней решается с помощью итерационного метода Мюллера [4], где в качестве начальных приближений принимались собственные частоты упругой задачи.

3. Результаты расчетов

К результатам следует отнести две группы проведенных расчетов:

Первая относится к исследованию вопроса практической сходимости метода и достоверности получаемых результатов;

Вторая – к выбору рациональных геометрических и физических параметров системы, при которых ее диссипативные характеристики достигают наибольших значений.

Рассмотрим эти группы последовательно.

I. Для исследования практической сходимости метода были решены 3 задачи: **A**, **B**, **C**.

A. Задача колебаний упругого стержня (без учета демпфера и сил инерции). Результаты показали, что при увеличении числа членов ряда (14) собственные частоты приближаются к истинным значениям сверху. В табл. 1 представлены некоторые результаты для первых 3-х собственных частот упругого стержня:

Таблица 1

| Расчет низших частот в зависимости от длины ряда (14) | | | | | |
|---|------|------|------|------|----------|
| K | 4 | 5 | 6 | 9 | ∞ |
| ω_1 , рад/сек | 3,66 | 3,59 | 3,56 | 3,53 | 3,51 |
| ω_2 , рад/сек | 23,9 | 23,1 | 22,7 | 22,4 | 22,0 |
| ω_3 , рад/сек | 64,2 | 63,9 | 63,5 | 62,5 | 61,7 |

Расчет проводился для стержня со следующими характеристиками:

$$E = l = J = \rho = 1, \quad \bar{C} = 0, \quad \Omega = 0.$$

Значения частот ω_n при $K = \infty$ соответствуют теоретическим величинам [3]. Из табл. 1 следует, что уже при $K = 9$ результаты можно считать вполне удовлетворительными.

Решенных задач на собственные колебания упругого стержня, находящегося в поле центростремительных сил инерции и одновременно опирающегося на демпфер, в литературе найти не удалось. Поэтому сходимость метода апробировалась на задачах **B**, **C**.

В. Задача колебаний неподвижного консольного стержня, опертого на упругую пружину

Расчетные исходные данные были следующими:

$$\Omega = 0, E = 2 \times 10^{11} \text{ н/м}^2, J = 0,785 \times 10^{-12} \text{ м}^4, l = 0,1 \text{ м}, \rho = 7,8 \times 10^3 \text{ кг/м}^3,$$

$$F = 3,14 \times 10^{-6} \text{ м}^2, C = 10^3 \text{ н/м}.$$

Координата крепления пружины к стержню принята $l_0 = 0,05$ м. В работе [3] для такой системы первая круговая собственная частота равна $\omega_1^T = 1758,2$ рад/с. Расчет по методике при $K = 9$ дал результат $\omega_1^P = 1760,6$ рад/с. Для $l_0 = 0,09$ м имеем, соответственно, $\omega_1^T = 2092$ рад/с и $\omega_1^P = 2099,1$ рад/с.

Следовательно, метод учета упругой опоры дает тоже вполне достоверные результаты.

С. Задача о собственных колебаниях упругого стержня, вращающегося со скоростью Ω

Физические и геометрические характеристики стержня те же, что и в предыдущем примере. Радиус вращающегося диска равен $a = 0,1$ м. Жесткость демпфера $C = 0$.

В табл. 2 для разных угловых скоростей вращения приведены две расчетные частоты ω_1^P , ω_2^P и две теоретические ω_1^T , ω_2^T , взятые из работы [5].

Таблица 2

Зависимость двух низших частот от скорости вращения

| Ω , рад/с | ω_1^P , рад/с | ω_1^T , рад/с | ω_2^P , рад/с | ω_2^T , рад/с |
|------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 3 | 816,2 | 814,8 | 5121,3 | 5115,6 |
| 10 | 825,7 | 824,0 | 5128,2 | 5123,8 |

Частоты ω_n^P получены при $K = 9$ ряда (14). Это сравнение также является доказательством достоверности получаемых результатов.

II. Вторая часть расчетов касалась оптимизации вязкоупругой конструкции. Для того чтобы кольцевой бандаж эффективно выполнял свою роль, необходимо подобрать параметры системы, обеспечивающие максимальное рассеивание энергии. В задаче на собственные колебания количественной мерой поглощения энергии каждой формой являются соответствующие коэффициенты демпфирования ω_f . Исследовались коэффициенты демпфирования низших форм колебаний как наиболее слабо затухающих. Кроме того, влияние сил инерции особо весомо как раз на эти формы (до 35 % в сторону увеличения собственных частот [6]).

