

РЕКОНСТРУКЦИЯ ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ СКОРОСТИ НА ДОСТУПНОМ УЧАСТКЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ТЕЧЕНИЯ

А.И. Короткий, И.А. Цепелев

*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург,
Российская Федерация
E-mail: korotkii@imm.uran.ru*

Построен метод и разработан алгоритм определения неизвестного распределения скорости втекания вязкой неоднородной несжимаемой жидкости в общий ее поток по дополнительным измерениям скорости течения жидкости на каком-либо доступном наблюдению участке свободной поверхности этого потока. Задача формализуется как обратная граничная задача для модели движения рассматриваемой жидкости. Задача является, вообще говоря, некорректной и решается вариационным методом. Для этого вводится некоторый функционал качества, представляющий собой среднеквадратичную норму разницы (невязки) между наблюдениями скорости на доступной свободной поверхности и виртуальными скоростями, вычисляемыми с помощью специально поставленной вспомогательной задачи граничного управления, которую обычно называют прямой задачей. В нашем случае управлением является скорость жидкости, втекающей в общий поток на недоступном прямому наблюдению участке границы. Искомое решение задачи есть точка минимума этого функционала. Для ее нахождения используется метод градиентного спуска. Этот метод позволяет построить минимизирующие функционал последовательности с помощью предварительно аналитически найденных градиентов функционала. Реализация метода минимизации сводится к последовательному решению соответствующих задач граничного управления. Проведены расчеты модельного примера.

Ключевые слова: вязкая жидкость; модель Навье–Стокса; обратная граничная задача; вариационный метод; численное моделирование.

Введение

Опишем содержательную сторону задачи. Пусть жидкость втекает в некоторую область Ω через участок Γ_2 границы $\Gamma = \partial\Omega$ этой области. Наблюдение за движением жидкости на этом участке невозможно. Возможно наблюдение и измерение скорости движения жидкости на участке Γ_0 границы Γ ($\Gamma_2 \cap \Gamma_0 = \emptyset$). На Γ_0 движение жидкости считается свободным. Содержательным примером описанной ситуации может служить истечение жидкости через вертикальную щель или канал на горизонтальную поверхность (рис. 1). Задача состоит в том, чтобы по измерениям скорости движения жидкости на доступной наблюдению свободной поверхности определить неизвестное распределение скоростей втекающей жидкости.

Математическая модель движения жидкости в области Ω включает в себя уравнение Навье–Стокса (уравнение Стокса) и уравнение несжимаемости. На границе Γ области Ω задаются подходящие граничные условия для скорости, давления или напряжения. Соответствующую краевую задачу для определения поля скоростей втекающей жидкости и определения поля скоростей движения жидкости во всей области Ω назовем обратной задачей.

Обратные задачи по своей сущности являются некорректными [1–4]. На практике это приводит к тому, что малые ошибки в задании исходных данных и (или) неустранимые погрешности вычислений приводят к неконтролируемым искажениям в определении решения задачи. Обычно это проявляется в неустойчивости решения или нарушении фундаментальных законов физики, которые лежат в основе математического моделирования. Методы и алгоритмы, представленные в работе, позволяют найти адекватное решение поставленной обратной задачи. Вариационный метод регуляризации Тихонова позволяет заменить исходную некорректную задачу задачей оп-

тимизации квадратичного целевого функционала [1–5]. Для решения экстремальной задачи выбран метод градиентного спуска, при этом исходная задача сводится к последовательному решению корректно поставленных краевых задач граничного управления. Для тестирования предлагаемого метода проведен вычислительный эксперимент, демонстрирующий работоспособность предложенного метода. Подобные задачи находят многочисленные приложения в теории и практике [1–7]. Работа продолжает исследования [6, 7].

Постановка задачи

Рассмотрим 2D-вариант задачи. Будем считать, что жидкость является ньютоновской высоковязкой неоднородной и несжимаемой, а ее движение является изотермическим и стационарным. В случае высокой вязкости и (или) малой скорости движения жидкости число Рейнольдса для такого течения можно считать равным нулю. Таким образом, в ряде случаев уравнение Стокса можно принять в качестве основного при моделировании движения такой жидкости [8, 9]. В безразмерном виде уравнения движения имеют вид

$$\Omega: \nabla \cdot (\mu (\nabla u + \nabla u^T)) = \nabla p + \rho e_2, \quad \nabla \cdot u = 0, \quad (1)$$

где $x \in \Omega$ – пространственная координата; $u = (u_1(x); u_2(x))$ – скорость жидкости; $p = p(x)$ – давление; $\mu = \mu(x)$ – вязкость; $\rho = \rho(x)$ – плотность; $e_2 = (0, 1)$ – единичный вектор; T – транспонирование тензора; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в \mathbb{R}^2 ; ∇ – градиент; $\nabla \cdot$ – дивергенция.

