УДК 517.925 DOI: 10.14529/mmph190203

О ГРУБОСТИ И БИФУРКАЦИЯХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОКРУЖНОСТИ

В.Ш. Ройтенберг
Ярославский государственный технический университет, г. Ярославль, Российская Федерация
E-mail: vroitenberg@mail.ru

Динамическая система, заданная дифференциальным уравнением на многообразии – фазовом пространстве системы, называется грубой, если топологическая структура фазового портрета не меняется при переходе к близкому уравнению. Понятие грубости возникло из представления, что существенные свойства динамической системы, описывающей реальный процесс, не должны меняться при малых изменениях параметров системы. К настоящему времени получены естественные необходимые и достаточные условия грубости динамических систем на замкнутых многообразиях любой размерности. Однако если грубость рассматривать в более узких классах динамических систем, в частности, в пространстве систем, заданных дифференциальными уравнениями с полиномиальными правыми частями, то условия грубости не исследованы даже для малых размерностей фазового пространства. В настоящей работе рассматриваются динамические системы, заданные дифференциальными уравнениями, правые части которых являются тригонометрическими полиномами степени, не превосходящей натурального числа n. Фазовым пространством таких систем является окружность. Описаны уравнения, грубые относительно пространства E(n) всех таких уравнений. Уравнение является грубым тогда и только тогда, когда его правая часть имеет только простые нули, то есть все особые точки которого – гиперболические. Множество всех грубых уравнений открыто и всюду плотно в пространстве E(*n*). В множестве всех негрубых уравнений выделено открытое и всюду плотное подмножество, состоящее из уравнений первой степени негрубости. Оно является аналитическим подмногообразием коразмерности один в E(n) и состоит из уравнений, для которых все нули правой части простые, за исключением одного двукратного нуля.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение на окружности; тригонометрический полином; грубость; бифуркационное многообразие.

Введение

Понятие грубой динамической системы, задаваемой векторным полем, топологическая структура которой не меняется при малых возмущениях поля, было введено А.А. Андроновым и Л.С. Понтрягиным в 1937 году и в дальнейшем стало предметом многочисленных исследований. Грубые системы важны и как математический объект, и с точки зрения приложений. К настоящему времени получены естественные необходимые и достаточные условия грубости в пространстве векторных полей с C^1-топологией на любом замкнутом многообразии [1–2], а также показано, что на многообразиях размерности ≥ 3 грубые системы не типичны [3].

В отличие от общей ситуации, описание векторных полей (дифференциальных уравнений) на окружности, грубых относительно пространства всех векторных полей класса C^r ($r \in \mathbf{N} \cup \{\infty, \omega\}$), и их бифуркаций – весьма простая задача [4]. Однако в «меньшем» пространстве дифференциальных уравнений с правыми частями, являющимися тригонометрическими полиномами степени $\leq n$, эта задача уже нетривиальна. Она будет рассмотрена в настоящей работе.

Формулировка результатов

На окружности $\mathbf{S}^1 = \mathbf{R} / 2\pi\mathbf{Z}$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \tag{1}$$

где

$$a(\varphi) = \sum\nolimits_{0 \leq i+j \leq n} a_{ij} \cos^i \varphi \sin^j \varphi \tag{2}$$

– тригонометрический полином степени $\le n$ ($n \in \mathbf{N}$). Уравнение (1) отождествим с его правой частью – функцией a, а также с упорядоченным набором чисел a_{ij}, выписанных в лексикографическом порядке пар номеров (i, j), $0 \le i + j \le n$, а множество $\mathrm{E}(n)$ таких уравнений с пространством $\mathbf{R}^{(n+1)(n+2)/2}$.

Уравнение $a \in \mathrm{E}(n)$ называется *грубым относительно множества* $\Lambda \subset \mathrm{E}(n)$, если $a \in \Lambda$ и существует такая его окрестность $U(a)$ в Λ, что для любого уравнения $\tilde{a} \in U(a)$ существует гомеоморфизм $h_{a,\tilde{a}} : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$, переводящий траектории уравнения $\tilde{a}$ в траектории уравнения a. Уравнение $a \in \mathrm{E}(n)$, грубое относительно $\mathrm{E}(n)$, будем называть просто *грубым уравнением*.

