УДК 519.87 + 338.47

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТИВНОЙ ПРОБЛЕМЫ РЕГИОНАЛЬНЫХ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК

А.В. Панюков, Ю.В. Пивоварова, Х.З. Чалуб

При оперативном планировании работы логистических центров актуальной является задача оперативного обеспечения грузоперевозок заданных объемов различных товаров при заданных объемах различных моторесурсов. В случае планирования безтранзитных перевозок критичным является объем имеющихся моторесурсов, что в ряде случаев не позволяет выполнить заказы в полном объеме. Уменьшить объем невыполненных заказов позволяет использование транзитных перевозок. В статье дана формальная постановка указанных проблем в виде многоиндексных задач линейного программирования. Отмечены частные случаи задач, позволяющие использовать для их решения эффективные алгоритмы.

Ключевые слова: транспортная логистика, распределительная задача, транспортная задача, граф, матрица инцидентности, линейное программирование.

При оперативном планировании работы логистических центров актуальной является задача оперативного обеспечения грузоперевозок заданных объемов различных товаров при заданных объемах различных моторесурсов [1].

Пусть имеется множество J логистических центров, множество R видов товаров, множество K видов транспорта. Будем рассматривать множество $D=\{(i,j): i,j \in J, i \neq j\}$ возможных коммуникаций. Пусть λ^{rk} есть обобщенный удельный объем, требуемый для перевозки единицы продукта $r \in R$ на транспорте вида $k \in K$, R_{ij}^k есть допустимый безтранзитный объем перевозок от центра $i \in J$ до центра $j \in J$ транспортом вида $k \in K$. Таким образом, если $x_{ij}^{rk} \geq 0$ равен объему безтранзитных перевозок от центра $i \in J$ до центра $j \in J$ продукта $r \in R$ транспортом вида $k \in K$, то необходимо выполнение ограничения:

$$\sum_{r \in R} \lambda^{rk} x_{ij}^{rk} \leq R_{ij}^k, \quad (i,j) \in D, \quad k \in K. \tag{1}$$

Пусть E_{ij}^r равен объему заказа на перевозку продукта $r \in R$ от центра $i \in J$ до центра $j \in J$, т.е. объемы $x_{ij}^{rk} \geq 0$ безтранзитных перевозок продута $r \in R$ должны удовлетворять условию:

$$E_{ij}^{r} = e_{ij}^{r} + \sum_{k \in K} x_{ij}^{rk}, \quad (i, j) \in D, \quad r \in R, \tag{2}$$

где $e_{ij}^{r} \geq 0$ есть неудовлетворенная часть спроса, так как в общем случае при $e_{ij}^{r} = 0$ для всех $r \in R$ система ограничений (1)–(2) может оказаться несовместной.

Хотя неудовлетворенная часть текущего спроса может быть удовлетворена в следующий период планирования, предприятие платит неустойку:

$$P_{ij} = \sum_{r \in R} c_{ij}^{r} e_{ij}^{r}, \quad (i, j) \in D. \tag{3}$$

Изложенное выше показывает возможность планирования безтранзитных перевозок на маршруте $(i, j) \in D$ с помощью решения распределительной задачи [2, 3] линейного программирования:

$$\min_{x,\, e} \left\{ \sum_{r \in R} c_{ij}^{r} e_{ij}^{r} \;\middle|\; \begin{array}{c} \sum\limits_{r \in R} \lambda^{rk} x_{ij}^{rk} \leq R_{ij}^{k}, \quad k \in K; \\ \sum\limits_{k \in K} x_{ij}^{rk} + e_{ij}^{r} = E_{ij}^{r}, \quad r \in R; \\ x \geq 0, \quad e \geq 0 \end{array} \right\}, \quad (i, j) \in D. \tag{4}$$

Задача (4) для каждой безтранзитной линии $(i, j) \in D$ имеет $|R| \cdot |K| + |R|$ переменных и $|K| + |R|$ ограничений для неотрицательных переменных $x \geq 0, \quad e \geq 0$.