На границе $\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$ рассматриваются граничные условия (см. рис. 1)

$$\Gamma_0: p = 0, \sigma(u) \triangleq \mu (\nabla u + \nabla u^T) = 0, u = u_0; \Gamma_1: \langle u, n \rangle = 0, \sigma(u)n - \langle \sigma(u)n, n \rangle n = 0; \Gamma_3: u = 0. \quad (2)$$

Граница Γ_0 свободна и на ней измеряется скорость движения жидкости u_0 . На границе Γ_1 задано условие симметрии. На границе Γ_2 жидкость втекает с известными плотностью и вязкостью, но скорость ее втекания неизвестна. На границе Γ_3 задано условие прилипания.

Обратная задача состоит в том, чтобы по результатам измерения скорости движения жидкости на свободной поверхности Γ_0 найти скорость втекания жидкости на границе Γ_2 и поле скоростей движения жидкости в Ω , т. е. требуется найти решение задачи (1), (2).

Задача (1), (2), вообще говоря, не обладает свойством устойчивости [4–7] по отношению к возмущению измеряемой скорости u_0 , для ее решения требуются специальные методы.

Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим вспомогательную задачу граничного управления, которую будем называть прямой задачей. Она в области Ω описывается уравнениями (1) со следующими граничными условиями:

$$\Gamma_0: p = 0, \sigma(u) = 0; \Gamma_1: \langle u, n \rangle = 0, \sigma(u)n - \langle \sigma(u)n, n \rangle n = 0; \Gamma_2: u = \xi; \Gamma_3: u = 0. \quad (3)$$

Вопросы корректности прямой и близких к ней задач обсуждались в [4, 5, 7, 8].

Метод решения обратной задачи

Для построения алгоритма решения задачи перейдем к вариационной постановке обратной задачи. Пусть наблюдаемая скорость движения жидкости u_0 на Γ_0 в обратной задаче соответствует некоторому заранее неизвестному распределению скорости (управляющему параметру) $u = \xi^*$ на границе Γ_2 в прямой задаче. Обозначим $u^* \in \Omega$ решение задачи (1), (3) при заданном граничном условии $u = \xi^* \in \Gamma_2$. Ясно, что $u^* = u_0$ на Γ_0 . Рассмотрим функционал качества

$$I(\xi) = \int_{\Gamma_0} \| u[\xi] - u_0 \|_{\mathbb{R}^2}^2 d\Gamma,$$

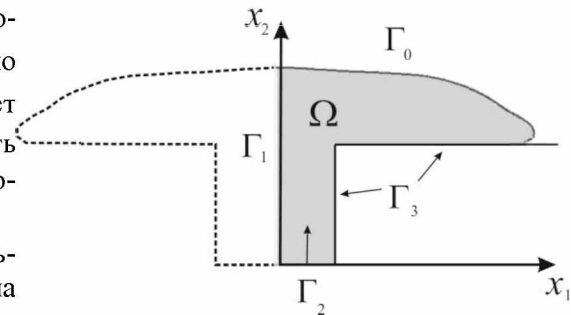


Рис. 1. Модельная область и ее граница

где $u[\xi]$ – решение прямой задачи (1), (3), где граничным условием Γ_2 служит управляющее воздействие $u = \xi$. Данный функционал примет нулевое значение при $\xi = \xi^*$ ($I(\xi^*) = 0$). Искомое граничное управление ξ^* на Γ_2 является минимизирующим элементом в вариационной задаче

$$I(\xi) \rightarrow \min : \xi \in V. \quad (4)$$

здесь V – некоторое множество допустимых управлений на Γ_2 и элемент $\xi^* \in V$.