Пусть $\Sigma^0 = \Sigma^0\mathrm{E}(n)$ – множество уравнений $a \in \mathrm{E}(n)$, для которых функция $a(\varphi)$ либо не имеет нулей, либо имеет только простые нули. Обозначим Σ_m^0 ($m = 0,1,...,n$) подмножество в $\Sigma^0\mathrm{E}(n)$, состоящее из уравнений, у правых частей которых $2m$ нулей, то есть имеющих $2m$ гиперболических особых точек.

Теорема 1. 1) *Множество* $\Sigma^0\mathrm{E}(n)$ *открыто и всюду плотно в* $\mathrm{E}(n)$.

2) Уравнение $a \in \mathrm{E}(n)$ *является грубым тогда и только тогда, когда принадлежит* $\Sigma^0\mathrm{E}(n)$*; при этом для любого* $a \in \Sigma^0\mathrm{E}(n)$ *гомеоморфизмы* $h_{a,\tilde{a}}$*, фигурирующие в определении грубости, можно выбрать так, что*

$$\lim_{\tilde{a} \to a} \max_{\varphi \in [0,2\pi]} |\overline{h}_{a,\tilde{a}}(\varphi) - \varphi| = 0, \tag{3}$$

где $\overline{h}_{a,\tilde{a}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *– гомеоморфизм, накрывающий гомеоморфизм* $h_{a,\tilde{a}}$.

3) Множества Σ_m^0 *(*$m = 0,1,...,n$*) непустые; они совпадают с классами топологической эквивалентности уравнений из* $\Sigma^0\mathrm{E}(n) = \Sigma_0^0 \cup \Sigma_1^0 \cup ... \cup \Sigma_n^0$.

Пусть $\Sigma^1 = \Sigma^1\mathrm{E}(n)$ – множество уравнений $a \in \mathrm{E}(n)$, для которых все нули функции $a(\varphi)$ – простые, за исключением одного двукратного нуля.

Теорема 2. *1) Множество* $\Sigma^1\mathrm{E}(n)$ *открыто и всюду плотно в* $\mathrm{E}(n) \setminus \Sigma^0\mathrm{E}(n)$ *и является вложенным аналитическим подмногообразием* $\mathrm{E}(n)$ *коразмерности один.*

2) Уравнение $a \in \mathrm{E}(n)$ *является грубым относительно* $\mathrm{E}(n) \setminus \Sigma^0\mathrm{E}(n)$ *тогда и только тогда, когда принадлежит* $\Sigma^1\mathrm{E}(n)$*; при этом для любого* $a \in \Sigma^1\mathrm{E}(n)$ *гомеоморфизмы* $h_{a,\tilde{a}}$*, фигурирующие в определении грубости, можно выбрать удовлетворяющими условию* (3).

Доказательство теоремы 1

Открытость $\Sigma^0\mathrm{E}(n)$, грубость уравнения $a \in \Sigma^0\mathrm{E}(n)$ и тот факт, что гомеоморфизм $h_{a,\tilde{a}}$ можно выбрать удовлетворяющим условию (3), очевидны.

Докажем плотность $\Sigma^0\mathrm{E}(n)$ в $\mathrm{E}(n)$. Пусть уравнение $a \in \mathrm{E}(n)$. Покажем, что в любой его окрестности $U(a)$ есть уравнение из $\Sigma^0\mathrm{E}(n)$. Без ограничения общности можно считать, что $a(\varphi)$ – ненулевая функция. Так как $a(\varphi)$ – аналитическая функция, то она имеет конечное число нулей конечной кратности. Поэтому при достаточно малом $\mu > 0$ уравнение $\dot{\varphi} = a(\varphi) + \mu$ принадлежит $U(a) \cap \Sigma^0\mathrm{E}(n)$.

