УДК 519.948

РЕШЕНИЯ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОВОЙ ДИАГНОСТИКИ МЕТОДОМ ПРОЕКЦИОННОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

А.И. Сидикова

Методом проекционной регуляризации решена переопределенная обратная граничная задача для уравнения теплопроводности и получены точные по порядку оценки погрешности этого решения.

Ключевые слова: неограниченный оператор, гильбертово пространство, метод проекционной регуляризации, оценки погрешности, преобразование Фурье.

Введение

При оценивании теплофизических свойств композиционных теплозащитных материалов требуется подчас значительное переопределение задач в связи с неоднородностью внутренней структуры материала и целым рядом физико-химических процессов, осложняющих проведение температурных измерений [1]. При нагреве этих материалов до высоких температур имеет место деструкция, образование и фильтрация жидких и газообразных компонент, химические реакции, коксообразование [2].

Поэтому, во многих случаях возникает необходимость использования результатов измерений температуры в большем числе точек, чем это требуется для однозначного определения искомых характеристик. Переход к переопределенным постановкам обратных задач позволяет получить более достоверные данные.

Постановка задачи

Пусть тепловой процесс описывается уравнением:

$$\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial x^2},\ \ 0<x<1,\ t>0; \tag{1}$$

решение $u(x,t)$ которого непрерывно на $[0,1]\times[0,\infty)$ и удовлетворяет следующим начальному и граничным условиям

$$u\left(x,0\right)=0,\qquad 0\le x\le 1; \tag{2}$$

$$u(0,t)=h\left(t\right),\qquad t\ge 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(1,t)}{\partial x}+kv(1,t)=0,\ \ k>0,\quad t\ge 0, \tag{4}$$

где $h(t)\in C^2[0,\infty),\ \ h(0)=h'(0)=0$ и существует $t_0>0$ такое, что для любого $t\ge t_0$.

$h(t)=0.$

Рассмотрим множество $M_r \subset L_2[0,\infty)$.

$$M_r=\left\{h(t)\ :\ h(t)\in L_2[0,\infty);\quad \int_0^\infty |h(t)|^2\,dt+\int_0^\infty |h'(t)|^2\,dt\le r^2\right\}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что искомая функция $h(t),$ удовлетворяет условию:

$$h(t)\in M_r. \tag{5}$$

Предположим, что при $f_0(t)$ и $g_0(t)$ существует функция $h_0(t),$ удовлетворяющая условиям, сформулированным выше и такая, что при $h(t)=h_0(t)$ существует решение $u(x,t)$ задачи (1)–(4), удовлетворяющее условиям:

$$u(x_1,t)=f_0(t) \text{ и } u(x_2,t)=g_0(t);\quad 0<x_1<x_2<1,\quad t\ge 0, \tag{6}$$

но эти функции нам не известны, а вместо них даны некоторые функции $f_\delta(t), g_\delta(t)\in L_2[0;\infty)\bigcap L_1[0;\infty)$ и число $\delta>0$ такие, что:

$$\| f_\delta(t)-f_0(t)\|_{L_2}^2+\|g_\delta(t)-g_0(t)\|_{L_2}^2\le\delta^2. \tag{7}$$

Требуется, используя исходные данные $x_1,\ x_2,\delta,\ r\ ,f_\delta$ и g_δ, определить приближенное решение $h_\delta(t)$ и оценить его уклонение $\|h_\delta-h_0\|$ от точного решения $h_0(t).$

Теорема. Пусть функция $G(t)$ непрерывна и ограничена на полупрямой $[0,\infty)$. Тогда справедливы соотношения:

$$\int_0^\infty u'_x(x,t)G(t)dt=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\infty u(x,t)G(t)dt\right),$$

$$\int_0^\infty u''_{xx}(x,t)G(t)dt=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\int_0^\infty u(x,t)G(t)dt\right),$$

Обоснование применимости преобразования Фурье и доказательство данной теоремы приведено в работе [3].

Сведение задачи (1)–(7) к задаче вычисления значений неограниченного оператора.