От решения обратной задачи (1), (2) можно перейти к решению задачи (4). Для решения данной вариационной задачи применим итерационный метод градиентного спуска [10]. Для того чтобы придать вычислительному процессу большую устойчивость, добавим к функционалу качества регуляризующую добавку (параметр регуляризации $\beta > 0$ выбирается эмпирически)

$$J(\xi) = I(\xi) + \beta \int_{\Gamma_2} \|\xi\|_{\mathbb{R}^2}^2 d\Gamma. \quad (5)$$

Минимизирующая последовательность в задаче (5) строится по правилу

$$\xi^{(n+1)} = \xi^{(n)} - \gamma^{(n)} \nabla J(\xi^{(n)}), \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Шаг спуска вычисляется из скалярной задачи условной минимизации

$$J(\xi^{(n+1)} = \xi^{(n)} - \gamma^{(n)} \nabla J(\xi^{(n)})) \rightarrow \min : \gamma^{(n)} > 0,$$

$$\gamma^{(n)} = J(\xi^{(n)}) \left\| \nabla J(\xi^{(n)}) \right\|_{L^2(\Gamma_2)}^{-2}.$$

Градиент функционала определяется по правилу

$$\nabla J(\xi) = \nabla I(\xi) + 2\beta\xi = (-qn + \sigma(w)n) \Big|_{\Gamma_2} + 2\beta\xi,$$

где (w, q) – решение сопряженной краевой задачи

$$\Omega: \nabla \cdot (\mu (\nabla w + \nabla w^T)) = \nabla q, \quad \nabla \cdot w = 0,$$

$$\Gamma_0: q = 0, \quad \sigma(w)n = 2(u[\xi] - u_0); \quad \Gamma_1: \langle w, n \rangle = 0, \quad \sigma(w)n - \langle \sigma(w)n, n \rangle n = 0; \quad \Gamma_2: w = 0;$$

$$\Gamma_3: w = 0.$$

Таким образом, последовательное решение прямой и сопряженной задач граничного управления позволяет аппроксимировать решение обратной задачи. При этом градиент функционала определяется аналитически. Затраты ресурсов ЭВМ на практике практически полностью состоят в качественном решении двух однотипных задач граничного управления для систем дифференциальных уравнений. Вопросы разрешимости таких задач исследованы в [3–5, 7, 10].

Численное моделирование

Для тестирования приведенного алгоритма были разработаны программные коды в пакете OpenFOAM [11]. Такой подход позволяет эффективно решать задачи механики сплошной среды в областях произвольной геометрии на современных вычислительных кластерах. Метод конечных объемов применялся для аппроксимации задач граничного управления. Тестовый пример рассчитывался на сетке из 10^4 гексаэдральных ячеек.

Расчетная область и исходные данные для решения обратной задачи определялись в пакете ANSYS Fluent [12] следующим образом. В области $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ рассматривается двухфазное ламинарное течение ньютоновской вязкой неоднородной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести. Это движение описывается известными уравнениями Навье–Стокса [8]

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \langle u, \nabla(\rho u) \rangle - \nabla \cdot (\eta(u) (\nabla u + \nabla u^T)) = -\nabla p - \rho g, \quad x \in \Omega_1, \quad t > 0;$$

$$u(0, x) = 0, \quad x \in \Omega_1; \quad \nabla \cdot u = 0, \quad x \in \Omega_1;$$

перенос двухкомпонентной несжимаемой жидкости описывается уравнением

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha u) = 0, \quad \alpha(0, x) = 0, \quad x \in \Omega_1, \quad t > 0,$$

плотность и вязкость среды может быть вычислена

$$\rho(t, x) = \rho_{ref}(1 - \alpha(t, x)) + \rho\alpha(t, x), \quad \eta(t, x) = \eta_{ref}(1 - \alpha(t, x)) + \eta(x)\alpha(t, x).$$

Здесь $\mu_{ref} = 10^{-4}$ Па·с; $\rho_{ref} = 1$ кг/м³; $\eta = 10^7$ Па·с, $\rho = 2500$ кг/м³, $h = 100$ м. Тогда число Рейнольдса [9] в задаче примет значение $\sim 10^{-4}$. Поэтому далее в моделировании жидкости мы отбрасываем инерционные члены в уравнении движения и переходим к уравнению Стокса. Функция $\alpha(t, x) \in [0, 1]$ характеризует объемное задержание жидкости в момент времени $t \geq 0$ в точке пространства $x \in \Omega_1$. Область Ω определяется как объединение ячеек области Ω_1 , в которых $\alpha(t = 8000s, x) \geq 0,99$ (рис. 2).