Докажем, что из грубости уравнения $a \in \mathrm{E}(n)$ следует, что $a \in \Sigma^0\mathrm{E}(n)$. Предположим противное: $a \in \mathrm{E}(n) \setminus \Sigma^0\mathrm{E}(n)$. Пусть $U(a)$ – окрестность, фигурирующая в определении грубости. Поскольку в $U(a)$ есть уравнение из $\Sigma^0\mathrm{E}(n)$, то $a(\varphi)$ имеет конечное число нулей, все они имеют нечетную кратность, причем хотя бы один из них, для определенности φ_0, имеет кратность $2m+1 \ge 3$. Тогда $a(\varphi) = l(\varphi - \varphi_0)^{2m+1} + o((\varphi - \varphi_0)^{2m+1})$, где $l \ne 0$. Уравнение a_μ:

$\dot\varphi = a(\varphi) - \mu(\operatorname{sgn} l)\sin(\varphi - \varphi_0)$ при достаточно малом $\mu > 0$ принадлежит $U(a)$ и имеет больше особых точек, чем a. Поскольку гомеоморфизм h_{a,a_μ} переводит особые точки уравнения a_μ в особые точки уравнения a, то получаем противоречие. Тем самым $a \in \Sigma^0\mathrm{E}(n)$.

Уравнение $\dot\varphi = 1$ принадлежит Σ_0^0. Для любого $m = 1,\ldots,n$ уравнение $\dot\varphi = a_m^0(\varphi)$, где $a_m^0(\varphi) = \prod\limits_{j=0}^{m-1}\sin(\varphi - \varphi_j^0)$, $\varphi_j^0 = \dfrac{\pi j}{n}$, принадлежит Σ_m^0.

Пусть уравнение $a \in \Sigma^0\mathrm{E}(n)$ представлено в виде (1)–(2) и $a(\pi) \neq 0$. Запишем $a(\varphi)$ при $\varphi \in (-\pi,\pi)$ в виде $a(\varphi) = \hat a(\operatorname{tg}(\varphi/2))$, где

$$\hat a(t) = \sum_{0\le i+j\le n} a_{ij}\frac{(1-t^2)^i(2t)^j}{(1+t^2)^{i+j}} = \frac{1}{(1+t^2)^n}\sum_{k=0}^{2n} c_k t^k .$$

Функция $\hat a(t)$ имеет не более $2n$ нулей. Соответственно, и $a(\varphi)$ имеет не более $2n$ нулей, то есть $a \in \Sigma_m^0$ при некотором $m = 0,1,\ldots,n$. Если $a \in \Sigma^0\mathrm{E}(n)$ и $a(\pi) = 0$, то функция $a_*(\varphi) = a(\varphi + \varepsilon)$ имеет столько же нулей, что и $a(\varphi)$, а при достаточно малом $\varepsilon > 0$ $a_*(\pi) \neq 0$. Таким образом, каждое уравнение $a \in \Sigma^0\mathrm{E}(n)$ принадлежит одному из множеств Σ_m^0, $m = 0,1,\ldots,n$. Очевидно, что Σ_m^0 – классы топологической эквивалентности.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2

Открытость $\Sigma^1\mathrm{E}(n)$ в $\mathrm{E}(n)\setminus\Sigma^0\mathrm{E}(n)$ очевидна.