Если для всех $k \in K$ и $r \in R$ имеет место равенство:

$$\lambda^{rk} = \alpha_r \beta_k, \tag{5}$$

то замена переменных $\alpha_r x_{ij}^{rk} = y_{ij}^{rk}, \alpha_r e_{ij}^{r} = f_{ij}^{r}$ позволяет от задачи (4) перейти к задаче:

$$\min_{y,\, f} \left\{ \sum_{r \in R} \frac{c_{ij}^{r}}{\alpha_r} f_{ij}^{r} \;\middle|\; \begin{array}{c} \sum\limits_{r \in R} y_{ij}^{rk} \leq \dfrac{R_{ij}^{k}}{\beta_k}, \quad k \in K; \\ \sum\limits_{k \in K} y_{ij}^{rk} + f_{ij}^{r} = \dfrac{E_{ij}^{r}}{\alpha_r}, \quad r \in R; \\ y \geq 0, \quad f \geq 0 \end{array} \right\}, \quad (i, j) \in D. \tag{6}$$

Задача (6) известна как транспортная задача в матричной постановке [2, 4]. Для ее решения известны эффективные алгоритмы [4].

Уменьшить суммарную величину неустойки:

$$P = \sum_{(i, j) \in D} P_{ij} = \sum_{(i, j) \in D} \left(\sum_{r \in R} c_{ij}^{r} e_{ij}^{r} \right), \tag{7}$$

можно за счет введения транзитных маршрутов. Действительно, определим для каждого $(i, j) \in D$ множество:

$$D(i, j) = \{l \in J : (i,l), (l, j) \in D\} \tag{8}$$

логистических центров, через которые возможен транзитный маршрут $(i,l, j) : (i,l), (l, j) \in D$.

Пусть z_{ilj}^r есть объем продукта r, перенесенный с маршрута (i, j) на транзитный маршрут (i,l, j). В случае возможности транзитных перевозок аналогом уравнения (2) баланса между заказом на перевозку E_{ij}^r и объемами перевозок $x_{ij}^{rk} \ge 0$ является уравнение:

$$E_{ij}^r + \sum_{l:i\in D(l,j)} z_{lij}^r - \sum_{l\in D(i,j)} z_{ilj}^r = e_{ij}^r + \sum_{k\in K} x_{ij}^{rk}, \quad (i, j) \in D, \quad r \in R. \tag{9}$$

В (9) объем заказа модифицируется за счет включения в маршрут (i, j) объемов транзита из более удаленных пунктов (первая сумма), и исключение транзита через менее удаленные пункты (вторая сумма).

Расширение задачи (4) планирования с учетом возможности транзитных перевозок имеет вид:

$$\min_{z,x,e}\left\{ \sum_{(i,j)\in D}\left(\sum_{r\in R} c_{ij}^r e_{ij}^r\right) \;\middle|\; \begin{array}{c} \sum_{r\in R} \lambda^{rk} x_{ij}^{rk} \le R_{ij}^k, \quad k \in K, (i, j) \in D; \\ E_{ij}^r + \sum_{l:i\in D(l,j)} z_{lij}^r - \sum_{l\in D(i,j)} z_{ilj}^r = e_{ij}^r + \sum_{k\in K} x_{ij}^{rk}, (i, j) \in D, r \in R; \\ z \ge 0, \quad x \ge 0, \quad e \ge 0 \end{array} \right\}. \tag{10}$$

Задача (10) является многоиндексной транспортной задачей, для ее решения известны специальные варианты симплекс-метода [2].

Если для всех $k \in K$ и $r \in R$ имеет место равенство (5), то замена переменных:

$$\alpha_r x_{ij}^{rk} = y_{ij}^{rk}, \quad \alpha_r e_{ij}^r = f_{ij}^r, \quad \alpha_r z_{ij}^r = \zeta_{ij}^r,$$

позволяет от задачи (10) перейти к задаче:

$$\min_{\zeta,y,f}\left\{ \sum_{(i,j)\in D}\left(\sum_{r\in R} \frac{c_{ij}^r}{\alpha_r} f_{ij}^r\right) \;\middle|\; \begin{array}{c} -\sum_{r\in R} y_{ij}^{rk} \ge -\frac{R_{ij}^k}{\beta_k}, \quad k \in K, (i, j) \in D; \\ f_{ij}^r + \sum_{k\in K} y_{ij}^{rk} - \sum_{l:i\in D(l,j)} \zeta_{lij}^r + \sum_{l\in D(i,j)} \zeta_{ilj}^r = \frac{E_{ij}^r}{\alpha_r}, (i, j) \in D, r \in R; \\ \zeta \ge 0, \quad y \ge 0, \quad f \ge 0 \end{array} \right\}. \tag{11}$$

Теорема. М*атрица ограничений задачи* (11) *является матрицей инцидентности орграфа* G *с множеством вершин:*

$$V(G) = V_K(G) \bigcup V_R(G), \quad V_K(G) = \left(K \times D\right), \quad V_R(G) = \left(R \times D\right),$$