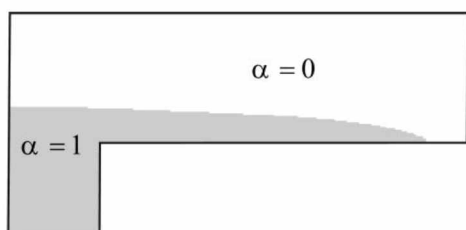


Рис. 2. Определение области Ω

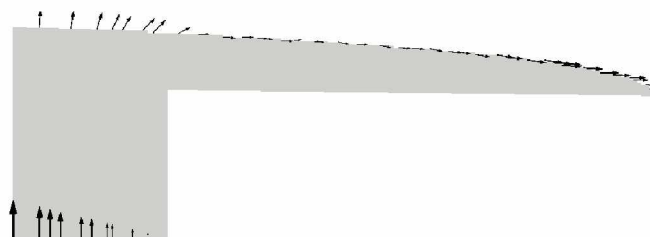


Рис. 3. Тестовая функция для обратной задачи

На границе Γ_2 заданы скорости по правилу $\xi^* = 0,01(1 - x_1)/u_*$, $x_1 \in [0, 1]$, и вычислены соответствующие скорости u_0 на границе между жидкостью и воздухом (см. рис. 3). Эти распределения будут использованы в OpenFOAM для тестирования алгоритма. Параметр регуляризации $\beta = 10^{-6}$, $\xi^{(0)} = 0$.

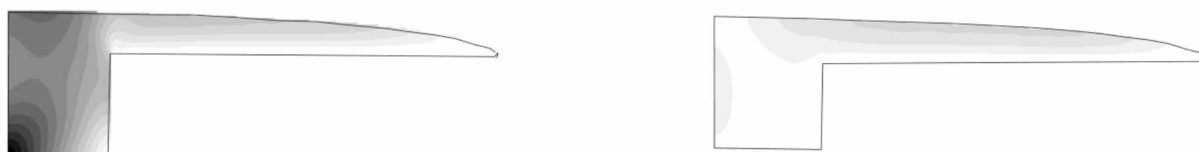


Рис. 4. Погрешности восстановления скорости

На рис. 4 приведены погрешности восстановления поля скоростей $\|u[\xi^{(n)}] - u[\xi^*]\|_{R^2}$ при $n = 0$ (левый кадр) и $n = 25$ (правый кадр). Далее итерационный процесс не приводит к уменьшению погрешности восстановления. Оттенки серого цвета обозначают градацию относительной погрешности от 9 % до 300 %. Относительная погрешность в наихудшем случае составляет 9 %. Это связано с тем, что погрешности в исходных данных довольно большие. Более подробно данный вопрос для моделей механики высоковязкой жидкости изучен в работе [13].

Заключение

В работе предложен подход численного решения некорректной обратной граничной задачи об определении неизвестного распределения поля скоростей втекающей в некоторую область ньютоновской вязкой неоднородной несжимаемой жидкости по результатам измерения скорости движения жидкости на некоторой части границы области, на которой движение жидкости считается свободным. Развитие вычислительной техники, сочетание аналитических методов исследования систем дифференциальных уравнений, задач управления и устойчивых методов решения экстремальных задач позволяют решать сложные задачи механики сплошной среды. Проведены расчеты характерного примера обратной задачи. При численном моделировании был использован суперкомпьютер «Уран» ИММ УрО РАН.

Работа выполнена при поддержке Комплексной программы фундаментальных научных исследований УрО РАН (проект 18-1-1-8).

Литература

1. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
2. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач и её приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
3. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич – М.: УРСС, 2004. – 480 с.
4. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.
5. Алексеев, Г.В. Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости / Г.В. Алексеев, Д.А. Терешко. – Владивосток: Дальнаука, 2008. – 364 с.
6. Ismail-Zadeh, A. Data-Driven Numerical Modelling in Geodynamics: Methods and Applications / A. Ismail-Zadeh, A. Korotkii, I. Tsepelev. – Berlin: Springer International Publishing, 2016. – 105 p.
7. Короткий, А.И. Моделирование прямых и обратных граничных задач для стационарных моделей тепломассопереноса / А.И. Короткий, Ю.В. Стародубцева. – Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2015. – 168 с.
8. Chandrasekhar, S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability / S. Chandrasekhar. – Oxford: Clarendon Press, 1961. – 652 p.
9. Ландау, Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
10. Nocedal, J. Numerical Optimization / J. Nocedal, S.J. Wright. – New York: Springer, 1999. – 664 p.
11. <http://www.openfoam.org/>
12. <https://www.ansys.com/products/fluids/ansys-fluent/>
13. Quantitative reconstruction of thermal and dynamic characteristics of volcanic lava from surface thermal measurements / A. Korotkii, D. Kovtunov, A. Ismail-Zadeh *et al.* // *Geophysical Journal International*. – 2016. – Vol. 205. – Issue 3. – P.1767–1779.