Докажем плотность. Пусть уравнение $a \in \mathrm{E}(n)\setminus\Sigma^0\mathrm{E}(n)\setminus\Sigma^1\mathrm{E}(n)$. Покажем, что в любой его окрестности $U(a)$ есть уравнение из $\Sigma^1\mathrm{E}(n)$. Если функция $a(\varphi)$ ненулевая, то она имеет нуль φ_0 кратности $k \ge 2$. Если $a(\varphi) \equiv 0$, то возьмем $\varphi_0 = 0$. Рассмотрим уравнение a_μ: $\dot\varphi = a_\mu(\varphi)$, где $a_\mu(\varphi) = a(\varphi) - \mu b(\varphi)$, $b(\varphi) = 1 - \cos(\varphi - \varphi_0)$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что при всех $\mu \in (0,\delta)$ $a_\mu \in U(a)$, а φ_0 – двукратный нуль функции $a_\mu(\varphi)$. Фиксируем $\mu_0 \in (0,\delta)$ и выберем такое $0 < \varepsilon < \min\{\delta - \mu_0, \pi\}$, что на дуге $[\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon]$ нет других нулей функции $a_\mu(\varphi)$, $\mu \in [\mu_0, \mu_0 + \varepsilon)$. Функция $f(\varphi) = a(\varphi)/b(\varphi)$ определена в точках дуги $I = [\varphi_0 + \varepsilon, \varphi_0 - \varepsilon + 2\pi]$. Если $a(\varphi) \equiv 0$, то $a_{\mu_0} \in \Sigma^1\mathrm{E}(n) \cap U(a)$. Если $a(\varphi)$ – ненулевая функция, то производная $f'(\varphi) = [a'(\varphi)b(\varphi) - a(\varphi)b'(\varphi)]/b^2(\varphi)$ – непостоянная аналитическая функция на I. Поэтому $f(\varphi)$ имеет конечное число критических точек, а потому и конечное число критических значений. Следовательно, существует число $\mu_1 \in (\mu_0, \mu_0 + \varepsilon)$, не являющееся критическим значением. Если $a_{\mu_1}(\varphi) = 0$, то $f(\varphi) = a(\varphi)/b(\varphi) = \mu_1$, а $f'(\varphi) = [a'(\varphi) - \mu_1 b'(\varphi)]/b(\varphi) \neq 0$, и потому $(a_{\mu_1})'(\varphi) \neq 0$. Тем самым все нули функции $a_{\mu_1}(\varphi)$ на I простые, и уравнение $a_{\mu_1} \in \Sigma^1\mathrm{E}(n) \cap U(a)$.

Докажем, что $\Sigma^1\mathrm{E}(n)$ – аналитическое подмногообразие в $\mathrm{E}(n)$, следуя методу из [5]. Пусть $a_0 \in \Sigma^1\mathrm{E}(n)$ и φ_0 – двукратный нуль $a_0(\varphi)$. Функция $\hat a : \mathbf{S}^1 \times \mathrm{E}(n) \to \mathbf{R}$, определенная равенством $\hat a(\varphi, a) := a(\varphi)$, является аналитической. Так как $\hat a'_\varphi(\varphi_0, a_0) = 0$, $\hat a''_{\varphi\varphi}(\varphi_0, a_0) \neq 0$, то по теореме о неявной функции существуют число $\varepsilon > 0$, окрестность $V(a_0)$ уравнения a_0 в $\mathrm{E}(n)$ и аналитическая функция $\hat\varphi : V(a_0) \to (\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 - \varepsilon)$, такие, что для любых $\varphi \in (\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 - \varepsilon)$, $a \in V(a_0)$:

$$a''(\varphi) \neq 0 \ \text{ и } \ a'(\varphi) = \hat a'_\varphi(\varphi, a) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \hat\varphi(a). \qquad (4)$$

Определим аналитическую функцию $g:V(a_0)\to \mathbf{R}$, положив $g(a):=\hat{a}(\hat{\varphi}(a),a)=a(\hat{\varphi}(a))$. Пусть $h:\dot{\varphi}=1$. Тогда $a_0+\tau h:\dot{\varphi}=a_0(\varphi)+\tau$,

$$g'(a_0)h=\tfrac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0}g(a_0+\tau h)=\tfrac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0}[a_0(\hat{\varphi}(a_0+\tau h))+\tau]=a'(\varphi_0)\tfrac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0}\hat{\varphi}(a_0+\tau h)+1=1\neq 0.$$

Таким образом, $g'(a_0)\neq 0$. Уменьшив при необходимости окрестность $V(a_0)$, мы можем считать, что $\forall a\in V(a_0)$ $g'(a)\neq 0$ и все нули функции $a(\varphi)$, не принадлежащие интервалу $(\varphi_0-\varepsilon,\varphi_0-\varepsilon)$, простые. Отсюда и из (4) получаем, что $\Sigma^1\mathrm{E}(n)\cap V(a_0)=g^{-1}(0)$, и потому $\Sigma^1\mathrm{E}(n)$ – вложенное аналитическое подмногообразие коразмерности один.