Пусть $\overline{H}=L_2[0;\infty)+iL_2[0;\infty)$, а F изометрический оператор, отображающий пространство $L_2[0,\infty)$ в $\overline{H}$ и определяемый формулой:

$$F[h(t)]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty h(t)e^{-it\tau}dt;\ \ \tau\ge 0.$$

Применяя преобразование F к задаче (1)–(7), сведем ее к задаче вычисления значений неограниченного оператора T,

$$h(\tau) = T[f_\delta(\tau), g_\delta(\tau)], \quad \tau \geq 0, \tag{8}$$

где $h(\tau) = F[h(t)],\ f_\delta(\tau) = F[f_\delta(t)]$ и $g_\delta(\tau) = F[g_\delta(t)],$ а оператор T определяется формулой:

$$T[f(\tau), g(\tau)] = \frac{g(\tau)\, sh\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau} - f(\tau)\, sh\mu_0(1-x_2)\sqrt{\tau}}{sh\mu_0(x_2 - x_1)\sqrt{\tau}},$$

где $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ и $T : \overline{H} \times \overline{H} \to \overline{H}.$

Из (5) следует, что $h_0(\tau) \in M_r,$ где

$$M_r = \left\{ h(\tau) : \ h(\tau) \in \overline{H}, \ \int_0^\infty (1+\tau^2)|h(\tau)|^2\, d\tau \leq r^2 \right\},$$

а из (7), что

$$\left\| f_\delta(\tau) - f_0(\tau) \right\|^2 + \left\| g_\delta(\tau) - g_0(\tau) \right\|^2 \leq \delta^2. \tag{9}$$

Для решения задачи (8), (9) используем метод обобщенной проекционной регуляризации, изложенной в [1]. На основании этого метода введем регуляризующее семейство операторов $\{T_\alpha : \alpha > 0\}$.

$$T_\alpha[f(\tau), g(\tau)] = \begin{cases} T[f(\tau), g(\tau)]; & \tau \leq \alpha, \\ 0 \quad ; & \tau > \alpha. \end{cases}$$

Приближенное значение $h_\delta(\tau)$ задачи (8) определим формулой:

$$h_\delta^\alpha(\tau) = T_\alpha[f_\delta(\tau), g_\delta(\tau)],$$

где зависимость $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(\delta)$ в предыдущей формуле выберем из условия:

$$\sqrt{1+\alpha^2}\, e^{(1-x_1)\sqrt{\alpha/2}} = \frac{r}{\delta}.$$

Окончательно приближенное решение $h_\delta(t)$ в задаче (1)–(8) определим формулой:

$$h_\delta(t) = F^{-1}[\overline{h}_\delta(\tau)],$$

где F^{-1} оператор обратный к $F,\ \overline{h}_\delta(\tau) = pr[f_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)}(\tau); \overline{H}_0],$ а $\overline{H}_0 = F[L_2[0,\infty)].$

Для приближенного решения $h_\delta(t)$ задачи (1)–(8) справедлива оценка погрешности:

$$\| h_\delta(t) - h_0(t) \| \le c \ln^{-2} \delta,$$

где c – некоторая константа.

Заключение

В настоящей работе существенно усилены результаты работы [4] как в выборе более адекватной математической модели, так и в обоснованности используемых методов. Кроме того, переход к переопределенной постановке обратной задачи позволяет снять достаточно обременительное условие на коэффициент $k, k \in (0,1/2)$ в третьем граничном условии. Также при численном решении этой задачи на модельных примерах видно, что значительно повышается точность приближенных решений. Для решения задачи предложен обобщенный метод проекционной регуляризации, который не связан со спектральной функцией оператора задачи и потому допускает постановку и решение некорректно поставленных задач в различных пространствах. Этот факт оказывается очень важным при решении переопределенных обратных задач тепловой диагностики.

Библиографический список

1. Определение характеристик тонкослойных теплозащитных покрытий из решения обратных задач тепло- и массопереноса / Г.Н. Исаков, А.Я. Кузин, В.Н. Савельев, Ф.В. Ермолаев // Физика горения и взрыва. – 2003. – Т. 39. – № 5. – С. 86–96.

2. Алифанов, О.Н. Экстремальные методы решения некорректных задач / О.Н. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев. – М.: Наука, 1988. – 296 с.

3. Танана, В.П. О гарантированной оценке точности приближенного решения одной задачи тепловой диагностики / В.П. Танана, А.И. Сидикова // Труды инстит. матем. и механики УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 2. – С. 89–100.

4. Танана, В.П. Об оптимальности по порядку одного метода вычисления значений неограниченного оператора и его приложения / В.П. Танана, А.И. Сидикова // Сиб. журн. индустр. матем. – 2009. – Т. 12, № 3(39). – С. 125–135.

К содержанию