и множеством дуг:

$$G: E(G) = E_{KR}(G) \bigcup E_{RR}(G), \quad E_{KR}(G) = \left(\left(K \times D\right) \times \left(R \times D\right)\right),$$
$$E_{RR}(G) = \left\{R \times \left\{\left((i,j),(l,j)\right):(i,j) \in D, (l,j) \in D\right\}\right\}.$$

Доказательство. Очевидно, что имеется взаимно-однозначное соответствие между вершинами $\left\langle (i,j) \in D, k \in K \right\rangle$ орграфа G и ограничениями первой группы задачи (11), а также между вершинами $\left\langle (i,j) \in D, r \in R \right\rangle$ орграфа G и ограничениями второй группы задачи (11). Таким образом, установлено взаимно-однозначное соответствие между вершинами графа G и строками матрицы ограничений задачи (11).

Пусть $i, j, l \in J, \quad r \in R$. Ненулевые элементы матрицы ограничений, соответствующие переменным z_π^r, $r \in R$, π – перестановка попарно различных фиксированных $i, j, l \in J$, приведены в табл.

Из табл. видно, что при любом $r \in R$ и любых попарно различных $i, j, l \in J$ переменную z_{ijl}^r можно интерпретировать как поток по дуге $\left\langle r, \left((i,l),(j,l)\right)\right\rangle \in E_{RR}$. Таким образом, z-подматрица (содержащая только столбцы соответствующие переменным группы z) матрицы задачи (11) является матрицей инцидентности подграфа $G\left(V_R(G)\right)$. Очевидно, что данный подграф содержит все дуги из множества E_{RR} и только их.

Легко заметить, что y-подматрица является матрицей инцидентности суграфа $H(E_{KR})$ орграфа G для всех дуг из множества дуг E_{KR}, не вошедшего в подграф $G\left(V_R(G)\right)$. По построению орграф G и его матрица инцидентности являются соединением орграфов $G\left(V_R(G)\right)$, $H(E_{KR})$ и их матриц инцидентности соответственно. Теорема доказана.

Как известно, матрица инцидентности ориентированного графа является вполне унимодулярной [5]. Следовательно, задача (11) имеет целочисленное оптимальное решение при целочисленности правой части ее системы ограничений. В работе [4] изложены эффективные алгоритмы нахождения целочисленного оптимального решения для задач большой размерности.

Таблица

Ненулевые элементы матрицы ограничений

Ограничения / вершины	Переменные / дуги					
	z_{lij}^r / $\langle r,((l,j),(i,j))\rangle$	z_{ilj}^r / $\langle r,(i,j),((l,j))\rangle$	z_{ijl}^r / $\langle r,((i,l),(j,l))\rangle$	z_{lji}^r / $\langle r,((l,i),(j,i))\rangle$	z_{jli}^r / $\langle r,((j,i),(l,i))\rangle$	z_{jil}^r / $\langle r,((j,l),(i,l))\rangle$
$\langle r,(i,j)\rangle$	1	-1				
$\langle r,(j,i)\rangle$				1	-1	
$\langle r,(i,l)\rangle$			-1			1
$\langle r,(l,i)\rangle$				-1	1	
$\langle r,(j,l)\rangle$			1			-1
$\langle r,(l,j)\rangle$	-1	1				

Библиографический список

1. Панюков, А.В. Развитие транспортной логистики в челябинской области: проблемы и перспективы применения информационных технологий / А.В. Панюков, Ю.В. Пивоварова // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: «Экономика и менеджмент». – 2017. – Т. 11, № 1. – С. 7–11.

2. Раскин, Л.Г. Многоиндексные задачи линейного программирования / Л.Г. Раскин, И.О. Кириченко. – М.: Радио и связь, 1989. – 240 с.

3. Серая, О.В. Распределительная задача линейного программирования / О.В. Серая // Системи обробки інформації. – 2013. – № 2(109). – С. 168–170.

4. Панюков, А.В. Техника программной реализации потоковых алгоритмов / А.В. Панюков, В.А. Телегин // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: «Математическое моделирование и программирование». – 2008. – № 27 (127). – С. 78–99.

5. Емеличев, В.А. Многогранники, графы, оптимизация / В.А. Емеличев, М.М. Ковалев, М.К. Кравцов. – М.: Наука, 1981. – 344 с.

К содержанию