Поступила в редакцию 1 октября 2019 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2019, vol. 11, no. 4, pp. 56–61*

DOI: 10.14529/mmph190407

RECONSTRUCTION OF THE INLET VISCOUS FLUID FLOW BY VELOCITY MEASUREMENTS ON ANY OBSERVABLE PART OF THE FREE MOVING SURFACE

A.I. Korotkii, I.A. Tsepelev

*N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation
E-mail: korotkii@imm.uran.ru*

A method has been developed and an algorithm has been elaborated in order to determine an unknown distribution of inflow velocity of viscous heterogeneous incompressible fluid into its common flow. The main data for solution of this problem are changes in the fluid velocity at some observable section of free surface of this flow. Also, movement of the fluid is considered isothermal and stationary. In order to simplify the model of fluid movement, let us believe that the Reynolds number for the fluid flow under consideration is very small. The number indeed is very small at a high viscosity and (or) slow motion of the fluid. Smallness of the Reynolds number allows discarding the total derivative from the time velocity vector in the Navier–Stokes equation of fluid motion. Thus, in a number of cases, the Stokes equation may be considered as the main one when simulating the motion of viscous fluid. The formulated problem gets formalized as an inverse boundary value problem for the model of motion of viscous fluid. The model includes the Stokes equation, the incompressibility equation, and the corre-

sponding boundary conditions. The problem is ill-posed in regard to perturbation of the velocity under measurement. Therefore, numerical solution of the problem requires development of special sustainable methods. We offer using the variational method. For that, we introduce some assessment function which is a disparity between the observed velocity and the virtual velocity calculated out of a specially-set auxiliary boundary control problem, which is usually called the direct problem. Control is the inflow velocity. Desired solution of the problem is the minimum point of the residual functional which is obtained through the gradient descent method. Implementation of the method leads to a sequential solution of the corresponding correctly-posed boundary control problem. Model example has been calculated.

Keywords: viscous fluid; Navier–Stokes equations; inverse boundary value problem; variational method; numerical simulation.

References

1. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. *On the Solution of Ill-Posed Problems*. New York, John Wiley and Sons, 1977, 258 p.
2. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineynykh nekorrektnykh zadach i eye prilozheniya* (Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications). Moscow, Nauka Publ., 1978, 206 p. (in Russ.).
3. Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N. *Chislennyye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoy fiziki* (Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics). Moscow, URSS Publ., 2004, 480 p. (in Russ.).
4. Kabanikhin, S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* (Inverse and Ill-Posed Problems). Novosibirsk, Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo Publ., 2009, 457 p. (in Russ.).
5. Alekseev G.V., Tereshko D.A. *Analiz i optimizatsiya v gidrodinamike vyazkoy zhidkosti* (Analysis and Optimization in Viscous Fluid Hydrodynamics). Vladivostok, Dal'nauka Publ., 2008, 364 p. (in Russ.).
6. Ismail-Zadeh A., Korotkii A., Tsepelev I. *Data-driven Numerical Modelling in Geodynamics: Methods and Applications*. Berlin, Springer International Publishing, 2016, 105 p. DOI:10.1007/978-3-319-27801-8
7. Korotkiy A.I., Starodubtseva Yu.V. *Modelirovanie pryamykh i obratnykh granichnykh zadach dlya statsionarnykh modeley teplomassoperenosa* (Modelling of Direct and Inverse Boundary Value Problems for Stationary Models of Heat and Mass Transfer). Ekaterinburg, Izdatel'stvo Ural'skogo universiteta Publ., 2015, 168 p. (in Russ.).
8. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford, Clarendon Press, 1961. 652 p. DOI: 10.1017/s0022112062210592
9. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Fluid Mechanics*. Pergamon, 1987, 554 p.
10. Nocedal J., Wright S.J. *Numerical Optimization*. New York, Springer, 1999, 664 p. DOI: 10.1007/b98874
11. <http://www.openfoam.org/>
12. <https://www.ansys.com/products/fluids/ansys-fluent/>
13. Korotkii A., Kovtunov D., Ismail-Zadeh A., Tsepelev I., Melnik O. Quantitative Reconstruction of Thermal and Dynamic Characteristics of Volcanic Lava from Surface Thermal Measurements. *Geophysical Journal International*, 2016, Vol. 205, Issue 3, pp. 1767–1779. DOI: 10.1093/gji/ggw117

Received October 1, 2019