В качестве варьируемых параметров системы были выбраны два: координата крепления демпфера (l_0) и ее мгновенная жесткость (C). В зависимости от этих параметров рассчитывались собственные частоты и коэффициенты демпфирования ω_f . Для обеих задач физические и геометрические характеристики стержня были такими же, как в задаче **I.В.** Угловая скорость вращения стержня $\Omega = 10$ рад/с.

А. При первом расчете изменялась координата l_0 при фиксированной мгновенной жесткости демпфера $C = 5 \times 10^2$ н/м. Вязкоупругие свойства демпфера описывались слабосингулярным ядром релаксации [2]: $R(t) = Ae^{-\beta t} t^{\alpha-1}$ с параметрами $A = 0,01$, $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,05$. На рис. 3 приведена зависимость коэффициентов демпфирования ω_f^1, ω_f^2 от координаты l_0/l .

Первые две собственные формы затухают наиболее медленно, поэтому эти показатели диссипативных свойств системы будут определяющими. Графики указанных коэффициентов пересекаются, и тогда, исходя из принципа **minmax**, глобальным коэффициентом демпфирования, характеризующим диссипативные свойства системы в целом, будет кривая ω_f^* .

График ω_f^* представляет собой суперпозицию кривой ω_f^1 до точки пересечения и кривой ω_f^2 после точки пересечения. Глобальный коэффициент демпфирования ω_f^* имеет явно выра-

женный максимум при $l_0/l = 0,62$, где и будет наиболее эффективное гашение низших форм колебаний.

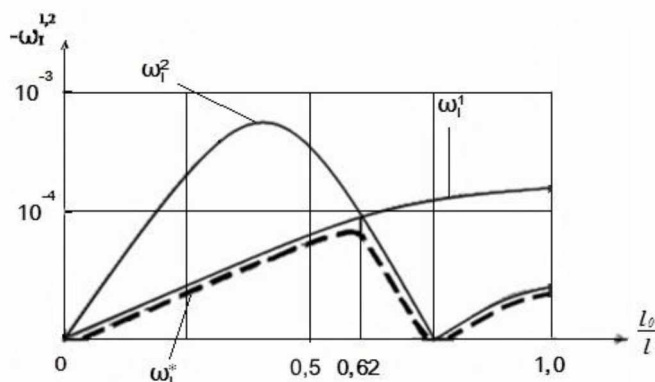


Рис. 3. Коэффициенты демпфирования в зависимости от l_0/l

В. Во втором численном эксперименте варьировалась мгновенная жесткость демпфера C . Координата крепления демпфера к стержню при этом фиксировалась в точке $l_0/l = 0,62$. На рис. 4 показаны зависимости коэффициентов ω_1^1, ω_1^2 от мгновенной жесткости демпфера C .

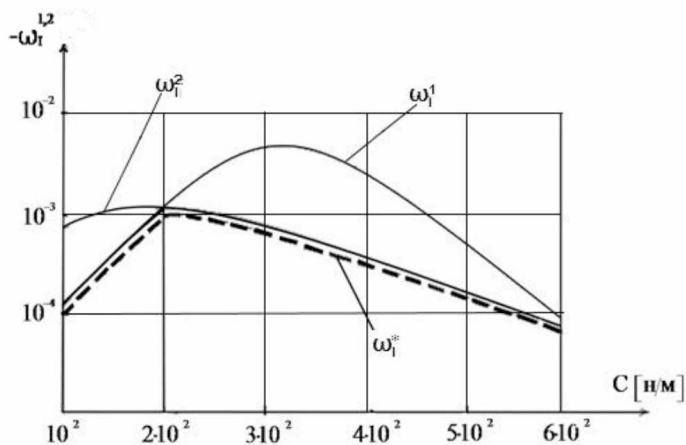


Рис. 4. Коэффициенты демпфирования в зависимости от C

И в этом случае график глобального коэффициента демпфирования ω_1^* имеет максимум, который достигается при $C = 2 \cdot 10^2$ н/м. Рациональный выбор рассматриваемых параметров позволяет существенно увеличить коэффициент демпфирования.

Заключение

Предложен алгоритм решения задачи о собственных колебаниях вращающегося упругого стержня с вязкоупругим демпфером. Для таких структурно-неоднородных систем выявлен эффект взаимодействия низших собственных форм колебания, позволяющий повысить демпфирующие свойства за счет рационального выбора их геометрических, упругих параметров (при неизменной реологии вязкоупругого элемента). Наличие центробежных сил инерции в качественном плане картину не меняет, сдвигая лишь оптимальные значения параметров конструкции.