Ясно, что при переходе векторного поля через бифуркационное многообразие $\Sigma^1\mathrm{E}(n)$ происходит седло-узловая бифуркация – две гиперболические особые точки сливаются в одну и исчезают.

Грубость уравнения $a\in\Sigma^1\mathrm{E}(n)$ относительно $\mathrm{E}(n)\setminus\Sigma^0\mathrm{E}(n)$ и тот факт, что гомеоморфизм $h_{a,\tilde{a}}$ можно выбрать удовлетворяющим условию (3), очевидны.

Покажем, что из грубости уравнения a относительно $\mathrm{E}(n)\setminus\Sigma^0\mathrm{E}(n)$ следует его принадлежность к $\Sigma^1\mathrm{E}(n)$. Пусть $U(a)$ – окрестность, фигурирующая в определении грубости. Поскольку в $U(a)$ есть уравнение из $\Sigma^1\mathrm{E}(n)$, то $a(\varphi)$ имеет конечное число нулей, один из них, для определенности φ_0, имеет четную кратность: $a(\varphi)=l(\varphi-\varphi_0)^{2m}+o((\varphi-\varphi_0)^{2m})$, где $l\neq 0$, а остальные имеют нечетною кратность. При $n=1$ отсюда следует, что $a\in\Sigma^1\mathrm{E}(n)$. Пусть $n\geq 2$ и $a\in\mathrm{E}(n)\setminus\Sigma^0\mathrm{E}(n)\setminus\Sigma^1\mathrm{E}(n)$. Возможны только следующие случаи: а) $m\geq 2$ или б) $m=1$ и $a(\varphi)$ имеет нуль φ_1 нечетной кратности $2k+1\geq 3$. Рассмотрим уравнение a_μ: $\dot{\varphi}=a_\mu(\varphi)$, где в случае а):

$$a_\mu(\varphi)=a(\varphi)-\mu(\operatorname{sgn} l)(1-\cos(\varphi-\varphi_0)),$$

а в случае б):

$$a_\mu(\varphi)=a(\varphi)-\mu(\operatorname{sgn} l_1)(1-\cos(\varphi-\varphi_0))(1-\cos(\varphi-\varphi_1)),\ l_1=\partial^{2k+1}a(\varphi_1)/\partial\varphi^{2k+1}.$$

При достаточно малом $\mu>0$ φ_0 – двукратный нуль функции $a_\mu(\varphi)$, $a_\mu\in U(a)$ и $a_\mu(\varphi)$ имеет больше нулей чем $a(\varphi)$. Но это противоречит существованию гомеоморфизма h_{a,a_μ}. Из полученного противоречия следует, что уравнение a, грубое относительно $\mathrm{E}(n)\setminus\Sigma^0\mathrm{E}(n)$, принадлежит $\Sigma^1\mathrm{E}(n)$.

Теорема 2 доказана.

Заключение

В работе описано множество $\Sigma^0\mathrm{E}(n)$ дифференциальных уравнений на окружности $\mathbf{S}^1=\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, с правыми частями, являющимися тригонометрическими многочленами степени, не превосходящей заданного числа n, грубые относительно пространства $\mathrm{E}(n)$ всех таких систем. Показано, что грубые уравнения типичны в $\mathrm{E}(n)$. Установлено, что в бифуркационном множестве $\mathrm{E}(n)\setminus\Sigma^0\mathrm{E}(n)$ всюду плотно аналитическое бифуркационное подмногообразие коразмерности один.

