УДК 517.94

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ НОРМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Е.Ю. Алексеева, А.А. Беседин

Представлена процедура оценивания параметров модели линейно-дискретных систем в предположении нормальности распределений входного возмущения и ошибок измерения в канале наблюдения в виде дискретного белого шума. Рассчитаны зависимости логарифма функции правдоподобия от значений параметра.

Ключевые слова: идентификация, оценивание параметров, линейные системы, нормальное распределение, максимальное правдоподобие, фильтр Калмана, численная максимизация.

Введение. Задача параметрической идентификации является одной из важных задач, возникающих в различных областях науки и техники [1, 2]. При решении задачи оценивания методами параметрической идентификации выбирается некоторый критерий качества, явно зависящий от вектора неизвестных параметров. Для нахождения оценок неизвестных параметров используют различные методы оценивания, среди которых выделяют метод максимального правдоподобия [3–5].

Математическая модель. Рассматривается известная задача оценивания параметров линейно-дискретных систем в предположении нормальности распределений входного возмущения и ошибок измерения в канале наблюдения в виде дискретного белого шума:

$$X_{n+1}= A(p)*X_n+B(p)*V_n\,;$$

$$Y_n =H(p)* X_n + \varepsilon_n\,.$$

Здесь X_n – вектор состояния, V_n – возмущение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, Y_n – наблюдаемый выход, для упрощения предполагаемый скалярным , ε_n – ошибки измерения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2, p – неизвестные параметры объекта, подлежащие оцениванию.

Параметры вероятностных распределений могут считаться неизвестными. В этом случае эти параметры подлежат оцениванию наряду с прочими. То же замечание относится и порядку модели. Начальное состояние X_0 предполагается также распределенным нормально с математическим ожиданием m_0 и матрицей ковариации D_0.

Задача решается методом непосредственной численной максимизации функции правдоподобия – плотности вероятности $f(Y_0, Y_1, \dots Y_N / p)$ наблюдаемой реализации выходной последовательности по совокупности оцениваемых параметров, поскольку аналитическое решение этой задачи максимизации нереализуемо даже в самых простейших случаях.

Плотность вероятности наблюдаемой реализации распадается на произведение условных плотностей вероятностей текущего выхода при известных предшествующих выходах:

$$f(Y_0, Y_1, \dots Y_N / p) = f(Y_0 / p) / f(Y_1 / Y_0, p) * f(Y_2 / Y_0, Y_1, p) * \dots * f(Y_N / Y_0, Y_1, \dots Y_{N-1}, p).$$

Для вычисления условных плотностей выходов строятся условные плотности распределения вероятностей векторов состояний относительно предшествующих наблюдений. Эта задача решается использованием уравнений фильтра Калмана. Как известно [5, 6], апостериорная плотность вероятности $f(X_n / Y_0, Y_1, \dots Y_{n-1}, p)$ нормальна.

Пусть:

$$M(X_n / Y_0, Y_1, \dots Y_{n-1}, p) = m_n,$$
$$cov(X_n / Y_0, Y_1, \dots Y_{n-1}, p) = D_n.$$

Тогда:

$$M(Y_n / Y_0, Y_1, \dots Y_{n-1}, p) = H(p) * m_n,$$
$$cov(Y_n / Y_0, Y_1, \dots Y_{n-1}, p) = H(p) * D_n * H(p)^T + \sigma^2,$$

и

$$f(Y_n / Y_0, Y_1, \dots Y_{n-1}, p) =$$
$$= (2 * \pi * (H(p) * D_n * H(p)^T + \sigma^2))^{-0.5} * \exp(-0.5 * (Y_n - H(p) * m_n)^2 / (H(p) * D_n * H(p)^T + \sigma^2).$$

Функция правдоподобия наблюдаемой реализации вычисляется как:

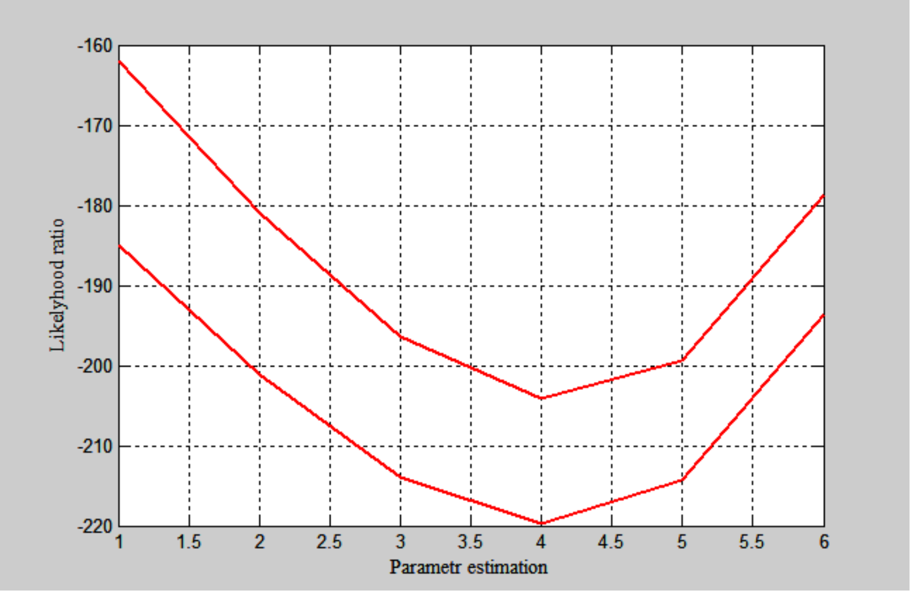
$$f(Y_0, Y_1, \dots Y_N / p) =$$
$$= \prod_{n=0}^{N} (2 * \pi * (H(p) * D_n * H(p)^T + \sigma^2))^{-0.5} * exp(-0.5 * (Y_n - H(p) * m_n)^2 / (H(p) * D_n * H(p)^T + \sigma^2).$$

Рекуррентные соотношения для вычисления m_n, D_n имеют вид [4, 5]:

$$m_{n+1} = A(p) * (m_n + D_n * H(p)^T * (Y_n - H(p) * m_n) / (H(p) * D_n * H(p)^T + \sigma^2)),$$
$$D_{n+1} = A(p) * (D_n - D_n * H(p)^T * H(p) * D_n / (H(p) * D_n * H(p)^T + \sigma^2)) * A(p)^T + B(p) * B(p)^T.$$

Максимизация выражения по неизвестным параметрам p и дает решение поставленной задачи. В качестве начального значения p_0 для процедуры максимизации функции правдоподобия целесообразно выбирать оценки неизвестных параметров, полученные более простыми методами, например методом наименьших квадратов. Предлагаемый подход дает возможность построить эффективные оценки параметров, что и было подтверждено численными экспериментами. Функция правдоподобия требует для вычисления существенных вычислительных ресурсов, поэтому использование предлагаемых алгоритмов в быстродействующих системах реального времени нецелесообразно, по крайней мере при современном уровне вычислительной техники.

Вычислительный эксперимент. На рис. изображены зависимости логарифма функции правдоподобия от оценки параметра при различающихся случайных факторах. Как видно из рисунка, оценки параметров в двух вариантах практически неразличимы и совпадают с оцениваемым параметром.



Зависимость логарифмического отношения правдоподобия
от оценки параметра

Библиографический список

1. Льюнг, Л. Идентификация систем: теория для пользователя / Л. Льюнг. – М.: Наука, 1991. – 432 с.

2. Спиди, К. Теория управления: идентификация и оптимальное управление / К. Спиди, Р. Браун, Дж. Гудвин. – М.: Мир, 1973. – 248 с.

3. Клепиков, Н.П. Анализ и планирование экспериментов методом максимума правдоподобия / Н.П. Клепиков, С.Н. Соколов. – М.: Физматгиз, 1964. – 184 с.

4. Денисов, В.И. Активная параметрическая идентификация стохастических непрерывно-дискретных систем, полученных в результате применения статистической линеаризации / В.И. Денисов, В.М Чубич, Е.В. Филиппова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2012. – Т. XV. – № 4(52). – С. 78–89.

5. Неймарк, Ю.И. Динамические модели теории управления / Ю.И. Неймарк, Н.Я. Коган, В.П. Савельев. – М.: Наука, 1985. – 242 с.

6. Алексеева, Е.Ю. Фильтрация и прогнозирование кусочно-стационарных процессов / Е.Ю. Алексеева, А.А. Беседин // Наука и технология. Т. 2. Труды XXVIII Российской школы. – М.: РАН, 2008. – 163 с.

К содержанию