Литература

1. Влияние рассеяния энергии в материале на колебания лопаток с неоднородностями / А.П. Зиньковский, И.Г. Токарь, В.А. Круц, Я.Д. Круглый // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2012. – № 9(96). – С. 132–137.
2. Кравчук, А.С. *Механика полимерных и композиционных материалов: экспериментальные и численные методы* / А.С. Кравчук, В.П. Майборода, Ю.С. Уржумцев. – М.: Наука, 1985. – 303 с.

3. Филиппов, А.П. Колебания деформируемых систем / А.П. Филиппов. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.
4. Форсайт, Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 279 с.
5. Тимошенко, С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
6. Елисеев, В.В. Расчетный метод построения диаграмм Кэмпбелла для турбинных лопаток / В.В. Елисеев, А.А. Москалец // Современное машиностроение. Наука и образование. – 2016. – № 5. – С. 413–420.

Поступила в редакцию 12 апреля 2017 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2019, vol. 11, no. 2, pp. 36–43*

DOI: 10.14529/mmph190205

SELF-OSCILLATIONS OF A ROTATING ELASTIC ROD WITH DAMPER

V.M. Yaganov

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

E-mail: avtofur@yandex.ru

We consider the self-oscillations of an elastic rod located in the field of centrifugal forces of inertia and based on a viscoelastic damper. This mathematical model, with the accuracy sufficient for engineers, describes the dynamic processes in the rotating turbine blades, in the working part of the wire brush, and in other similar mechanisms. The formulation of the eigenvalue problem is based on the variational principle and is put in a complex form. This approach makes it possible to estimate the damping ability of the rod through the imaginary part of the eigen frequency (damping coefficient), as well as to easily complicate and vary the design parameters. For example, a rod can be considered with variable cross-section or variable density along its length. In the article the validity of the method results is proved by comparing them with the data available in the literature. The following should be considered as the main result: for structurally inhomogeneous structures (i.e. structures consisting of elastic and viscoelastic elements), in case of a constant damper rheology, it is possible to increase the intensity of vibration damping due to rational selection of their geometric or elastic parameters. Meanwhile the maximum of the absorbed energy, both in the first and in the second case, is determined jointly by the damping coefficients of the two lower forms of oscillations. According to the minmax principle, the damping coefficients of the 1st and 2nd forms of oscillations act alternately as the global damping coefficient. At the extreme point there is a maximum interaction of 2 lower forms of oscillations, as a result of which this synergetic effect is observed. It is obvious that in the case of forced oscillations, the selected parameters of the mechanical system will provide minimal resonant amplitudes.

Keywords: rod; oscillations; damping coefficient; viscoelasticity; eigen frequencies; damper.

References

1. Zinkovskii A.P., Tokar' I.G., Kruts V.A., Kruglyy Ya.D. Influence of Dissipation of Energy in Material on Vibrations of Structural Elements with Nonuniformities. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya*, 2012, no. 9(96), p. 132–137. (in Russ.).
2. Kravchuk A.S., Mayboroda V.P., Urzhumtsev Yu.S. *Mekhanika polimernykh i kompozitsionnykh materialov: eksperimental'nye i chislennye metody* (Mechanics of polymer and composite materials: experimental and numerical methods). Moscow, Nauka Publ., 1985, 303 p. (in Russ.).
3. Filippov A.P. *Kolebaniya deformiruemyykh sistem* (Oscillations of deformable systems). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1970, 734 p. (in Russ.).
4. Forsayt Dzh., Mal'kol'm M., Mouler K. *Mashinnye metody matematicheskikh vychisleniy* (Machine methods for mathematical calculations). Moscow, Mir Publ., 1980, 279 p. (in Russ.). [For-

sythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B. *Computer methods for mathematical computations*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1977, 259 p.]

5. Timoshenko S.P. *Kolebaniya v inzhernom dele* (Oscillations in engineering). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1985, 472 p. (in Russ.).

6. Eliseev V.V., Moskalets A.A. Raschetnyy metod postroeniya diagramm Kempbella dlya turbinnykh lopatok (The calculated method of constructing Campbell diagrams for turbine blades). *Sovremennoe mashinostroenie. Nauka i obrazovanie*, 2016, no. 5, pp. 413–420. (in Russ.).

Received April 12, 2017