Литература

1. Hayashi, S. Connecting Invariant Manifolds and the Solution of C[1] Stability and Ω-Stability Conjectures for Flows / S. Hayashi // Annals of Mathematics. Second Series. – 1997. – Vol. 145, no. 1. – P. 81–137.

2. Robinson, C. Structural stability of vector fields / C. Robinson // Annals of Mathematics. Second Series. – 1974. – Vol. 99, no. 1. – P. 154–175.

3. Abraham, R. Non-genericity of Ω-stability / R. Abraham, S. Smale // Global Analysis, Proc. of Symposia in Pure Mathematics. 14. – Publ. Am. Math. Soc, 1970. – P. 5–8.

4. Палис, Ж. Геометрическая теория динамических систем. Введение / Ж. Палис, В. Мелу. – М.: Мир, 1986. – 301 с.

5. Sotomayor, J. Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds / J. Sotomayor // Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques. – 1974. – Vol. 43. – Issue 1. – P. 5–46.

Поступила в редакцию 14 марта 2019 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2019, vol. 11, no. 2, pp. 20–24

DOI: 10.14529/mmph190203

ON STRUCTURAL STABILITY AND BIFURCATIONS OF POLYNOMIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS ON THE CIRCLE

V.Sh. Roitenberg
Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russian Federation
E-mail: vroitenberg@mail.ru

A dynamical system defined by a differential equation on a manifold, the phase space of a system, is called structurally stable if the topological structure of the phase portrait does not change when passing to a close equation. The concept of structural stability emerged from the idea that the essential properties of a dynamical system describing a real process should not change with small changes in the parameters of the system. By now, natural necessary and sufficient conditions for structural stability of dynamical systems on closed manifolds of any dimension have been obtained. However, if we consider structural stability in narrower classes of dynamical systems, in particular, in the space of systems defined by differential equations with polynomial right-hand sides, the conditions of structural stability have not been studied even for small dimensions of the phase space. This paper considers the dynamic systems given by the differential equations, the right-hand parts of which are trigonometric polynomials of the degree not exceeding the number n. The phase space of such systems is a circle. We describe equations that are structurally stable with respect to the space $E(n)$ of all such equations. An equation is structurally stable if and only if its right-hand side has only simple zeros, that is, all singular points of which are hyperbolic. The set of all structurally stable equations is open and is dense everywhere in the space $E(n)$. In the set of all non-structurally-stable equations, an open, everywhere-dense subset consisting of equations that are first order structurally unstable is distinguished. It is an analytic submanifold of codimension one in $E(n)$ and consists of equations for which all the zeros of the right-hand side are simple, except for one double zero.

Keywords: differential equation on the circle; trigonometric polynomial; structural stability; bifurcation manifold.

References

1. Hayashi S. Connecting Invariant Manifolds and the Solution of C^1 Stability and Ω-Stability Conjectures for Flows. *Annals of Mathematics. Second Series*, 1997, Vol. 145, no. 1, pp. 81–137. DOI: 10.2307/2951824

2. Robinson C. Structural stability of vector fields. *Annals of Mathematics. Second Series*, 1974, Vol. 99, no. 1, pp. 154–175. DOI: 10.2307/1971016

3. Abraham R., Smale S. Non-genericity of Ω-stability. Global Analysis, *Proc. of Symposia in Pure Mathematics*, 14, Publ. Am. Math. Soc., 1970, pp. 5–8.

4. Palis Zh., Melu V. *Geometricheskaya teoriya dinamicheskikh sistem. Vvedenie* (Geometric Theory of Dynamical Systems. An Introduction). Moscow: Mir Publ., 1986, 301 p. (in Russ.). [Palis J., Melo W. *Geometric Theory of Dynamical Systems. An Introduction*. Springer, 1982, 198 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-5703-5]

5. Sotomayor J. Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 1974, Vol. 43, Issue 1, pp. 5–46. DOI: 10.1007/BF02684365

Received March 14, 2019